

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА**

*Рассматривается полый упругий цилиндр конечной длины под действием собственного веса и осесимметричной нормальной нагрузки, приложенной к верхнему основанию. Нижнее основание цилиндра неподвижно закреплено. Внутренняя цилиндрическая поверхность находится в условиях скользящей заделки, а внешняя поверхность неподвижно закреплена. Задача сведена к интегральному уравнению I-го рода относительно нормального напряжения на защемленной боковой поверхности. Выявлен характер особенности искомой функции и предложен эффективный алгоритм решения полученного уравнения с использованием разложения искомой функции в ряд по многочленам Якоби. Приведены результаты вычислений нормального напряжения на боковых поверхностях цилиндра, которые показывают, что в случае защемления влияние собственного веса цилиндра значительно меньше, чем в случае скользящей заделки.*

**Введение.** Упругие цилиндры конечной длины, сплошные и полые, являются одними из самых распространенных типов тел, используемых в практике расчета воздействия нагрузок на элементы конструкций. Исследованию напряженного состояния таких тел посвящен широкий круг публикаций, обзор которых содержится в докладе [1] и в монографии [6]. Наиболее распространенным подходом при решении такого типа задач состоит в построении решений уравнений равновесия в виде разложений в ряды Фурье – Бесселя [3, 13, 16, 21, 22]. Удовлетворение краевым условиям приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов этих разложений. В некоторых случаях удается построить точное решение [4, 19]. Большое число работ посвящено термоупругим напряжениям в цилиндрах [7, 17, 23], в том числе и анизотропных [15, 18]. Исследованию напряженного состояния в полых цилиндрах с некруговым сечением посвящена работа [5]. Однако во всех публикациях не учитывается действие объемных сил в виде собственного веса материала цилиндра, что приводит к необходимости решения неоднородных уравнений Ламе. Исключения составляют работа [14], где дается численное решение задачи о напряженном состоянии полого цилиндра, и работа [20], в которой исследуется напряженно-деформируемое состояние transversально-изотропного цилиндра под влиянием собственного веса. Аналитический путь решения таких задач намечен в работе [9] и реализован для сплошного цилиндра с защемленной боковой поверхностью в работе [10].

Целью данной работы является определение полей смещений и напряжений в полом упругом цилиндре под действием осесимметричной нагрузки и с учетом собственного веса цилиндра. Внутренняя цилиндрическая поверхность находится в условиях скользящей заделки, а внешняя цилиндрическая поверхность защемлена. Задача сведена к сингулярному интегральному уравнению первого рода относительно неизвестного нормального напряжения на защемленной цилиндрической поверхности. Выявление характера особенности неизвестной функции позволяет разыскивать ее в виде ряда по многочленам Якоби. Последующая ортогонализация по этой системе многочленов сводит задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений I-го рода.

**Постановка задачи.** Рассматривается осесимметричная задача для полого упругого цилиндра, заданного в цилиндрической системе координат соотношениями  $a_0 \leq r \leq a_1$ ,  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ,  $0 \leq z \leq h$ . Нижнее основание цилиндра  $z = 0$  защемлено, а к верхнему основанию  $z = h$  приложена осе-

симметричная нормальная нагрузка интенсивностью  $p(r)$ . Боковая поверхность  $r = a_0$  цилиндра находится в условиях скользящей заделки (гладкого контакта), а боковая поверхность  $r = a_1$  заземлена. В безразмерных координатах  $\rho = ra_1^{-1}$ ,  $\xi = zh^{-1}$  смещения  $u(\rho, \xi) = u_r(a_1\rho, h\xi)$ ,  $w(\rho, \xi) = u_z(a_1\rho, h\xi)$  должны удовлетворять осесимметричным уравнениям Ламе с объемными силами в виде собственного веса:

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} u \right] + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \xi} = 0,$$

$$\frac{2\alpha}{\alpha + 1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) + \alpha^2 \frac{2\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\gamma a_1^2 (\alpha - 1)}{G(\alpha + 1)}, \quad (1)$$

где  $\alpha = 3 - 4\mu$ ,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $G$  – модуль сдвига,  $\gamma$  – удельный вес материала цилиндра, а  $\alpha = a_1 h^{-1}$ .

Напряжения

$$\sigma_\rho(\rho, \xi) = \sigma_r(a_1\rho, h\xi), \quad \sigma_\xi(\rho, \xi) = \sigma_z(a_1\rho, h\xi), \quad \tau_{\rho\xi} = \tau_{rz}(a_1\rho, h\xi)$$

связаны со смещениями формулами

$$\begin{pmatrix} \sigma_\rho \\ \sigma_\xi \end{pmatrix} = \frac{4G\mu}{a_1(\alpha - 1)} \left[ \bar{\mu} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \rho} \\ \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} u \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u) \end{pmatrix} \right],$$

$$\tau_{\rho\xi} = \frac{G}{a_1} \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right),$$

где  $\bar{\mu} = (1 - \mu)\mu^{-1} = (\alpha + 1)(3 - \alpha)^{-1}$ .

Краевые условия на нижнем и верхнем основаниях цилиндра будут следующими:

$$u|_{\xi=0} = 0, \quad w|_{\xi=0} = 0, \quad (2)$$

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u) + \alpha \bar{\mu} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=1} = -\frac{a_1(\alpha - 1)}{4G\mu} P(\rho), \quad \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \Big|_{\xi=1} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $P(\rho) = p(a_1\rho)$ .

Краевые условия на боковых поверхностях цилиндра имеют вид

$$u|_{\rho=1} = 0, \quad w|_{\rho=1} = 0,$$

$$u|_{\rho=b} = 0, \quad \tau_{\rho\xi}|_{\rho=b} = 0. \quad (4)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = 0, \quad (5)$$

где

$$b = a_0 a_1^{-1} < 1.$$

**Сведение задачи к интегральному уравнению.** Для приведения поставленной задачи к одномерной воспользуемся следующим интегральным преобразованием Ханкеля:

$$u_k(\xi) = \int_b^1 u(\rho, \xi) X_1(\rho, \lambda_k) \rho d\rho, \quad u(\rho, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\xi) \frac{X_1(\rho, \lambda_k)}{\|X_1(\rho, \lambda_k)\|^2},$$

$$w_k(\xi) = \int_b^1 w(\rho, \xi) X_0(\rho, \lambda_k) \rho d\rho, \quad w(\rho, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(\xi) \frac{X_0(\rho, \lambda_k)}{\|X_0(\rho, \lambda_k)\|^2}, \quad (6)$$

где

$$X_1(\rho, \lambda_k) = J_1(\rho\lambda_k)N_0(\lambda_k) - N_1(\rho\lambda_k)J_0(\lambda_k),$$

$$X_0(\rho, \lambda_k) = J_0(\rho\lambda_k)N_0(\lambda_k) - N_0(\rho\lambda_k)J_0(\lambda_k),$$

$$\|X_1(\rho, \lambda_k)\|^2 = \|X_0(\rho, \lambda_k)\|^2 = \frac{2}{\pi^2} \frac{J_1^2(b\lambda_k) - J_0^2(\lambda_k)}{\lambda_k^2 J_1^2(b\lambda_k)},$$

$\lambda_k$  – положительные корни уравнения

$$J_1(b\lambda)N_0(\lambda) - N_1(b\lambda)J_0(\lambda) = 0. \quad (7)$$

Здесь  $J_m(z)$  и  $N_m(z)$  – функции Бесселя и Неймана соответственно.

Применив интегральное преобразование (6) к системе уравнения Ламе (1) и крайевым условиям (2) и (3) (краевые условия (4) и (5) будут при этом частично удовлетворены за счет способа определения собственных чисел как корней уравнения (7)), приходим к одномерной краевой задаче

$$u_k''(\xi) - \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \mu_k^2 u_k(\xi) - \frac{2\mu_k}{\alpha-1} w_k'(\xi) = -\frac{2h}{\pi\alpha^2 G \mu_k} \chi(\xi),$$

$$\frac{2\mu_k}{\alpha+1} u_k'(\xi) + w_k''(\xi) - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \mu_k^2 w_k(\xi) = \frac{2\gamma h^2 (\alpha-1)}{\pi\alpha^2 G (\alpha+1) \mu_k^2} \quad 0 < \xi < 1, \quad (8)$$

$$u_k(0) = 0, \quad w_k(0) = 0,$$

$$\mu_k u_k(1) + \bar{\mu} w_k'(1) = -\frac{h(\alpha-1)}{4G\bar{\mu}} P_k, \quad u_k'(1) - \mu_k w_k(1) = 0, \quad (9)$$

где  $\mu_k = \frac{1}{\alpha} \lambda_k$ ,  $P_k = \int_b^1 P(\rho) Y_0(\rho, \lambda_k) \rho d\rho$ , а  $\chi(\xi) = \sigma_\rho \Big|_{\rho=1} = \frac{G(\alpha+1)}{a_1(\alpha-1)} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1}$  –

неизвестная функция.

Общее решение однородной системы (8) найдем по схеме работы [8]. Запишем однородную систему, соответствующую системе (8), в векторном виде:

$$L[\mathbf{y}_k(\xi)] = \mathbf{I} \mathbf{y}_k''(\xi) + \mathbf{B} \mathbf{y}_k'(\xi) + \mathbf{C} \mathbf{y}_k(\xi) = 0, \quad (10)$$

где

$$\mathbf{y}_k(\xi) = \begin{pmatrix} u_k(\xi) \\ w_k(\xi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2\mu_k}{\alpha-1} \\ \frac{2\mu_k}{\alpha+1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \mu_k^2 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \mu_k^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для получения решения векторного уравнения (10) следует решить однородное матричное уравнение

$$L[\mathbf{Y}(\xi)] = 0, \quad 0 < \xi < 1,$$

где  $\mathbf{Y}(\xi)$  – матрица второго порядка. Решение матричного уравнения строим в виде  $\mathbf{Y}(\xi) = e^{\xi s} \mathbf{I}$ , где  $s$  – комплексный параметр. Учитывая, что  $L[e^{\xi s} \mathbf{I}] = \mathbf{M}(s) e^{\xi s}$ , где

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{I}s^2 + \mathbf{B}s + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} s^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\mu_k^2 & -\frac{2\mu_k}{\alpha-1} \\ \frac{2\mu_k}{\alpha+1} & s^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\mu_k^2 \end{pmatrix},$$

решением матричного уравнения будет матрица

$$\mathbf{Y}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \mathbf{M}^{-1}(s)e^{\xi s} ds,$$

где  $c$  – замкнутый контур, охватывающий полюсы обратной матрицы

$$\mathbf{M}^{-1}(s) = \frac{1}{(s^2 - \mu_k^2)^2} \begin{pmatrix} s^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\mu_k^2 & \frac{2\mu_k}{\alpha-1} \\ -\frac{2\mu_k}{\alpha+1} & s^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\mu_k^2 \end{pmatrix}.$$

Рассматривая замкнутые контуры  $c_{\pm}$ , охватывающие полюсы второго порядка  $s = \pm\mu_k$  соответственно, при помощи теоремы о вычетах получим два линейно независимых решения матричного уравнения:

$$\mathbf{Y}^+(\xi) = \frac{1}{2} e^{\mu_k \xi} \begin{pmatrix} \frac{\alpha + \mu_k \xi}{(\alpha + 1)\mu_k} & \frac{\xi}{\alpha - 1} \\ -\frac{\xi}{\alpha + 1} & \frac{\alpha - \mu_k \xi}{(\alpha - 1)\mu_k} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^-(\xi) = \frac{1}{2} e^{-\mu_k \xi} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha - \mu_k \xi}{(\alpha + 1)\mu_k} & -\frac{\xi}{\alpha - 1} \\ \frac{\xi}{\alpha + 1} & -\frac{\alpha + \mu_k \xi}{(\alpha - 1)\mu_k} \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородного векторного уравнения (10) будет определяться формулой

$$\mathbf{y}_k(\xi) = \begin{pmatrix} u_k(\xi) \\ v_k(\xi) \end{pmatrix} = \mathbf{Y}^+(\xi) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \mathbf{Y}^-(\xi) \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $C_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , – произвольные постоянные.

Для нахождения частного решения неоднородной системы (8) следует построить матрицу Грина, однако краевые условия (9) сильно затрудняют такие построения. Поэтому поступим следующим образом. Заменим краевые условия (9) на однородные краевые условия гладкого контакта на обоих основаниях цилиндра (выполнимость условий (9) обеспечим далее за счет выбора постоянных  $C_k$ ):

$$u'_k(0) = 0, \quad w_k(0) = 0, \quad u'_k(1) = 0, \quad w_k(1) = 0. \quad (12)$$

Запишем вспомогательную краевую задачу (8), (12) в векторном виде

$$L[\mathbf{y}_k(\xi)] = \mathbf{I} \cdot \mathbf{y}_k''(\xi) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}_k'(\xi) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{y}_k(\xi) = \mathbf{f}_k(\xi), \quad 0 < \xi < 1,$$

$$U_0[\mathbf{y}_k] = \mathbf{A}_0 \mathbf{y}_k(0) + \mathbf{B}_0 \mathbf{y}_k'(0) = 0,$$

$$U_1[\mathbf{y}_k] = \mathbf{A}_0 \mathbf{y}_k(1) + \mathbf{B}_0 \mathbf{y}_k'(1) = 0, \quad (13)$$

где  $\mathbf{y}_k(\xi)$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  – те же, что и в формуле (10), а

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_k(\xi) = \begin{pmatrix} f_k^{(1)}(\xi) \\ f_k^{(2)}(\xi) \end{pmatrix},$$

$$f_k^{(1)}(\xi) = -\frac{2h}{\pi\alpha^2 G\mu_k} \chi(\xi), \quad f_k^{(2)} = -\frac{2\gamma h^2(\alpha-1)}{\pi\alpha^2 G(\alpha+1)\mu_k^2}.$$

Для построения билинейного разложения матрицы Грина вспомогательной краевой задачи (13) введем матричное интегральное преобразование

$$\mathbf{y}_{kn} = \begin{pmatrix} u_{kn} \\ w_{kn} \end{pmatrix} = \int_0^1 \mathcal{H}(\xi, \alpha_n) \mathbf{y}_k(\xi) d\xi$$

с ядром

$$\mathcal{H}(\xi, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_n \xi & 0 \\ 0 & \sin \alpha_n \xi \end{pmatrix}, \quad \alpha_n = \pi n.$$

Применим это преобразование к краевой задаче (13) (при этом краевые условия (12) будут удовлетворены). Тогда получим

$$\mathbf{M}_0(\alpha_n) \cdot \mathbf{y}_{kn} = -\mathbf{f}_{kn},$$

где

$$\mathbf{M}_0(\alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_n^2 + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \mu_k^2 & \frac{2\alpha_n \mu_k}{\alpha-1} \\ \frac{2\alpha_n \mu_k}{\alpha+1} & \alpha_n^2 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \mu_k^2 \end{pmatrix}.$$

При  $n = 1, 2, \dots$  отсюда имеем  $\mathbf{y}_{kn} = -\mathbf{M}_0^{-1}(\alpha_n) \cdot \mathbf{f}_{kn}$ , где

$$\mathbf{M}_0^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{(\alpha_n^2 + \mu_k^2)^2} \begin{pmatrix} \alpha_n^2 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \mu_k^2 & -\frac{2\alpha_n \mu_k}{\alpha-1} \\ -\frac{2\alpha_n \mu_k}{\alpha+1} & \alpha_n^2 + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \mu_k^2 \end{pmatrix}.$$

При  $n = 0$  имеем

$$\mathbf{y}_{k0} = \begin{pmatrix} u_{k0} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \frac{1}{\mu_k^2} \mathbf{f}_{k0}, \quad \mathbf{f}_{k0} = \begin{pmatrix} f_{k0}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись теперь формулой обращения

$$\mathbf{y}_k(\xi) = \mathbf{y}_{k0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}(\xi, \alpha_n) \mathbf{y}_{kn},$$

запишем частное решение неоднородной системы:

$$\mathbf{y}_k(\xi) = \int_0^1 \mathbf{G}(\xi, t) \mathbf{f}_k(t) dt. \quad (14)$$

Здесь матрица Грина  $\mathbf{G}(\xi, t)$  имеет вид

$$\mathbf{G}(\xi, t) = -\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \frac{1}{\mu_k^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_n^2 + \mu_k^2)^2} \begin{pmatrix} G_{11}(\xi, t) & G_{12}(\xi, t) \\ G_{21}(\xi, t) & G_{22}(\xi, t) \end{pmatrix},$$

где

$$G_{11}(\xi, t) = \left( \alpha_n^2 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \mu_k^2 \right) \cos \alpha_n \xi \cos \alpha_n t,$$

$$G_{12}(\xi, t) = -\frac{2\alpha_n \mu_k}{\alpha-1} \cos \alpha_n \xi \sin \alpha_n t,$$

$$G_{21}(\xi, t) = -\frac{2\alpha_n \mu_k}{\alpha+1} \sin \alpha_n \xi \cos \alpha_n t,$$

$$G_{22}(\xi, t) = \left( \alpha_n^2 + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \mu_k^2 \right) \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n t.$$

Теперь решение краевой задачи (8), (9) можно записать в виде суммы решений (11) и (14). Входящие в нее постоянные  $C_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , определим из краевых условий (9). Таким образом, будут найдены трансформанты смещений. В силу громоздкости полученных формул приведем только одну из них

$$u_k(\xi) = \frac{hP_k}{G} \mathcal{A}_k(\xi) + \frac{1}{\alpha + 1} \int_0^1 \left[ \mathcal{A}_k(\xi) \Phi_k^{(1)}(t) + \mathcal{M}_k(\xi) \Phi_k^{(2)}(t) - \frac{1}{2} \Psi_k^{(1)}(\xi, t) \right] f_k^{(1)}(t) dt + \frac{f_k^{(2)}}{\alpha - 1} \operatorname{th} \frac{\mu_k}{2} \left[ \mathcal{A}_k(\xi) \left( \frac{\alpha + 3}{\mu_k} - \frac{2}{\operatorname{sh} \mu_k} \right) - \mathcal{M}_k(\xi) \left( \frac{1}{\mu_k^2} - \frac{1}{\mu_k \operatorname{sh} \mu_k} \right) \right] + \frac{f_k^{(2)}}{\alpha - 1} \mathcal{S}_k^{(1)}(\xi),$$

где

$$\mathcal{A}_k(\xi) = \Delta_k^{-1} \left[ (2\mu_k \operatorname{ch} \mu_k - (\alpha - 1) \operatorname{sh} \mu_k) \left( \xi \operatorname{ch} \mu_k \xi + \frac{\alpha}{\mu_k} \operatorname{sh} \mu_k \xi \right) - (2\mu_k \operatorname{sh} \mu_k + (\alpha + 1) \operatorname{ch} \mu_k) \xi \operatorname{sh} \mu_k \xi \right],$$

$$\Delta_k = \alpha^2 + 1 + 4\mu_k^2 + 2\alpha \operatorname{ch} 2\mu_k,$$

$$\mathcal{M}_k(\xi) = \Delta_k^{-1} \left[ 2\mu_k (\alpha + \operatorname{ch} 2\mu_k) \xi \operatorname{sh} \mu_k \xi - 2\mu_k (2\mu_k + \operatorname{sh} 2\mu_k) \xi \operatorname{ch} \mu_k \xi - 2\alpha (2\mu_k + \operatorname{sh} 2\mu_k) \operatorname{sh} \mu_k \xi + (4\mu_k^2 + \alpha^2 + 1 + 2\alpha \operatorname{ch} 2\mu_k) \operatorname{ch} \mu_k \xi \right],$$

$$\Phi_k^{(1)}(t) = \frac{1}{\operatorname{sh} \mu_k} \left[ (\alpha - 1) \operatorname{ch} \mu_k t + 2\mu_k t \operatorname{sh} \mu_k t - 2\mu_k \operatorname{cth} \mu_k \operatorname{ch} \mu_k t \right],$$

$$\Phi_k^{(2)}(t) = \frac{1}{\operatorname{sh} \mu_k} \left[ \frac{\alpha}{\mu_k} \operatorname{ch} \mu_k (1 - t) - t \operatorname{sh} \mu_k (1 - t) - \frac{\operatorname{ch} \mu_k t}{\operatorname{sh} \mu_k} \right],$$

$$\Psi_k^{(1)}(\xi, t) = \frac{1}{\operatorname{sh} \mu_k} \left[ \frac{\alpha}{\mu_k} (\operatorname{ch} \mu_k (1 - |\xi - t|) + \operatorname{ch} \mu_k (1 - \xi - t)) - |\xi - t| \operatorname{sh} \mu_k (1 - |\xi - t|) - (\xi + t) \operatorname{sh} \mu_k (1 - \xi - t) - \frac{\operatorname{ch} \mu_k (\xi - t) + \operatorname{ch} \mu_k (\xi + t)}{\operatorname{sh} \mu_k} \right],$$

$$\mathcal{S}_k^{(1)}(\xi) = \frac{1}{\mu_k^2 \operatorname{sh} \mu_k} \left[ \operatorname{ch} \mu_k (1 - \xi) - \operatorname{ch} \mu_k \xi + \mu_k \xi \operatorname{sh} \mu_k (1 - \xi) + \mu_k (1 + \xi) \operatorname{sh} \mu_k \xi + \mu_k \frac{\operatorname{ch} \mu_k \xi - \operatorname{ch} \mu_k (1 + \xi)}{\operatorname{sh} \mu_k} \right].$$

Далее следует воспользоваться формулами обращения (6). В выражения для найденных смещений входит неизвестная функция  $\chi(\xi)$ . Для её определения воспользуемся оставшимся первым из краевых условий (4) на боковой поверхности цилиндра  $\rho = 1$ :

$$u|_{\rho=1} = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k(\xi)}{1 - \bar{q}_k^2} = 0,$$

$$\text{где } \bar{q}_k = \frac{J_0(\lambda_k)}{J_1(b\lambda_k)}.$$

В результате приходим к интегральному уравнению I-го рода

$$\int_0^1 [R_1(\xi, t) + R_2(\xi, t)]\chi(t) dt = F^{(p)}(\xi) + F^{(\gamma)}(\xi), \quad 0 < \xi < 1, \quad (15)$$

где

$$R_1(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \bar{q}_k^2} [\mathcal{A}_k(\xi)\Phi_k^{(1)}(t) + \mathcal{M}_k(\xi)\Phi_k^{(2)}(t)],$$

$$R_2(\xi, t) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \bar{q}_k^2} \Psi_k^{(1)}(\xi, t),$$

$$F^{(p)}(\xi) = 2\pi\alpha^2(1 - \mu) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k P_k}{1 - \bar{q}_k^2} \mathcal{A}_k(\xi),$$

$$F^{(\gamma)}(\xi) = \gamma h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k(1 - \bar{q}_k^2)} \left\{ \operatorname{th} \frac{\mu_k}{2} \left[ \mathcal{A}_k(\xi) \left( \frac{\alpha + 3}{\mu_k} - \frac{2}{\operatorname{sh} \mu_k} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \mathcal{M}_k(\xi) \left( \frac{1}{\mu_k^2} - \frac{1}{\mu_k \operatorname{sh} \mu_k} \right) \right] + \mathcal{S}_k^{(1)}(\xi) \right\}.$$

Анализ ядер  $R_k(\xi, t)$  интегрального уравнения (15) показывает, что входящие в них ряды наряду с экспоненциально убывающими слагаемыми (при  $\mu_k \rightarrow \infty$ ) содержат слагаемые вида  $\frac{1}{\mu_k} e^{-\mu_k|\xi-t|}$  и  $\frac{1}{\mu_k} e^{-\mu_k(2-\xi-t)}$ , откуда следует, что они имеют логарифмические особенности при  $\zeta = t$  и  $\zeta = t = 1$ . Правая часть  $F^{(\gamma)}(\xi)$  представляет из себя сходящийся при  $\xi \in [0, 1]$  ряд, а ряд для  $F^{(p)}(\xi)$  сходится, если трансформанта внешней нагрузки  $P_k = O(\mu_k^{-1-\varepsilon})$ , где  $\varepsilon > 0$ .

**Решение интегрального уравнения.** Найдем характер особенностей искомой функции  $\chi(\xi)$  в интегральном уравнении (15) на концах промежутка  $[0, 1]$ , учитывая, что  $\chi(\xi)$  – нормальное напряжение  $\sigma_\rho$  на заземленной цилиндрической поверхности  $\rho = 1$ . Пренебрегая кривизной цилиндра, можно интерпретировать данную задачу, как задачу для клина с углом при вершине  $\pi/2$ , на гранях которого заданы краевые условия разных видов. При  $\xi = 1$  имеем ситуацию «заземление/загруженный край». Тогда согласно [12] напряжение имеет степенную особенность порядка  $\beta = -0.205$  при  $\mu = 1/4$  и  $\beta = -0.310$  при  $\mu = 1/3$ . При  $\xi = 0$  имеем ситуацию «заземление/заземление» и, как показано в той же работе [12], напряжение в этом случае особенности не имеет.

Выявленный характер особенности у неизвестной функции  $\chi(\xi)$  требует искать решение интегрального уравнения (15) в виде ряда по многочленам Якоби

$$\chi(\xi) = (1 - \xi)^\beta \sum_{m=0}^{\infty} \chi_m P_m^{(0, \beta)}(1 - 2\xi),$$

где  $\chi_m$  – неизвестные пока коэффициенты.

Подставим это представление в интегральное уравнение (15) и проведем ортогонализацию полученного выражения по системе многочленов

$\{P_s^{(0,\beta)}(1-2\xi)\}$ . Для этого умножим обе части (15) на  $P_s^{(0,\beta)}(1-2\xi)$  и проинтегрируем по  $\xi$  от 0 до 1. В результате приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений I-го рода

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\mathcal{A}_{sm}^{(1)} + \mathcal{A}_{sm}^{(2)}) \chi_m = F_s^{(p)} + F_s^{(\gamma)}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

где

$$\mathcal{A}_{sm}^{(i)} = \int_0^1 P_s^{(0,\beta)}(1-2\xi) d\xi \int_0^1 R_i(\xi, t) (1-t)^\beta P_m^{(0,\beta)}(1-2t) dt, \quad i = 1, 2,$$

$$F_s^{(p)} = \int_0^1 F^{(p)}(\xi) P_s^{(0,\beta)}(1-2\xi) d\xi, \quad F_s^{(\gamma)} = \int_0^1 F^{(\gamma)}(\xi) P_s^{(0,\beta)}(1-2\xi) d\xi.$$

Остановимся на вычислении коэффициентов и правых частей системы (16). Так как в ядре  $R_1(\xi, t)$  переменные  $\zeta$  и  $t$  разделены, то при вычислении  $\mathcal{A}_{sm}^{(1)}$ ,  $F_s^{(p)}$  и  $F_s^{(\gamma)}$  возникнут интегралы следующего вида ( $x = 1 - 2\xi$ ):

$$\mathcal{J}_p^{(i)}(p, s) = \int_{-1}^1 (1+x)^i e^{-p(1+x)} P_s^{(0,\beta)}(x) dx,$$

$$\mathcal{J}_m^{(i)}(p, s) = \int_{-1}^1 (1-x)^i e^{-p(1-x)} P_s^{(0,\beta)}(x) dx, \quad i = 0, 1.$$

Эти интегралы можно вычислить в явном виде следующим образом. При помощи формул 10.8.16 из [2] представим  $P_s^{(0,\beta)}(x)$  в виде многочленов от  $1+x$  и  $1-x$  соответственно. Далее, интегрируя по частям, получим, что

$$\mathcal{J}_m^{(0)}(p, s) = \sum_{j=0}^s \frac{(-s)_j (s+\beta+1)_j}{(j!)^2} f_j(p),$$

$$\mathcal{J}_m^{(1)}(p, s) = 2 \sum_{j=0}^s \frac{(-s)_j (s+\beta+1)_j}{(j!)^2} f_{j+1}(p),$$

$$\mathcal{J}_p^{(0)}(p, s) = (-1)^s \frac{(\beta+1)_s}{s!} \sum_{j=0}^s \frac{(-s)_j (s+\beta+1)_j}{j!(\beta+1)_j} f_j(p),$$

$$\mathcal{J}_p^{(1)}(p, s) = 2(-1)^s \frac{(\beta+1)_s}{s!} \sum_{j=0}^s \frac{(-s)_j (s+\beta+1)_j}{j!(\beta+1)_j} f_{j+1}(p),$$

где

$$f_0(p) = \frac{1}{p} (1 - e^{-2p}),$$

$$f_j(p) = \frac{1}{p} \left[ \frac{j!}{(2p)^j} - e^{-2p} \left( 1 + \sum_{i=1}^j \frac{j(j-1)\dots(j-i+1)}{(2p)^i} \right) \right], \quad j = 1, 2, \dots$$

Интегралы по  $t$  в  $\mathcal{A}_{sm}^{(1)}$  и двойной интеграл в  $\mathcal{A}_{sm}^{(2)}$  вычислялись численно по формуле Гаусса. Корни  $\lambda_k$  уравнения (7) найдены при помощи пакета MatLab ( $k = 1, \dots, 6$ ) и асимптотической формулы [11] при  $k \geq 7$ :

$$\lambda_k \sim \frac{\pi(2k-1)}{2(1-b)} + \frac{b+3}{4\pi b(2k-1)} - \frac{(25b^3+63)(1-b)^2+6b(1-b)(b+3)^2}{48\pi^3 b^3 (2k-1)^3}.$$



Вычисления проведены для стального цилиндра с такими механическими и геометрическими параметрами:  $\mu = 0.25$ ,  $E = 210$  ГПа,  $\gamma = 7.65 \cdot 10^4$  Н/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1$  м,  $a_1 = 2$  м,  $P^* = 10^6$  Н/м<sup>3</sup>) для равномерно распределенной внешней нагрузки  $P(\rho) = P^* = \text{const}$ , для которой  $P_k = \frac{2P^*}{\pi \alpha_k^2}$ .

На рис. 1 приведены зависимости напряжений  $\sigma = \frac{1}{P^*} \sigma_\rho \Big|_{\rho=1}$  от координаты  $\xi = z/h$  для  $h = 4$  м и  $h = 8$  м. Сплошная линия соответствует случаю без учета веса, штриховая – с учетом веса.

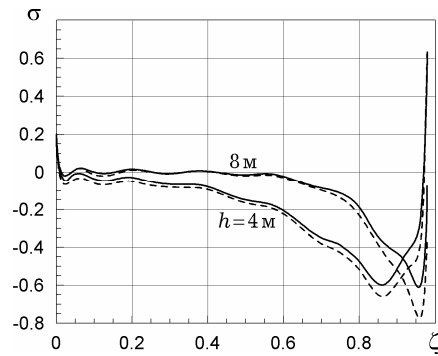


Рис. 1

Из рисунка видно, что на заземленной цилиндрической поверхности  $\rho = 1$  при приближении к точке  $\xi = 1$  напряжения становятся положительными и неограниченно возрастают.

**Выводы.** Предложенный метод позволяет получить эффективное приближенное решение для полого цилиндра в случае, когда внешняя цилиндрическая поверхность заземлена, а внутренняя находится в условиях гладкого контакта.

Влияние собственного веса цилиндра существенно сказывается на напряженном состоянии в нем в случае условий гладкого контакта на боковых поверхностях, в то время как оно незначительно для случая заземления.

1. Абрамян Б. Л., Александров А. Я. Осесимметричная задача теории упругости // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. – Москва: Наука, 1966. – Вып. 3. – С. 7–37.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1974. – 296 с.  
То же: *Bateman H., Erdélyi A. Higher transcendental functions. – Vol. 2: Bessel functions, parabolic cylinder functions, and orthogonal polynomials. – New York: McGraw-Hill, 1953. – 396 p.*
3. Валов Г. М. Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины // Прикл. математика и механика. – 1962. – 26, № 4. – С. 650–667.
4. Вігак В. М., Токовий Ю. В. Точний розв'язок осесимметричної задачі пружності в напруженнях для суцільного циліндра певної довжини // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 55–60.
5. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Применение дискретных рядов Фурье к решению задач о напряженном состоянии полых цилиндров с некруговым поперечным сечением // Прикл. механика. – 2014. – 50, № 2. – С. 3–26.  
То же: *Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Applying discrete Fourier series to solve problems of the stress state of hollow noncircular cylinders // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, No. 2. – P. 105–127.*

6. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – Москва: Высш. шк., 1975. – 526 с.
7. Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М. Квасістатичні температурні напруження в багат шаровому термочутливому циліндрі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 4. – С. 7–16.  
То же: *Kushnir R. M., Protsyuk B. V., Synyuta V. M.* Quasistatic temperature stresses in a multilayer thermally sensitive cylinder // *Mater. Sci.* – 2004. – **40**, No. 4. – P. 433–445.
8. Попов Г. Я. О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и их применении к краевым задачам механики // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 12. – С. 46–73.  
То же: *Popov G. Ya.* New transforms for the resolving equations in elastic theory and new integral transforms, with applications to boundary-value problems of mechanics // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, No. 12. – P. 1400–1424.
9. Попов Г. Я. Осесимметричные краевые задачи теории упругости для цилиндров и конусов конечной длины // Докл. РАН. – 2011. – **439**, № 2. – С. 192–197.
10. Попов Г. Я., Процеров Ю. С. Осесимметричная задача для упругого цилиндра конечной длины с заземленной боковой поверхностью при учете собственного веса // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 1. – С. 57–68.  
То же: *Popov G. Ya., Protserov Yu. S.* Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weight // *J. Math. Sci.* – 2016. – **212**, No. 1. – P. 67–82.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.  
То же: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables* / Eds M. Abramowitz, I. A. Stegun. – New York: Dover Publ., 1972. – 1046 p.
12. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.  
То же: *Uflyand Ya. S.* Survey of articles on the application of integral transforms in the theory of elasticity. – Raleigh: North Carolina State Univ., 1965. – 402 p.
13. Chau K. T., Wei X. X. Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part I. Analytic solution // *Int. J. Solids Struct.* – 2000. – **37**, No. 40. – P. 5707–5732.
14. Conte S. D., Miller K. Z., Sensenig C. B. The numerical solution of axisymmetric problems in elasticity // In: *Ballistic missile and space technology.* – New York–London: Acad. Press, 1960. – No. 4. – P. 173–202.
15. Jiaxi Zhou, Zichen Deng, Xiuhui Hou. Transient thermal response in thick orthotropic hollow cylinders with finite length: High order shell theory // *Acta Mech. Solida Sinica.* – 2010. – **23**, No. 2. – P. 156–166.
16. Meleshko V. V. Equilibrium of an elastic finite cylinder: Filon's problem revisited // *J. Eng. Math.* – 2003. – **46**, No. 3-4. – P. 355–376.
17. Radu V., Taylor N., Paffumi E. Development of new analytical solutions for elastic thermal stress components in a hollow cylinder under sinusoidal transient thermal loading // *Int. J. Pres. Ves. Pip.* – 2008. – **85**, No. 12. – P. 885–893.
18. Shao S. Z. Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length // *Int. J. Pres. Ves. Pip.* – 2005. – **82**, No. 3. – P. 155–163.
19. Sierakowski R. L., Sun C. T. An exact solution to the elastic deformation of a finite length hollow cylinder // *J. Frankl. Inst.* – 1968. – **286**, No. 2. – P. 99–113.
20. Tarn J.-Q., Tseng W.-D., Chang H.-H. A circular elastic cylinder under its own weight // *Int. J. Solids Struct.* – 2009. – **46**, No. 14-15. – P. 2886–2896.
21. Tokovyy Yu. V., Chieng-Ching Ma. Analysis of residual stresses in a long hollow cylinder // *Int. J. Pres. Ves. Pip.* – 2011. – **88**, No. 5-7. – P. 248–255.
22. Wei X. X., Chau K. T. Three dimensional analytical solution for finite circular cylinders subjected to indirect tensile test // *Int. J. Solids Struct.* – 2013. – **50**, No. 14-15. – P. 2395–2406.
23. Ying J., Wang H. M. Axisymmetric thermoelastic analysis in a finite hollow cylinder due to nonuniform thermal shock // *Int. J. Pres. Ves. Pip.* – 2010. – **87**, No. 12. – P. 714–720.

## ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ З УРАХУВАННЯМ ВЛАСНОЇ ВАГИ

Розглядається порожнистий пружний циліндр скінченної довжини під дією власної ваги та осесиметричного нормального навантаження, прикладеного до верхньої основи. Нижня основа циліндра нерухомо зацемлена. Внутрішня циліндрична поверхня перебуває в умовах ковзного закріплення, а зовнішня нерухомо зацемлена. Задача зведена до інтегрального рівняння I-го роду стосовно нормального напруження на зацемленій бічній поверхні. Встановлено характер особливості шуканої функції і запропоновано ефективний алгоритм розв'язання отриманого рівняння з використанням розвинення шуканої функції у ряд за поліномами Якобі. Наведено результати обчислень нормального напруження на бічних поверхнях циліндра, які свідчать, що у випадку зацемлення вплив власної ваги циліндра є значно меншим, ніж у випадку ковзного закріплення.

## AXISYMMETRIC ELASTICITY PROBLEM FOR A HOLLOW CYLINDER OF FINITE LENGTH WITH REGARD FOR ITS WEIGHT

*A hollow elastic finite cylinder under its weight is considered. To the upper base of cylinder the axisymmetric normal load is applied, and its lower base is fixed. The internal cylindrical surface is under the conditions of the sliding fixing, and the external surface is immovably fixed. The problem is reduced to the integral singular equation of first kind with respect to the unknown normal stress on the fixed lateral surface. The character of singularity of the unknown function are established and the effective algorithm for solving the obtained equation is proposed. This algorithm is based on the expansion of the unknown function in the form of a series in Jacobi polynomials. The presented results of calculation of normal stress on the lateral surfaces of cylinder evidence that, in the case of the fixed lateral surface, the effect of the weight of the cylinder is much smaller than in the case of the conditions of sliding fixing.*

Одесс. нац. ун-т им. И. И. Мечникова, Одесса

Получено  
15.06.15