УДК 539.3

І. М. Махоркін, Л. В. Мастикаш

ПРО ОДИН АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОВИМІРНОЇ КВАЗІСТАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТЕРМОЧУТЛИВОГО ТІЛА ПРОСТОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Запропоновано методику аналітично-числового розв'язання одновимірних задач термопружності тіл простої геометрії, яка ґрунтується на поданні температурних залежностей фізико-механічних характеристик матеріалів у вигляді кусково-сталих функцій від температури, використанні заміни Кірхгофа та апарату узагальнених функцій. Цей спосіб дає змогу досліджувати з контрольованою достовірністю одновимірні нестаціонарні теплові та квазістатичні напружено-деформовані стани за комбінованої термосилової дії.

Вступ. Залежність фізико-механічних характеристик (ФМХ) матеріалів від температури є одним з основних факторів, які зумовлюють значний вплив на термомеханічну поведінку елементів конструкцій. Ґрунтовний аналіз стану наукових досліджень у цьому напрямі наведено в роботах [4, 9]. Згідно з цим аналізом комплексне врахування факторів (зокрема, геометрії тіла та термочутливості його матеріалу, нелінійності зовнішньої теплової дії), що, як правило, впливають на формування і поведінку теплового та напружено-деформованого станів, призводить до складної математичної задачі, розв'язання якої навіть чисельними методами пов'язане зі значними труднощами і потребує спеціально розроблених алгоритмів [8]. Інженерна ж практика віддає перевагу простим аналітично-числовим співвідношенням, які з прогнозованою достовірністю надають можливість досліджувати тепловий і зумовлений ним напружено-деформований стани.

Метою цієї роботи є розробка з використанням узагальнених (імпульсних) функцій прозорої методики побудови аналітично-числових розв'язків крайових задач теплопровідності та відповідних задач термопружності тіл простої геометрії, що перебувають в умовах комбінованого термосилового навантаження за врахування температурної залежності усього спектру зміни ФМХ матеріалів.

Постановка задачі. Розглянемо пружне ізотропне термочутливе тіло з простою тепловою нелінійністю (ФМХ матеріалу, за винятком коефіцієнта температуропровідності $a = \lambda_t / c_v \approx \text{const}$, залежать від температури), віднесене до однієї з класичних ортогональних систем координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$: циліндричної ($\alpha_1 = r$, $\alpha_2 = \varphi$, $\alpha_3 = z$), сферичної ($\alpha_1 = r$, $\alpha_2 = \varphi$, $\alpha_3 = \theta$) або декартової ($\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, $\alpha_3 = z$). Граничні поверхні тіла співпадають з координатними $\alpha_i = \alpha_{ij} = \text{const}$, $i, j = 1, 2$ (тіло простої геометрії). Початкова температура поверхні тіла t_p, масові сили відсутні. Припускаємо також, що тепловий стан і переміщення точок тіла під час його деформації характеризується одновимірним температурним полем $t(\alpha_1, \tau)$ та одновимірним вектором $\bar{u}(\alpha_1, \tau) = u_1(\alpha_1, \tau)\bar{e}_1$ ($u_1(\alpha_1, \tau)$, $u_2 = u_3 = 0$ – проекції вектора переміщень на напрями, дотичні до координатних ліній α_1, α_2 α_3).

У межах нелінійної теорії теплопровідності та квазістатичної лінійної теорії термопружності тепловий і напружено-деформований стани неоднорідного тіла описуються рівняннями та співвідношеннями [1] у припущенні, що ФМХ матеріалу є функціями від температури точок тіла.

Процедура визначення теплового стану. Використання інтегральної заміни Кірхгофа

$$\vartheta = \int\limits_{t_{\text{p}}}^{t} \lambda_t(\xi)\,d\xi \tag{1}$$

зводить задачу визначення теплового стану до відшукання розподілу температурного поля з інтегрального співвідношення (1) за розв'язком

– *лінійної крайової задачі* на змінну Кірхгофа ϑ:

$$r^{-k_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(r^{k_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{1}{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} - w_t\,, \tag{2}$$

$$\vartheta\big|_{\alpha_1=\alpha_{1j}} = \int\limits_{t_{\text{p}}}^{t(\alpha_{1j},\tau)} \lambda_t(\xi)\,d\xi \qquad \text{або} \qquad \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n_j}\right)\bigg|_{\alpha_1=\alpha_{1j}} = -\,q(\alpha_1,\tau)\big|_{\alpha_1=\alpha_{1j}}$$

у випадку умов теплообміну першого та другого роду;

– *частково лінійної крайової задачі* для лінійного рівняння (2) за нелінійної граничної умови теплообміну третього роду (конвективного теплообміну):

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n_j}\right)\bigg|_{\alpha_1=\alpha_{1j}} = -\left[\frac{æ(t(\vartheta))}{\lambda_t(t(\vartheta))} (\vartheta - \vartheta_{\text{c}}) \right]\bigg|_{\alpha_1=\alpha_{1j}} \tag{3}$$

за початкової умови $\vartheta\big|_{\tau=0} = 0$.

Тут $\lambda_t(t)$, $c_{\text{v}}(t)$, $æ(t)$ – коефіцієнти теплопровідності, об'ємної теплоємності та теплообміну, відповідно; w_t – густина потужності внутрішніх джерел-стоків тепла; $\bar{n}_j$ – зовнішня нормаль до поверхні, а $\{k_1, \alpha_1\} :=$ $:= \{0, x;\, 1, r;\, 2, r\}$ відповідно для декартової, циліндричної і сферичної систем координат.

Подавши температурні залежності ФМХ і їх комбінацій в інтервалі температур їх визначення $[t_{\text{p}},\, t_{\text{k}}]$ у вигляді

$$p(t) \approx p_1 + \sum_{i=1}^{n} (p_{i+1} - p_i) S_+(t - t_i), \qquad t_1 < t_2 < \ldots < t_n\,, \tag{4}$$

відповідно до (1) отримуємо, що

$$\vartheta(t) = \lambda_t^{(1)} t + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_t^{(i+1)} - \lambda_t^{(i)})(t - t_i) S_+(t - t_i) - \vartheta_{\text{p}}\,.$$

Оскільки між ϑ і t згідно з (1) існує взаємно однозначна відповідність, то $S_+(t - t_i) = S_+(\vartheta - \vartheta_i)$, і

$$t(\vartheta) = \left[\frac{1}{\lambda_t^{(1)}} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_t^{(i+1)}} - \frac{1}{\lambda_t^{(i)}} \right) S_+(\vartheta - \vartheta_i) \right] [\vartheta + \vartheta_{\text{p}}] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_t^{(i+1)} - \lambda_t^{(i)}}{\lambda_t^{(i)}} \left[t_i - \sum_{j=1}^{i} \frac{\lambda_t^{(j+1)} - \lambda_t^{(j)}}{\lambda_t^{(i+1)}} t_j \right] S_+(\vartheta - \vartheta_i)\,. \tag{5}$$

Тут $S_+(\zeta) = \{1, \zeta > 0;\, 0, \zeta \le 0\}$ – асиметрична одинична функція Гевісайда, $p_i = \text{const}$ в інтервалі температур $t_{i-1} \le t < t_i$ із заданою точністю відповідають фактичному значенню відповідної ФМХ, а

$$\vartheta_{\text{p}} = \lambda_t^{(1)} t_{\text{p}} + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_t^{(j+1)} - \lambda_t^{(j)})(t_{\text{p}} - t_j) S_+(t_{\text{p}} - t_j)\,,$$

$$\vartheta_i = \vartheta(t_i) = \lambda_t^{(1)} t_i + \sum_{j=1}^{i-1} (\lambda_t^{(j+1)} - \lambda_t^{(j)})(t_i - t_j) - \vartheta_{\text{p}}\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

Використання властивості одиничної функції Гевісайда $S_+(f(\zeta)-f_*)$ від складного аргументу [3]:

$$S_+(f(\zeta)-f_*) = S_+\left[\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)\Bigg|_{\zeta_*^{(1)}}(\zeta-\zeta_*^{(1)})\right] + \sum_{k=2}^{n_*}\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)\Bigg|_{\zeta_*^{(k)}} S_+(\zeta-\zeta_*^{(k)}),$$

надає можливість лінеаризувати крайову умову (3). (Тут $\zeta_*^{(1)} < \zeta_*^{(2)} < \ldots < \zeta_*^{(n_*)}$ − прості корені рівняння $f(\zeta)-f_* = 0$.) Подамо цю умову у вигляді

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1}\cos\left(\widehat{\vec{n}_j\ \vec{e}_1}\right)\right)\Bigg|_{\alpha_1=\alpha_{1j}} =$$

$$= -\left[\left\{\frac{æ_1}{\lambda_t^{(1)}} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{æ_{i+1}}{\lambda_t^{(i+1)}} - \frac{æ_i}{\lambda_t^{(i)}}\right)\left[S_+\left[\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\right)\Bigg|_{\tau_{i,j}^{(1)}}(\tau-\tau_{i,j}^{(1)})\right] + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sum_{k=2}^{n_{i,j}}\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\right)\Bigg|_{\tau_{i,j}^{(k)}} S_+(\tau-\tau_i^{(k)})\right]\right\}(\vartheta-\vartheta_c)\right]\Bigg|_{\alpha_1=\alpha_{1j}},$$

де $\tau_{i,j}^{(1)} < \tau_{i,j}^{(2)} < \ldots < \tau_{i,j}^{(n_{i,j})}$ − прості корені рівняння $\vartheta_{1j}(\tau)-\vartheta_i = 0$.

Таким чином, з використанням подання ФМХ у вигляді (4) задачу теплопровідності зведено до визначення температурного поля згідно з формулами (5) за розв’язками відповідних лінеаризованих крайових задач для змінної Кірхгофа ϑ. Методи розв’язування задач такого типу в класичних координатах досить ґрунтовно висвітлено в літературі, зокрема в монографіях [2, 5].

Процедура визначення напружено-деформованого стану. Для визначення напружено-деформованого стану, зумовленого термосиловим навантаженням, скористаємось рівнянням рівноваги, яке, враховуючи співвідношення Дюгамеля − Неймана та Коші, подання ФМХ у вигляді (4) і взаємно однозначну відповідність між t та ϑ згідно з алгеброю узагальнених функцій [7], подамо у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left[\alpha_1^{-k_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\alpha_1^{k_1}u_1)\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{f}_i\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \tilde{\lambda}_i\frac{k_1 u_1}{\alpha_1^{k_2}} - \tilde{\beta}_i\tilde{\Phi}_i\right]\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1}\delta_+(\vartheta-\vartheta_i) =$$

$$= \left[\beta_1^* + \sum_{i=1}^{n}(\beta_{i+1}^* - \beta_i^*)S_+(\vartheta-\vartheta_i)\right]\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1}, \tag{6}$$

де

$$\tilde{\Phi}_i = \frac{\alpha_t^{(1)}}{\lambda_t^{(1)}}\vartheta_i + \sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{\alpha_t^{(j+1)}}{\lambda_t^{(j+1)}} - \frac{\alpha_t^{(j)}}{\lambda_t^{(j)}}\right)(\vartheta_i-\vartheta_j) - \Phi_{\text{p}},$$

$$(f_i,\lambda_i,\beta_i) \sim p_i, \qquad (\tilde{f}_i,\tilde{\lambda}_i,\tilde{\beta}_i) \sim \frac{p_{i+1}-p_i}{f_{i+1}}, \qquad \beta_i^* = \frac{\beta_i\alpha_t^{(i)}}{f_i\lambda_t^{(i)}},$$

$$\Phi_{\text{p}} = \frac{\alpha_t^{(1)}}{\lambda_t^{(1)}}\vartheta_{\text{p}} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha_t^{(j+1)}}{\lambda_t^{(j+1)}} - \frac{\alpha_t^{(j)}}{\lambda_t^{(j)}}\right)(\vartheta_{\text{p}}-\vartheta_j)S_+(\vartheta_{\text{p}}-\vartheta_j), \quad f(t) = \lambda(t) + 2\mu(t),$$

$$\beta(t) = 2\mu(t) + 3\lambda(t), \quad \mu(t) = \frac{E(t)}{2[1+\nu(t)]}, \quad \lambda(t) = \frac{E(t)\nu(t)}{[1+\nu(t)][1-2\nu(t)]},$$

$E(t)$, $\nu(t)$, $\alpha_t(t)$ − температурні залежності модуля Юнга, коефіцієнтів Пуассона та лінійного теплового розширення відповідно, подані у вигляді (4), а $k_1 = k_2 = 0$, $\alpha_1 = x$ у випадку декартової, $k_1 = k_2 = 1$, $\alpha_1 = r$ − циліндричної, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $\alpha_1 = r$ − сферичної систем координат.

Оскільки час $\tau \in (0,\infty)$ у рівнянні (6) можна розглядати як параметр, то, використовуючи властивість δ-функції Дірака від складного аргументу [3]:

$$\delta_+[\vartheta(\alpha_1,\tau_0)-\vartheta_i] = \left|\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\right|^{-1}_{\alpha_i^{(1)}} \delta_+\left[\operatorname{sgn}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\bigg|_{\alpha_i^{(1)}}(\alpha_1-\alpha_i^{(1)})\right]+$$

$$+\sum_{j=2}^{n_i}\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\right|^{-1}_{\alpha_i^{(j)}}\delta_+(\alpha_1-\alpha_i^{(j)}),$$

знаходження розв'язку рівняння (6) у кожний фіксований момент часу $\tau_0 \in (0,\infty)$ зводимо до побудови розв'язку частково виродженого рівняння

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\alpha_1^{-k_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\alpha_1^{k_1}u_1)\right]+\sum_{i=q_\tau+1}^{q_\tau+m_\tau}\left\{\left[\sigma^{(i)}\operatorname{sgn}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\right]\bigg|_{\alpha_i^{(1)}}\times\right.$$

$$\times\delta_+\left[\operatorname{sgn}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\bigg|_{\alpha_i^{(1)}}(\alpha_1-\alpha_i^{(1)})\right]+$$

$$\left.+\sum_{j=2}^{n_i}\left[\sigma^{(i)}\operatorname{sgn}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\right]\bigg|_{\alpha_i^{(j)}}\delta_+(\alpha_1-\alpha_i^{(j)})\right\}=$$

$$=\left[\beta^*_{q_\tau}+\sum_{i=q_\tau+1}^{q_\tau+m_\tau}(\beta^*_{i+1}-\beta^*_i)\left\{S_+\left[\operatorname{sgn}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\bigg|_{\alpha_i^{(1)}}(\alpha_1-\alpha_i^{(1)})\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=2}^{n_i}\operatorname{sgn}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\bigg|_{\alpha_i^{(j)}}S_+(\alpha_1-\alpha_i^{(j)})\right\}\right]\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}. \tag{7}$$

Тут

$$\sigma^{(i)}=\tilde f_i\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+\tilde\lambda_i\frac{k_1u_1}{\alpha_1^{k_2}}-\tilde\beta_i\tilde\Phi_i,$$

значення величин q_τ та m_τ визначаються співвідношеннями

$$\vartheta_1<\vartheta_2<\ldots<\vartheta_{q_\tau}\le\min\vartheta<\vartheta_{q_\tau+1}<\ldots<\vartheta_{q_\tau+m_\tau}<$$

$$<\max\vartheta<\vartheta_{q_\tau+m_\tau+1}<\ldots<\vartheta_n,$$

$\alpha_i^{(1)}<\alpha_i^{(2)}<\ldots<\alpha_i^{(n_i)}$ – прості корені рівняння

$$\vartheta(\alpha_1,\tau_0)-\vartheta_i=0,\qquad i=q_\tau+1,\ldots,q_\tau+m_\tau.$$

Загальний інтеграл рівняння (7) має вигляд

$$u_1=\frac{A\alpha_1}{k_1+1}-\frac{\alpha_1^{-k_1}}{k_1+1}\sum_{i=q_\tau+1}^{q_\tau+m_\tau}\left\{\sigma_i^{(1)}(\alpha_1^{k_1+1}-\alpha_i^{(1)k_1+1})S_+\left[\operatorname{sgn}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\bigg|_{\alpha_i^{(1)}}(\alpha_1-\alpha_i^{(1)})\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=2}^{n_i}\operatorname{sgn}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\bigg|_{\alpha_i^{(j)}}\sigma_i^{(j)}(\alpha_1^{k_1+1}-\alpha_i^{(j)k_1+1})S_+(\alpha_1-\alpha_i^{(j)})\right\}+$$

$$+\alpha_1^{-k_1}(\Phi^{**}+B),$$

де

$$\Phi^{**}(\alpha_1)=\int_{\alpha_{11}}^{\alpha_1}\xi^{k_1}\Phi^*\,d\xi,\quad \Phi^*(\alpha_1)=\int_{\alpha_{11}}^{\alpha_1}\frac{\beta\alpha_t}{f\lambda_t}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\,d\alpha,\quad \sigma_\ell^{(q)}=(\sigma^{(\ell)})_{\alpha_\ell^{(q)}}.$$

Вирази для визначення напружень отримуємо згідно із співвідношеннями Дюгамеля – Неймана, зокрема, формулу для визначення нормальних напружень подамо так:

$$\sigma_1 = \left(f + \lambda k_1 \alpha_1^{1-k_2}\right)\frac{A}{k_1+1} + f\Phi^*(\alpha_1) + \left[\lambda\alpha_1^{1-k_2} - f\right]\frac{k_1\left(\Phi^{**}(\alpha_1)+B\right)}{\alpha_1^{k_1+1}} -$$

$$-\frac{1}{(k_1+1)\alpha_1^{k_1}}\sum_{i=q_\tau+1}^{q_\tau+m_\tau}\Big\langle(\alpha_1^{k_1}z_1(\alpha_1) + \alpha_i^{(1)k_1+1}z_2(\alpha_1))\sigma_i^{(1)} \times$$

$$\times S_+\left[\operatorname{sgn}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\bigg|_{\alpha_i^{(1)}}(\alpha_1 - \alpha_i^{(1)})\right] +$$

$$+\sum_{j=2}^{n_i}(\alpha_1^{k_1}z_1(\alpha_1) + \alpha_i^{(j)k_1+1}z_2(\alpha_1))\sigma_i^{(j)} \times$$

$$\times \operatorname{sgn}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\bigg|_{\alpha_i^{(j)}} S_+(\alpha_1 - \alpha_i^{(j)})\Big\rangle - \beta\Phi,$$

де

$$z_1(\alpha_1) = f + \lambda k_1\alpha_1^{1-k_2}, \qquad z_2(\alpha_1) = fk_1\alpha_1^{-1} - \lambda k_1\alpha_1^{-k_2},$$

$$\{f,\lambda,\beta\} \sim p_1 + \sum_{i=1}^{n}(p_{i+1} - p_i)S_+(\vartheta - \vartheta_i), \quad \Phi = \int_{\vartheta_{\text{p}}}^{\vartheta}\frac{\alpha_t}{\lambda_t}d\vartheta,$$

Φ − сумарна чисто теплова деформація.

Значення величин $\sigma_i^{(j)}$ та сталих інтегрування A, B визначаємо як розв'язок системи алгебраїчних рівнянь

$$\sigma_\ell^{(q)} = (\sigma^{(\ell)})_{\alpha_\ell^{(q)}} = \left(\tilde f_\ell + \frac{k_1\tilde\lambda_\ell}{\alpha_\ell^{(q)k_2-1}}\right)\frac{A}{k_1+1} + \frac{\Phi^{**}(\alpha_\ell^{(q)})+B}{\alpha_\ell^{(q)k_1+1}}\left(\frac{k_1\tilde\lambda_\ell}{\alpha_\ell^{(q)k_2-1}} - k_1\tilde f_\ell\right) +$$

$$+\tilde f_\ell\Phi^*(\alpha_\ell^{(q)}) - \frac{1}{\alpha_\ell^{(q)k_1}(k_1+1)} \times$$

$$\times\sum_{i=q_\tau+1}^{q_\tau+m_\tau}\Big\langle(\alpha_\ell^{(q)k_1}\tilde z_1^{(\ell)}(\alpha_\ell^{(q)}) + \alpha_i^{(1)k_1+1}\tilde z_2^{(\ell)}(\alpha_\ell^{(q)}))\sigma_i^{(1)} \times$$

$$\times S_+\left[\operatorname{sgn}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\bigg|_{\alpha_i^{(1)}}(\alpha_\ell^{(q)} - \alpha_i^{(1)})\right] +$$

$$+\sum_{j=2}^{n_i}(\alpha_\ell^{(q)k_1}\tilde z_1^{(\ell)}(\alpha_\ell^{(q)}) + \alpha_i^{(j)k_1+1}\tilde z_2^{(\ell)}(\alpha_\ell^{(q)}))\sigma_i^{(j)} \times$$

$$\times \operatorname{sgn}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}\bigg|_{\alpha_i^{(j)}} S_+(\alpha_\ell^{(q)} - \alpha_i^{(j)})\Big\rangle - \tilde\beta_\ell\Phi_\ell,$$

$$\ell = q_\tau + 1\ldots, q_\tau + m_\tau, \qquad q = 1,\ldots, n_\ell,$$

де $\tilde z_1^{(\ell)}(\alpha_1) = \tilde f_\ell + \tilde\lambda_\ell k_1\alpha_1^{1-k_2}$, $\tilde z_2^{(\ell)}(\alpha_1) = \tilde f_\ell\alpha_1^{-1} - \tilde\lambda_\ell k_1\alpha_1^{-k_2}$, доповненої відповідними граничними умовами.

Результати числової апробації методики. За допомогою викладеної методики та отриманих на її основі співвідношень проведено числові дослідження поведінки теплового та термонапруженого станів кулі, виготовленої з термочутливого матеріалу з простою тепловою нелінійністю, радіуса R_2 з внутрішньою центральною порожниною радіуса R_1 за умов дії внутрішнього та зовнішнього гідростатичних тисків і температурного удару по граничних поверхнях.

Числові дослідження виконували для кулі, виготовленої зі сталі 12Х18Н12Т, для якої температурні залежності ФМХ, отримані шляхом апроксимації табличних даних [6] поліноміальними функціями за допомогою методу найменших квадратів, подамо у вигляді $\chi(t) = \chi_0\chi^*(t^*)$:

$$\lambda_t(t) = \lambda_t^{(0)}\left(1 + 0.4923(t^* - t_\text{р}^*) + 0.2821(t^* - t_\text{р}^*)^2 - 0.0888(t^* - t_\text{р}^*)^3\right),$$

$$G(t) = G_0\left(1 - 0.341(t^* - t_\text{р}^*) + 0.0814(t^* - t_\text{р}^*)^2\right),$$

$$\nu(t) = \nu_0\left(1 + 0.1674(t^* - t_\text{р}^*) - 0.0701(t^* - t_\text{р}^*)^2\right),$$

$$\alpha_t(t) = \alpha_t^{(0)}\left(1 + 0.2118(t^* - t_\text{р}^*) + 0.0659(t^* - t_\text{р}^*)^2\right),$$

$$\lambda_t^{(0)} = 14.9555\ \text{Вт/(м} \cdot \text{К)}, \qquad G_0 = 7.9119 \cdot 10^4\ \text{МПа}, \qquad \nu_0 = 0.2965,$$

$$\alpha_t^{(0)} = 1.6098 \cdot 10^{-5}\ \text{К}^{-1}, \qquad t^* = t/t_0, \qquad t_\text{р}^* = t_\text{р}/t_0.$$

За відлікову температуру t_0 приймали $t_0 = 673$ К, за початкову – $t_\text{р} = 273$ К, а відношення радіусів граничних поверхонь приймали рівним $R_2/R_1 = 5$. При дослідженнях температурну залежність відповідного безрозмірного коефіцієнта $\chi^*(t^*)$ на інтервалі температур $[t_\text{р}^* = 0.4,\ t_\text{k}^* = 1.45]$ апроксимували залежністю

$$\frac{\chi(t)}{\chi_0} \approx \chi_1^* + \sum_{i=1}^{n}(\chi_{i+1}^* - \chi_i^*)S_+(t^* - t_i^*),$$

де

$$n = \left|(\ln\chi^*(t_\text{р}^*) - \ln\chi^*(t_\text{k}^*))/\ln(1+\varepsilon)\right|,$$

t_i^* – корені рівняння

$$\chi^*(t_i^*) = \chi^*(t_\text{k}^*)(1+\varepsilon)^{n+1-i}, \quad i = 1,\ldots,n,$$

а апроксимуючі коефіцієнти χ_i^* визначали за співвідношеннями

$$\chi_1^* = \chi^*(t_\text{р}^*), \qquad \chi_{i+1}^* = \chi^*(t_\text{k}^*)(1+\varepsilon)^{n+1-i}, \quad i = 1,\ldots,n,$$

або

$$\chi_i^* = \chi^*(t_\text{k}^*)(1+\varepsilon)^{n+1-i}, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

що забезпечувало апроксимацію відповідно з надлишком або недостачею; ε – максимальне відносне відхилення апроксимуючої залежності від точної.

Характерні результати розрахунків за дії температурного удару по зовнішній поверхні інтенсивністю $t_2 = 973$ К та зовнішнього гідростатичного тиску подано на рис. 1 – рис. 3 у безрозмірному вигляді: $t^* = \dfrac{t}{t_0}$, $\rho = \dfrac{r}{R_1}$, $\text{Fo} = \dfrac{a\tau}{R_1^2}$, $\sigma_i^* = \dfrac{\sigma_i}{2G_0\alpha_t^{(0)}t_0}$, $i = r, \varphi, \theta$, $p_m^* = \tilde{\sigma}_m$, $m = 1, 2$.

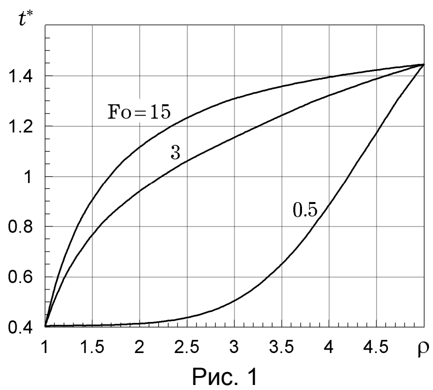

Рис. 1

На рис. 1 наведено радіальний розподіл температури за різної точності апроксимації ($\varepsilon < 10\%$) температурної залежності коефіцієнта теплопровідності $\lambda_t(t)$ у моменти часу $\text{Fo} = 0.5, 3, 15$.

Системний розрахунок поведінки температурного поля засвідчив, що при точності апроксимації $\varepsilon < 10\%$ відносна похибка в обчислених значеннях температури не перевищує 1%. При $\text{Fo} \geq 15$ в кулі реалізується стаціонарний тепловий режим.

Розподіли значень колових напружень за радіальною координатою при інтенсивності гідростатичних тисків $p_1^* = 0$, $p_2^* = 0.5$ у моменти часу $\mathrm{Fo} = 0.5, 15$ наведено на рис. 2.

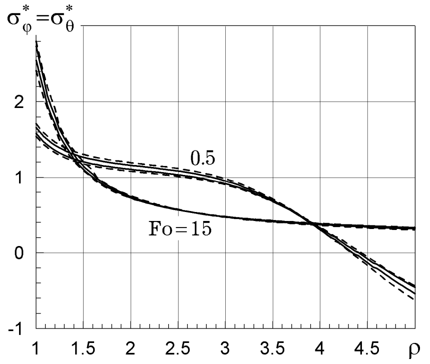

Рис. 2

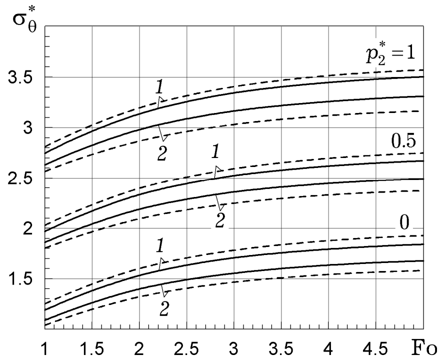

Рис. 3

Рис. 3 ілюструє зміну в часі колових напружень на внутрішній граничній поверхні за умови відсутності внутрішнього гідростатичного тиску та різних значеннях інтенсивності зовнішнього тиску $p_2^* = 0, 0.5, 1.0$.

Суцільним лініям на рис. 2, рис. 3 відповідають значення, отримані при апроксимації температурних залежностей ФМХ з точністю $5\,\%$, штриховими – з точністю $10\,\%$ у випадках апроксимації функцій з надлишком (криві *1*) і з недостачею (криві *2*).

Результати досліджень, наведені на рис. 2, рис. 3, свідчать, що реальне значення напруження σ_i, $i = r, \varphi, \theta$, знаходиться в діапазоні значень, розрахованих за апроксимації температурних залежностей ФМХ з надлишком і недостачею, при цьому відносна похибка між ними не перевищує 2ε.

Висновки. Запропонований аналітично-числовий підхід до розв'язання одновимірних задач термопружності для термочутливих тіл простої геометрії надає змогу за розв'язками відповідно лінеаризованих крайових задач для змінної Кірхгофа досліджувати з контрольованою достовірністю одновимірні нестаціонарні теплові та квазістатичні напружено-деформовані стани за комбінованої термосилової дії.

1. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Задачи теории упругости неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 216 с.
2. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – Москва: Наука, 1964. – 488 с.

   Те саме: *Carslaw H. S., Jaeger J. C.* Conduction of heat in solids. – Oxford: Clarendon Press, 1959. – 510 p.
3. *Коляно Ю. М., Кулик А. Н.* Температурные напряжения от объемных источников. – Киев: Наук. думка, 1983. – 288 с.
4. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 600 с.
6. *Масленков С. В., Масленкова Е. А.* Стали и сплавы для высоких температур: Справочник: В 2 кн. – Москва: Металлургия, 1991. – Кн. 1. – 384 с.
7. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
8. *Kiani Yasser, Eslami M. R.* Geometrically non-linear rapid heating of temperature-dependent circular FGM plates // J. Therm. Stresses. – 2014. – **37**, No. 12. – P. 1495–1518.
9. *Popovych V.* Methods for determination of the thermo-stressed state of thermosensitive solids under complex heat exchange conditions // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 6. – P. 2997–3008.

ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКИ-ЧИСЛЕННОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ТЕЛА ПРОСТОЙ ГЕОМЕТРИИ

Предложена методика аналитически-численного решения одномерных задач термоупругости тел простой геометрии, основанная на представлении температурных зависимостей физико-механических характеристик материалов в виде кусочно-постоянных функций температуры, использовании замены Кирхгофа и аппарата обобщенных функций. Этот подход позволяет с контролируемой достоверностью исследовать одномерные нестационарные тепловые и квазистатические напряженно-деформированные состояния при комбинированном термосиловом воздействии.

ON ONE ANALYTICAL-NUMERICAL METHOD OF SOLUTION FOR THE ONE-DIMENSIONAL QUASI-STATIC THERMOELASTICITY PROBLEM FOR THERMOSENSITIVE BODY OF SIMPLE GEOMETRY

The procedure of analytical-numerical solution of the one-dimensional thermoelasticity problems for bodies of simple geometry is proposed. The method is based on presentation of the temperature dependences of physical-mechanical material characteristics in the form of piecewise-constant temperature functions, use of Kirchhoff substitution, and apparatus of generalized functions. This way enables one to study with controlled validity the one-dimensional non-stationary thermal and quasi-static stress-strain states under combined action of thermal and mechanical loading.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.03.15