

НЕЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Предложен метод расчета нелинейных нормальных форм при вынужденных колебаниях в существенно нелинейных системах с кусочно-линейными упругими характеристиками. Основу подхода составляет сочетание нелинейных нормальных форм Шоу – Пьера и метод Раушера. С помощью этого подхода неавтономная кусочно-линейная система преобразована в автономную. В этой системе определены нелинейные нормальные формы Шоу – Пьера. Исследованы нелинейные крутильные колебания силовой передачи трехцилиндрового транспортного двигателя.

Введение. Системы с конечным числом степеней свободы и кусочно-линейными упругими характеристиками описывают широкий класс технических объектов [1, с. 59–74]. Разработано много разнообразных подходов для исследования таких систем. В работах [21, 9] показано, что приближение кусочно-линейной характеристики полиномиальной кривой может привести к некорректности анализа устойчивости решений, а также к значительным ошибкам в расчетах периодических движений систем с существенными нелинейностями. В работах [10, 18, 20] проведен аналитический анализ свободных колебаний систем с кусочно-линейной упругой характеристикой. Методика поиска нелинейных нормальных форм (ННФ) Шоу – Пьера свободных колебаний кусочно-линейных систем изложена в [13]. Анализ отклика кусочно-линейных систем под действием гармонического возбуждения выполнен в [2, 12, 15, 22]. В статьях [6, 7] исследуются хаотические колебания в кусочно-линейных системах с двумя и тремя степенями свободы. Для анализа кусочно-линейных систем в статье [4] предлагается использовать амплитудные поверхности. ННФ свободных колебаний кусочно-линейных систем рассматриваются в работах [11, 13].

Только несколько статей посвящено расчету ННФ при вынужденных колебаниях. По-видимому, работа [14] была первой, где рассчитывались ННФ Шоу – Пьера при вынужденных колебаниях. Сочетание ННФ и метода Раушера для расчета ННФ Каудерера – Розенберга при вынужденных колебаниях рассматривается в монографии [19, с. 230–238]. Для расчета вынужденных и параметрических колебаний в [3, 5] применяется сочетание ННФ и процедуры Раушера. Подробный обзор работ по теории ННФ представлен в статьях [8, 16].

В настоящей статье для исследования вынужденных колебаний в существенно нелинейных кусочно-линейных системах с произвольным числом степеней свободы предлагается сочетать ННФ Шоу – Пьера и метод Раушера. В результате применения этого подхода неавтономная динамическая система сводится к эквивалентной автономной системе, в которой рассчитываются ННФ Шоу – Пьера.

Постановка задачи. Исследуем систему с N степенями свободы под действием внешнего гармонического возбуждения. Движение такой системы представим относительно обобщенных координат x_i , $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + f_i(x_1, \dots, x_N) &= 0, \quad i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, N, \\ \ddot{x}_k + f_k(x_1, \dots, x_N) &= A \cos \omega t. \end{aligned} \quad (1)$$

Нелинейные функции f_i , $i = 1, \dots, N$, являются трилинейными, зависят от вектора обобщенных координат $x = [x_1, \dots, x_N]^T$ и имеют следующий вид:

$$f_i(x) = \begin{cases} k_{1i}x, & \Delta_{13} < h^T x < \Delta_{12}, \\ k_{2i}x + b_{2i}, & h^T x \geq \Delta_{12}, \\ k_{3i}x + b_{3i}, & h^T x \leq \Delta_{13}, \end{cases} \quad (2)$$

где k_{1i}, k_{2i}, k_{3i} – векторы-строки коэффициентов; b_{2i}, b_{3i} – свободные члены, обеспечивающие непрерывность упругой характеристики в точках излома; h – вектор-столбец.

Целью работы является нахождение ННФ при вынужденных колебаниях в существенно нелинейной системе (1). Определения и свойства ННФ подробно описаны в монографии [1] и статьях [17, 21, 22].

Расчет ННФ неавтономных систем. Предлагаем метод поиска вынужденных колебаний существенно нелинейных кусочно-линейных систем, основанный на процедуре Раушера, которая неавтономную динамическую систему сводит к эквивалентной автономной. В полученной автономной динамической системе разыскиваем ННФ Шоу – Пьера. Таким образом, рассчитываем ННФ при вынужденных колебаниях.

Динамическую систему (1) без учета внешнего воздействия перепишем относительно нормальных координат одного ее линейного участка, в качестве которого выберем первую строку функции (2). Тогда свободные колебания на этом участке описываются динамической системой

$$\ddot{x} + K_1 x = 0, \quad (3)$$

где матрица K_1 имеет блочную структуру $K_1 = [k_{11} \ k_{12} \ \dots \ k_{1N}]^T$. Блоки этой матрицы представлены в уравнении (2). В динамической системе (3) существует вектор модальных координат $\eta = [\eta_1, \dots, \eta_N]$, который связан с вектором x следующим неособым линейным преобразованием координат:

$$x = Q\eta,$$

где Q – матрица собственных векторов матрицы K_1 . Динамическая система (3) в модальных координатах имеет вид

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

где ω_i^2 – собственные значения матрицы K_1 .

Динамическую систему (1) относительно модальных координат η можно представить так:

$$\ddot{\eta} + \Lambda_1 \eta = \tilde{f}(\eta) + \frac{Q_{*,k}}{M_k} A \cos \omega t, \quad (4)$$

где M_k – масса k -й массы системы; Λ_1 – диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы K_1 ; $Q_{*,k} = (Q_{1,k}, \dots, Q_{N,k})$ – k -й столбец матрицы Q ; k – номер массы, на которую действует внешняя периодическая сила в системе (1). Вектор-функцию $\tilde{f}(\eta)$ запишем так:

$$\tilde{f}(\eta) = \begin{cases} 0, & \Delta_{13} < h^T Q\eta < \Delta_{12}, \\ Z_2 \eta + \xi_2, & \eta \geq \Delta_{12}, \\ Z_3 \eta + \xi_3, & \eta \leq \Delta_{13}, \end{cases}$$

где

$$Z_2 = \Lambda_1 - Q^{-1} K_2 Q, \quad Z_3 = \Lambda_1 - Q^{-1} K_3 Q, \\ \xi_2 = Q^{-1} b_2, \quad \xi_3 = Q^{-1} b_3,$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ \dots \\ k_{2N} \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} k_{31} \\ k_{32} \\ \dots \\ k_{3N} \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ \dots \\ b_{2N} \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} b_{31} \\ b_{32} \\ \dots \\ b_{3N} \end{bmatrix}.$$

Сначала рассмотрим ННФ в автономной динамической системе, которую получим из (4) отбрасыванием внешней периодической силы. Согласно процедуре расчета ННФ Шоу – Пьера [1, 3], одну из модальных координат η и ее скорость выбираем ведущими. В качестве таких координат возьмем $(\eta_1, \dot{\eta}_1)$. Все остальные координаты вектора η ведомые. В этом случае на ННФ ведомые координаты выражены через ведущие. Эту зависимость можно представить так:

$$\eta_k = \Theta_k(\eta_1, \dot{\eta}_1), \quad \dot{\eta}_k = \Xi_k(\eta_1, \dot{\eta}_1), \quad k = 2, \dots, N. \quad (5)$$

Теперь введем замену переменных. В качестве ведущих координат выберем координаты a, φ , связанные с η_1 и $\dot{\eta}_1$ так:

$$\eta_1 = a \cos \varphi, \quad \dot{\eta}_1 = -a\omega_1 \sin \varphi. \quad (6)$$

Представление (6) введем в первое уравнение (5). Тогда полученную функцию можно изобразить в виде укороченного ряда Фурье [1]:

$$\eta_i = P_i(a, \varphi) = \sum_{\ell=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_i^{\ell, m} A_\ell(a) \cos(m-1)\varphi, \quad (7)$$

где $A_\ell(a)$ – некоторые базисные функции; N_a – число базисных функций A_ℓ ; N_φ – число элементов разложения по φ .

Теперь исследуем вынужденные колебания в существенно нелинейной системе (4). Известно [1], что вынужденные колебания в этой системе хорошо описываются гармоническим приближением:

$$\eta_i = \gamma_i \cos \omega t. \quad (8)$$

Сравнивая соотношения (8) и (6), получим

$$A \cos(\omega t) = A \cos \varphi = A \frac{\eta_1}{\sqrt{\eta_1^2 + \dot{\eta}_1^2 \frac{1}{\omega_1^2}}}. \quad (9)$$

Итак, внешняя сила динамической системы (4) выражена через обобщенную координату η_1 и скорость $\dot{\eta}_1$. Теперь неавтономную динамическую систему (4) можно заменить так называемой эквивалентной псевдоавтономной динамической. Для этого соотношения (9) введем в (4) и получим псевдоавтономную динамическую систему

$$\ddot{\eta} + \Lambda_1 \eta = g(\eta), \quad (10)$$

где элементы матрицы $g = [g_1, \dots, g_N]$ определяются так:

$$g_i(\eta) = f_i(\eta) + \frac{AQ_{i,k}\eta_1}{M_k \sqrt{\eta_1^2 + \dot{\eta}_1^2 \frac{1}{\omega_1^2}}}.$$

Согласно работе [16], модальные координаты (a, φ) удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{a} = -\frac{g_1(a, \varphi)}{\omega_1} \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega_1 - \frac{g_1(a, \varphi)}{a\omega_1} \sin \varphi. \quad (11)$$

Расчет инвариантных многообразий системы (1) сводится к определению коэффициентов $C_i^{\ell, m}$, $i = 2, \dots, N$, $\ell = 1, \dots, N_a$, $m = 1, \dots, N_\varphi$, разложения (7). Для этого первые и вторые производные, входящие в уравнения (10), представим так:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_i &= \sum_{\ell=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_i^{\ell,m} (A'_\ell \cos(m-1)\varphi \cdot \dot{a} - A_\ell(m-1) \sin(m-1)\varphi \cdot \dot{\varphi}) = \\
&= \sum_{\ell=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_i^{\ell,m} \left(\frac{g_1(a, \varphi)}{\omega_1} \left(-A'_\ell \cos \varphi \cos(m-1)\varphi + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (m-1) \frac{A_\ell}{a} \sin \varphi \sin(m-1)\varphi \right) - \omega_1(m-1)A_\ell \sin(m-1)\varphi \right), \\
\ddot{\eta}_i &= \sum_{\ell=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_i^{\ell,m} (A''_\ell \cos(m-1)\varphi \cdot \dot{a}^2 + \\
&\quad + A'_\ell \cos(m-1)\varphi \cdot \ddot{a} - 2(m-1)A'_\ell \sin(m-1)\varphi \cdot \dot{a}\dot{\varphi} - \\
&\quad - A_\ell(m-1)^2 \dot{\varphi}^2 \cos(m-1)\varphi - A_\ell \sin(m-1)\varphi \cdot \ddot{\varphi}) = \\
&= \sum_{\ell=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_i^{\ell,m} (\cos(m-1)\varphi (A''_\ell \dot{a}^2 + A'_\ell \ddot{a}) - \\
&\quad - \sin(m-1)\varphi (2(m-1)A'_\ell \cdot \dot{a}\dot{\varphi} + A_\ell \ddot{\varphi})). \tag{12}
\end{aligned}$$

где $A'_\ell = \frac{dA_\ell}{da}$, $A''_\ell = \frac{d^2A_\ell}{da^2}$. Вторые производные от модальных координат, входящие в (12), определим так:

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{g_1}{\omega_1} \sin \varphi \right) = -\frac{1}{\omega_1} \left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right) \sin \varphi + g_1 \cos \varphi \right), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= \frac{d}{dt} \left(\omega_1 - \frac{g_1}{a\omega_1} \cos \varphi \right) = \\
&= -\frac{1}{\omega_1} \left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} \dot{\varphi} - \frac{g_1}{a} \dot{a} \right) \frac{1}{a} \cos \varphi - \frac{g_1}{a} \dot{\varphi} \sin \varphi \right), \tag{14}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_1}{\partial a} &= \begin{cases} 0, & \Delta_2 < h^T Q \eta < \Delta_3, \\ \sum_{i=1}^N Z_{21i} \frac{\partial \eta_i}{\partial a}, & h^T Q \eta \leq \Delta_2, \\ \sum_{i=1}^N Z_{31i} \frac{\partial \eta_i}{\partial a}, & h^T Q \eta \geq \Delta_3, \end{cases} \\
\frac{\partial g_1}{\partial \varphi} &= \begin{cases} -\frac{AQ_{i,k}}{M_k} \sin \varphi, & \Delta_2 \leq h^T Q \eta \leq \Delta_3, \\ \sum_{i=1}^N Z_{21i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \varphi} - \frac{AQ_{i,k}}{M_k} \sin \varphi, & h^T Q \eta < \Delta_2, \\ \sum_{i=1}^N Z_{31i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \varphi} - \frac{AQ_{i,k}}{M_k} \sin \varphi, & h^T Q \eta > \Delta_3, \end{cases} \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta_i}{\partial a} &= \begin{cases} \cos \varphi, & i = 1, \\ \sum_{\ell=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_i^{\ell,m} A'_\ell \cos(m-1)\varphi & i \neq 1, \end{cases} \\
\frac{\partial \eta_i}{\partial \varphi} &= \begin{cases} -a \sin \varphi, & i = 1, \\ -\sum_{\ell=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_i^{\ell,m} (m-1)A_\ell \sin(m-1)\varphi, & i \neq 1. \end{cases} \tag{16}
\end{aligned}$$

Теперь соотношения (15), (16) введем в (13), (14) и результат подставим в уравнение (10). В итоге получим вектор невязки решений системы уравнений (10):

$$Z(a, \varphi, C) = \ddot{\eta}(a, \varphi, C) + \Lambda_1 \eta(a, \varphi, C) - g(a, \varphi, C), \quad (17)$$

где C – вектор, состоящий из элементов $C_i^{\ell, m}$, $i = 2, \dots, N$, $\ell = 1, \dots, N_a$, $m = 1, \dots, N_\varphi$. В силу соотношений (6), (7) первый элемент вектора невязки (17) обращается в нуль. Остальные его элементы отличны от нуля. Для определения ННФ воспользуемся методом Галеркина и составим условия ортогональности вектора невязки $Z(a, \varphi, C)$ с базисными функциями $A_\ell \cos(m-1)\varphi$:

$$\int_0^{2\pi} \int_{a_0}^{a_1} (\ddot{\eta}(a, \varphi, C) + \Lambda_1 \eta(a, \varphi, C) - g(a, \varphi, C)) A_\ell \cos[(m-1)\varphi] da d\varphi = 0. \quad (18)$$

Итак, соотношения (18) являются системой $(N-1)N_a N_\varphi$ нелинейных алгебраических уравнений относительно элементов вектора C . Численное их решение можно найти методом Ньютона – Рафсона.

Для получения движений на инвариантных многообразиях выбираем начальные значения модальных переменных $a(0)$, $\varphi(0)$. Движение на форме получаем численным интегрированием уравнений модальной динамики (11). Чтобы исследовать устойчивость полученных периодических движений, численно решались уравнения в вариациях. Рассчитывалась соответствующая фундаментальная матрица и определялись ее собственные значения – мультипликаторы [1].

Численный анализ нелинейных крутильных колебаний. Рассмотрим модель крутильных колебаний силовых передач двигателей внутреннего сгорания. Расчетная схема этой системы представлена на рис. 1. Исследуем силовую передачу трехцилиндрового транспортного двигателя с противоположно движущимися поршнями. Сосредоточенные диски модели описывают крутильные колебания двух коленчатых валов двигателя. Нелинейная упругая характеристика описывает главную передачу между коленчатыми валами. Она состоит из пяти шестерен, одна из которых содержит упругую муфту. Вынужденные крутильные колебания силовой передачи описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + f(\theta_1 - \theta_2) = A \cos(\omega t), \quad I_2 \ddot{\theta}_2 - f(\theta_1 - \theta_2) + c_1 \theta_2 = 0, \quad (19)$$

где

$$f(\theta_1 - \theta_2) = \begin{cases} c_1(\theta_1 - \theta_2), & -\Delta < \theta_1 - \theta_2 < \Delta, \\ c_2(\theta_1 - \theta_2) + \Delta(c_2 - c_1), & \theta_1 - \theta_2 \geq \Delta, \\ c_2(\theta_1 - \theta_2) - \Delta(c_2 - c_1), & \theta_1 - \theta_2 \leq -\Delta, \end{cases}$$

θ_1 , θ_2 – обобщенные координаты, описывающие колебания двух коленчатых валов двигателя; c_1 – жесткость зубчатой передачи между коленчатыми валами.

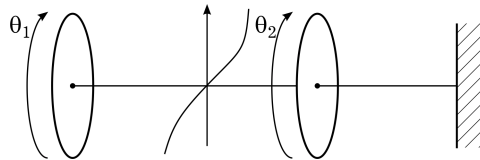


Рис. 1. Механическая система.

Численный анализ выполнен для следующих безразмерных значений параметров системы:

$$c_1 = 300, c_2 = 150, \Delta = 1.04, I_1 = 0.3, I_2 = 0.45, A = 77.7.$$

Собственные частоты линейных колебаний системы с малыми амплитудами таковы: $\omega_1 = 18.25$, $\omega_2 = 44.72$.

Для исследования ННФ при вынужденных колебаниях применен подход, описанный выше. Полученные численно ННФ перестраивались в конфигурационном пространстве (θ_1, θ_2) . Рассматривались результаты численного моделирования ННФ при величине амплитуды колебаний $a(0) = 20 \Delta$. Частоту возмущающей силы принимали равной $\omega = 17.186$ рад/с. Результаты расчета этой ННФ по алгоритму, представленному выше, иллюстрирует сплошная линия на рис. 2. Для подтверждения полученной ННФ производилось прямое численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (19) на 100 периодах возмущающей силы. Результаты расчетов показаны точками на рис. 2. Как видим, полученные траектории близки, что свидетельствует о правильности расчета ННФ.

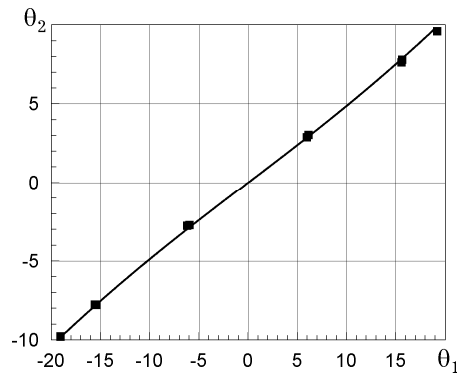


Рис. 2. ННФ в конфигурационном пространстве при $\omega = 17.186$ рад/с.

Выполнялись также расчеты ННФ в области основного первого резонанса системы. Результаты представлены на рис. 3, где по оси ординат показана амплитуда колебаний $\theta_1(t)$, а по оси абсцисс – частота возмущающей силы ω . Штрихпунктирной линией изображена скелетная кривая свободных колебаний, сплошной линией показаны ветви, описывающие устойчивые вынужденные колебания системы, а штриховой линией показаны участки неустойчивых вынужденных колебаний системы. Для подтверждения полученных результатов производилось прямое численное интегрирование динамической системы (19) из начальных условий, отвечающих нелинейной нормальной форме вынужденных колебаний. Его результаты обозначены точками на амплитудно-частотной характеристике. Итак, данные, полученные двумя методами, близки.

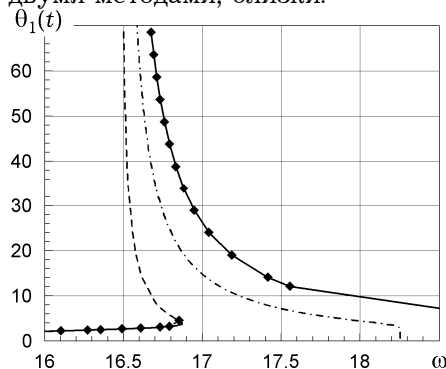


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика отклика.

Выводы. Предложен новый подход для поиска нелинейных нормальных форм Шоу – Пьера вынужденных колебаний в существенно нелинейных системах с кусочно-линейной упругой характеристикой, основанный на комбинации ННФ Шоу – Пьера в кусочно-линейных системах, совершающих свободные колебания, и на методе Раушера.

Исследованы вынужденные колебания в существенно нелинейной системе с двумя степенями свободы, которые являются ННФ. Они представлены на амплитудно-частотной характеристике, которая имеет традиционный вид. Итак, вынужденные колебания в существенно нелинейных кусочно-линейных системах можно изобразить в виде ННФ.

1. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. – Т. 1. Модели, методы, явления. – Москва –Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 704 с.
2. Albert C. J. Luo. The mapping dynamics of periodic motions for a three-piecewise linear system under a periodic excitation // J. Sound Vib. – 2005. – **283**, No. 3-5. – P. 723–748.
3. Avramov K. V. Analysis of forced vibrations by nonlinear modes // Nonlinear Dynam. – 2008. – **53**, No. 1-2. – P. 117–127.
4. Avramov K. V. Bifurcation analysis of a vibropercussion system by the method of amplitude surfaces // Int. Appl. Mech. – 2001. – **38**, No. 9. – P. 1151–1156.
То же: Аврамов К. В. Анализ бифуркаций виброударной системы на основе метода амплитудной поверхности// Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 9. – С. 138–144.
5. Avramov K. V. Nonlinear modes of parametric vibrations and their applications to beams dynamics // J. Sound Vib. – 2009. – **322**. – P. 476–489.
6. Avramov K. V., Belomyttsev A. S., Karaban V. N. Regions of chaotic oscillations of discrete mechanical systems with piecewise-linear elastic characteristics // Int. Appl. Mech. – 1994. – **30**, No. 5. – P. 396–402.
То же: Аврамов К. В., Беломытцев А. С., Карабан В. Н. Области хаотических колебаний дискретных механических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками// Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 5. – С. 81–88.
7. Avramov K. V., Karaban V. N. Resonance under random vibrations of discrete dynamic systems with piecewise-linear elastic characteristics // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No. 7. – P. 584–588.
То же: Аврамов К. В., Карабан В. Н. Резонанс при хаотических колебаниях дискретных динамических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками// Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 7. – С. 84–88.
8. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems // Appl. Mech. Rev. – 2013. – **65**, No. 2. – 020801-020801-20. – doi:10.1115/1.4023533.
9. Begley C. J., Virgin L. N. A comparison of piecewise linear and continuous approximating models // Mech. Res. Commun. – 1995. – **22**, No. 6. – P. 527–532.
10. Chati M., Rand R., Mukherjee S. Modal analysis of a cracked beam. // J. Sound Vib. – 1997. – **207**, No. 2. – P. 249–270.
11. Chen Sh.-L., Shaw S. W. Normal modes for piecewise linear vibratory systems // Nonlinear Dynam. – 1996. – **10**, No. 2. – P. 135–164.
12. Ji J. C. Dynamics of a piecewise linear system subjected to a saturation constraint // J. Sound Vib. – 2004. – **271**, No. 3-5. – P. 905–920.
13. Jiang D., Pierre C., Shaw S. W. Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems // J. Sound Vib. – 2004. – **272**, No. 3-5. – P. 869–891.
14. Jiang D., Pierre C., Shaw S. W. Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation // J. Sound Vib. – 2005. – **288**, No. 4-5. – P. 791–812.
15. Kim T. C., Rook T. E., Singh R. Super- and sub-harmonic response calculations for a torsional system with clearance nonlinearity using the harmonic balance method // J. Sound Vib. – 2005. – **281**, No. 3-5. – P. 965–993.
16. Mikhlin Yu., Avramov K. V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments // Appl. Mech. Rev. – 2010. – **63**, No. 6. – 060802-060802-21. – doi:10.1115/1.4003825.
17. Pesheck E., Pierre C., Shaw S. W. A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds // J. Sound Vib. – 2002. – **249**, No. 5. – P. 971–993.

18. Todd M. D., Virgin L. N. Natural frequency considerations of an impact oscillator // J. Sound Vib. – 1996. – **194**, No. 3. – P. 452–460.
19. Vakakis A. F., Manevitch L. I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V. N., Zevin A. A. Normal modes and localization in nonlinear systems. – New York: Wiley, 1996. – 552 p.
20. Vestroni F., Luongo A., Paolone A. A perturbation method for evaluating nonlinear normal modes of a piecewise linear two-degrees-of-freedom system // Nonlinear Dynam. – 2008. – **54**, No. 4. – P. 379–393.
21. Wolf H., Kodvanj J., Bjelovučić-Kopilović S. Effect of smoothing piecewise-linear oscillators on their stability predictions // J. Sound Vib. – 2004. – **270**, No. 4-5. – P. 917–932.
22. Zhu F., Parker R. G. Non-linear dynamics of a one-way clutch in belt-pulley systems // J. Sound Vib. – 2005. – **279**, No. 1-2. – P. 285–308.

НЕЛІНІЙНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ СУТТЄВО НЕЛІНІЙНИХ ПЕРІОДИЧНО ЗБУДЖУВАНИХ КУСКОВО-ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Запропоновано метод розрахунку нелінійних нормальних форм при вимушених коливаннях у суттєво нелінійних системах з кусково-лінійними пружними характеристиками. В основу підходу покладено поєднання методу нелінійних нормальних форм Шоу – П'єра та методу Раушера. За цим підходом неавтономну кусково-лінійну систему перетворено на автономну. У цій системі визначено нелінійні нормальні форми Шоу – П'єра. За допомогою описаного методу досліджено нелінійні крутильні коливання силової передачі трициліндрового транспортного двигуна.

NONLINEAR NORMAL MODES OF ESSENTIALLY NONLINEAR PIECEWISE LINEAR SYSTEMS UNDER PERIODIC EXCITATION

A method for calculation of nonlinear normal modes for essentially nonlinear piecewise linear systems performing forced oscillations is proposed. The approach is based on combination of Shaw – Pierre nonlinear normal modes method and Rausher technique. Application of this approach leads to a transformation of non-autonomous piecewise linear system into autonomous one. The Shaw – Pierre nonlinear normal modes are determined for this system. The proposed method is used for analysis of nonlinear torsional oscillations of a power transmission in triplex transport engine.

Ин-т проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено
29.10.13