

НЕЛІНІЙНА ДЕФОРМАЦІЯ І ГАЛУЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК З РОЗШАРУВАННЯМ ПРИ ДІЇ ЗОВНІШНЬОГО ТИСКУ

Розглянуто структуру галуження розв'язку нелінійної крайової задачі теорії оболонок для випадку циліндричної оболонки з областю розширення під дією зовнішнього тиску. Для відшукування розв'язку використано узагальнений метод Канторовича, застосований до аналізу відповідної крайової задачі. Наведено повну структуру галуження розв'язків задачі: встановлено існування гілок розв'язку як з формами деформації зі спільною деформацією шарів, так і з формами деформації з окремою деформацією шарів в області розширення.

Вступ. Широкомасштабне застосування тонкостінних оболонкових конструкцій в авіа- та ракетно-космічному машинобудуванні, в інших галузях техніки зумовлює постійну необхідність аналізу поведінки зазначених конструкцій як у теоретичному плані, так і в експериментальному. Особливий інтерес тут становить аналіз поведінки конструкції за умов наявності дефекту типу області розширення, який може мати як технологічний, так і експлуатаційний характер, а також вплив зазначеного дефекту на втрату стійкості і, врешті-решт, на несучу здатність навантаженої конструкції.

Варто зазначити, що тут можливі форми деформації оболонки (розв'язки відповідної нелінійної крайової задачі) із повним нормальним контактом шарів в області розширення або з чергуванням підобластей нормального контакту та окремого деформування шарів матеріалу оболонки, при цьому рівні критичних навантажень, що їм відповідають, можуть істотно відрізнятися.

У процесі аналізу втрати стійкості тонкостінних оболонкових конструкцій з розширваннями необхідно зважати на те, що, з одного боку, має місце сильний вплив форми деформації оболонки, що розвивається, на деформацію оболонки в області розширення, з іншого боку, деформація оболонки в області розширення впливає на форму деформації всієї оболонки, яка розвивається. Це зумовлює необхідність як побудови моделі деформації в області розширення, так і глобального біфуркаційного аналізу (із урахуванням можливості галуження вторинного, третинного тощо) поведінки всієї навантаженої конструкції. Варто наголосити на тому, що подібний вплив «локального» на «глобальне» є типовою ознакою нелінійної поведінки системи.

Більшість робіт, у яких досліджують втрату стійкості тонкостінних оболонок із розширваннями, присвячено побудові моделей поведінки оболонки в області розширення. Як розрахункову модель при цьому в основному використовують скінченноелементну апроксимацію і досліджують розв'язок відповідної нелінійної крайової задачі аж до досягнення ним граничної точки [4, 6, 9]. Особливу увагу у роботах цього напрямку приділяють формулюванню і методам обчислення критерію зростання дефекту, а також встановленню розв'язувальних співвідношень, що описують поведінку оболонки в області розширення. Тут беруть до уваги можливість пластичної деформації, а умови контакту в області розширення звичайно описують гіпотезами типу Вінклера [11–13]. Використання багат шарових оболонок зумовлює необхідність відмовитись від гіпотез Кірхгофа при формулюванні розв'язувальних співвідношень для області розширення і використання зсувних моделей першого або вищих порядків [7, 10, 14]. Аналіз моделей зазначеного типу можна знайти в огляді [8].

Крім того, різноманітність форм деформації, які зафіксовані в експериментальних і теоретичних дослідженнях, а також суттєва нелінійність відповідної крайової задачі навіть у випадку оболонки без області розширу-

вання спонукає досліджувати повну структуру галуження відповідної крайової задачі, а також змушує вибирати метод побудови та аналізу зазначеної структури.

У роботі [5] вивчається втрата стійкості багатошарових сферичних куполів (шари виготовлено із різних матеріалів): тут фіксуються неосесиметричні форми зі спільною деформацією шарів. У працях [2, 3] в осесиметричній постановці досліджується біфуркаційна картина для випадку сферичного сегмента з областю розшарування, встановлено наявність гілок розв'язку, яким відповідають форми зі спільною деформацією шарів в області розшарування та форми з відокремленням нижнього шару: для реалізації зазначеної форми із відокремленням необхідним є формування підобластей нормального контакту шарів поряд із границею області розшарування, навіть якщо розміри цих підобластей контакту істотно менші від розмірів області розшарування.

Підсумовуючи сказане, зазначимо, що у відомій авторам літературі не наводяться моделі поведінки тонкостінної системи, у яких враховується можливість наявності підобластей повного нормального контакту та окремої деформації шарів в області розшарування, а також досліджується нелінійна поведінка і критичні навантаження тонкостінної системи з урахуванням біфуркаційної структури відповідної нелінійної крайової задачі.

1. Постановка задачі. У цій роботі дослідимо структуру галуження розв'язків нелінійної крайової задачі теорії тонкостінних систем із областю розшарування у варіаційній постановці.

Оболонка характеризується радіусом R , довжиною L , товщиною h . Координати x_1, x_2, x_3 відповідають поздовжньому, коловому та нормальному напрямкам, відповідно. Координатна поверхня оболонки співпадає з поверхнею, що розділяє шари в області розшарування.

Розглядаємо прямокутну у плані область розшарування Ω_d , $\Omega_d = \{x_{i,\min} \leq x_i \leq x_{i,\max}, i = 1, 2\}$, яка характеризується товщинами верхнього, h_1 , та нижнього, h_2 , шарів, $h_1 + h_2 = h$. Через Γ_d позначаємо границю зазначеної області Ω_d .

Припускаємо можливість існування в зазначеній області розшарування прямокутних у плані підобластей окремого деформування шарів Ω_j , $\Omega_j = \{x_{i,\min}^j \leq x_i \leq x_{i,\max}^j, i = 1, 2\}$, $j = 1, \dots, K$. Тут $x_{i,\min}^j, x_{i,\max}^j$ – границі j -ї підобласті окремої деформації.

У подальших позначеннях індекс (s) у круглих дужках відповідатиме номеру шару $s = 1, 2$. (Індекс (0) відповідає непошкодженій частині оболонки.) Відповідно через $\Omega^{(s)}$, $s = 1, 2$, позначаємо s -й шар в області розшарування, через $\Omega_j^{(s)}$ – s -й шар в j -й підобласті окремого деформування шарів; через $\Gamma_d^{(s)}$ та $\Gamma_j^{(s)}$ позначаємо відповідні границі, а через $\Gamma_j^{(s-)}$ та $\Gamma_j^{(s+)}$ – частини границі, що належать Ω_j та $\Omega_d - \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$ відповідно.

Границі Γ_j є невідомими і будуть визначені в процесі розв'язання задачі.

Оболонка знаходиться під дією рівномірного зовнішнього навантаження. На торцях оболонки виконуються умови рухомого шарніру.

Для побудови розв'язувальних співвідношень розрахункової моделі будемо використовувати такі позначення: $u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, w^{(s)}$ – компоненти вектора переміщень координатної поверхні у напрямках x_1, x_2, x_3 відповідно;

$\theta_1^{(s)}, \theta_2^{(s)}$ – кути повороту одиничного вектора нормалі до координатної поверхні відносно напрямків x_1, x_2 ; $\varepsilon_{11}^{(s)}, \varepsilon_{22}^{(s)}$ ($\varepsilon_{12}^{(s)}, \varepsilon_{21}^{(s)}$) – видовження (зсуви) координатної поверхні у напрямках x_1, x_2 ; $\chi_{11}^{(s)}, \chi_{22}^{(s)}$ ($\chi_{12}^{(s)}$) – зміни кривин (кручення кривин) координатної поверхні у напрямках x_1, x_2 відповідно.

У перерізі $x_1 = \text{const}$ ($x_2 = \text{const}$) для s -го шару повний вектор і повний момент внутрішніх зусиль розкладаються на: зусилля тангенціального розтягу $T_{11}^{(s)}$ ($T_{22}^{(s)}$) та зсуву $T_{12}^{(s)}$ ($T_{21}^{(s)}$), перерізувальну силу $Q_1^{(s)}$ ($Q_2^{(s)}$), згинний $M_{11}^{(s)}$ ($M_{22}^{(s)}$) та крутильний $M_{12}^{(s)}$ ($M_{21}^{(s)}$) моменти. Величини $C_{(s)}^{ijkl}$ ($C_{ijkl}^{(s)}$), $D_{(s)}^{ijkl}$ ($D_{ijkl}^{(s)}$), $K_{(s)}^{ijkl}$ ($K_{ijkl}^{(s)}$) – коефіцієнти жорсткості [12].

Для формулювання зазначених співвідношень здійснено перехід до системи безрозмірних величин за допомогою такої системи співвідношень (тут риска над величиною відповідає розмірній величині):

– безрозмірні змінні $x_i = \bar{x}_i/R$, $i = 1, 2$;

– безрозмірні невідомі функції

$$T_{ij}^{(s)} = \bar{T}_{ij}^{(s)}/Eh, \quad M_{ij}^{(s)} = \bar{M}_{ij}^{(s)}/EhR, \quad \lambda q^{(s)} = \bar{\lambda}q^{(s)}R/Eh,$$

$$(u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, w^{(s)}) = (\bar{u}_1^{(s)}, \bar{u}_2^{(s)}, \bar{w}^{(s)})/R, \quad \chi_{ij}^{(s)} = R\bar{\chi}_{ij}^{(s)};$$

– безрозмірні коефіцієнти жорсткості

$$C_{(s)}^{ijkl} = \bar{C}_{(s)}^{ijkl}/Eh, \quad D_{(s)}^{ijkl} = \bar{D}_{(s)}^{ijkl}/Eh^3, \quad K_{(s)}^{ijkl} = \bar{K}_{(s)}^{ijkl}/EhR,$$

$$C_{ijkl}^{(s)} = \bar{C}_{ijkl}^{(s)}Eh, \quad D_{ijkl}^{(s)} = \bar{D}_{ijkl}^{(s)}Eh^3, \quad K_{ijkl}^{(s)} = \bar{K}_{ijkl}^{(s)}EhR,$$

– параметр $\varepsilon = h^2/R^2$.

Зазначимо, що у записаних нижче співвідношеннях виконується підсумовування за індексами, що повторюються (якщо не зазначене щось інше).

Для опису деформації оболонки в області розшарування використовуємо гіпотезу ламаних нормалей [12], у якій продемонстровано, що врахування гіпотези зсуву порівняно з гіпотезою ламаних нормалей дає поправку, не більшу ніж 5%. Проте зауважимо, що через неврахування деформації зсуву в розглядуваній задачі на границях підобластей контакту та окремого деформування шарів виникають стрибки перерізувальних сил.

Як математичну модель навантаженої конструкції використовуємо рівняння нелінійної теорії тонкостінних систем, доповнені граничними умовами на торцях оболонки, на границі області розшарування та на границях підобластей нормального контакту та окремого деформування шарів. А саме:

– на торцях оболонки виконуються граничні умови рухомого шарніру

$$T_n = 0, \quad \tau_n = 0, \quad w_n = 0, \quad M_n = 0, \quad (1)$$

де T_n – сила, нормальна до контуру, τ_n – зсув вздовж контуру, w_n – прогин точок торця, M_n – згинний момент;

– на границі непошкодженої частини оболонки та підобласті контакту, що межує з нею:

умови сумісності за деформаціями

$$[u^{(0)}(x_1, x_2) - u^{(s)}(x_1, x_2)]|_{\Gamma_d} = 0,$$

$$[v^{(0)}(x_1, x_2) - v^{(s)}(x_1, x_2)]|_{\Gamma_d} = 0,$$

$$[w^{(0)}(x_1, x_2) - w^{(s)}(x_1, x_2)]|_{\Gamma_d} = 0,$$

$$[\theta_p^{(0)}(x_1, x_2) - \theta_p^{(s)}(x_1, x_2)]|_{\Gamma_d} = 0, \quad p, s = 1, 2; \quad (2)$$

умови рівноваги за зусиллями та моментами

$$\begin{aligned}
& [T_{pp}^{(0)}(x_1, x_2) - T_{pp}^{(1)}(x_1, x_2) - T_{pp}^{(2)}(x_1, x_2)] \Big|_{\Gamma_d} = 0, \\
& [T_{12}^{(0)}(x_1, x_2) - T_{12}^{(1)}(x_1, x_2) - T_{12}^{(2)}(x_1, x_2)] \Big|_{\Gamma_d} = 0, \\
& [M_{pp}^{(0)}(x_1, x_2) - M_{pp}^{(1)}(x_1, x_2) - M_{pp}^{(2)}(x_1, x_2)] \Big|_{\Gamma_d} = 0, \\
& [M_{12}^{(0)}(x_1, x_2) - M_{12}^{(1)}(x_1, x_2) - M_{12}^{(2)}(x_1, x_2)] \Big|_{\Gamma_d} = 0, \\
& [Q_p^{(0)}(x_1, x_2) - Q_p^{(1)}(x_1, x_2) - Q_p^{(2)}(x_1, x_2)] \Big|_{\Gamma_d} = 0; \tag{3}
\end{aligned}$$

– на границях підобластей контакту та окремого деформування шарів:
умови сумісності за деформаціями вигляду (2);

умови рівноваги, сформульовані з урахуванням стрибків за перерізувальними силами на зазначених границях

$$\begin{aligned}
& T_{pp}^{(s)}(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma_j^{(s+)}} - T_{pp}^{(s)} \Big|_{\Gamma_j^{(s-)}}(x_1, x_2) = 0, \\
& T_{12}^{(s)}(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma_j^{(s+)}} - T_{12}^{(s)} \Big|_{\Gamma_j^{(s-)}}(x_1, x_2) = 0, \\
& M_{pp}^{(s)}(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma_j^{(s+)}} - M_{pp}^{(s)} \Big|_{\Gamma_j^{(s-)}}(x_1, x_2) = 0, \\
& M_{12}^{(s)}(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma_j^{(s+)}} - M_{12}^{(s)} \Big|_{\Gamma_j^{(s-)}}(x_1, x_2) = 0, \\
& Q_p^{(s)}(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma_j^{(s+)}} - Q_p^{(s)} \Big|_{\Gamma_j^{(s-)}}(x_1, x_2) + (-1)^s \mu(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma_j} = 0, \tag{4}
\end{aligned}$$

(у виразах (3), (4) $p = 1$ для частин контуру $x_1 = \text{const}$, $p = 2$ для частин контуру $x_2 = \text{const}$; μ – стрибок перерізувальної сили);

– усередині та на границях підобластей нормального контакту шарів:

умови непроникнення шарів

$$\begin{aligned}
& [w^{(1)}(x_1, x_2) - w^{(2)}(x_1, x_2)] \Big|_{\Omega_d - \bigcup_{j=1}^K \Omega_j} = 0, \\
& [w^{(1)}(x_1, x_2) - w^{(2)}(x_1, x_2)] \Big|_{\Gamma_j^{(s+)}} = 0, \quad s = 1, 2, \quad j = 1, \dots, K. \tag{5}
\end{aligned}$$

Вектор

$$\begin{aligned}
& U(x_1, x_2) = \{u_k^{(s)}(x_1, x_2), k = 1, \dots, 13(s)\} = \\
& = \{u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, w^{(s)}, \theta_1^{(s)}, \theta_2^{(s)}, T_{11}^{(s)}, T_{12}^{(s)}, T_{22}^{(s)}, M_{11}^{(s)}, M_{12}^{(s)}, M_{22}^{(s)}, Q_1^{(s)}, Q_2^{(s)}\}
\end{aligned}$$

містить усі невідомі функції задачі, для яких формулюються диференціальні розв'язувальні співвідношення.

Зауважимо, що закон Гука внаслідок неспівпадіння координатної та серединної поверхонь оболонки набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned}
& T_{ij}^{(s)} = C_{(s)}^{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(s)} + K_{(s)}^{ijkl} \chi_{kl}^{(s)}, \\
& M_{ij}^{(s)} = \varepsilon D_{(s)}^{ijkl} \chi_{kl}^{(s)} + K_{(s)}^{ijkl} \chi_{kl}^{(s)}, \\
& \varepsilon_{kl}^{(s)} = C_{ijkl}^{(s)} T_{kl}^{(s)} + K_{ijkl}^{(s)} M_{kl}^{(s)}, \\
& \chi_{ij}^{(s)} = \frac{1}{\varepsilon} D_{ijkl}^{(s)} M_{kl}^{(s)} + K_{ijkl}^{(s)} T_{kl}^{(s)}. \tag{6}
\end{aligned}$$

Для одержання розв'язувальних співвідношень розглянемо еквівалентну варіаційну постановку, що задається функціоналом

$$\begin{aligned} \frac{I}{EhR^2} = \sum_{s=0}^2 \left[\iint_{\Omega(s)} \left[\frac{1}{2} (C_{(s)}^{ijkl} \varepsilon_{ij}^{(s)}(T_{(s)}^{ij}) \varepsilon_{kl}^{(s)}(T_{(s)}^{kl}) + \varepsilon D_{(s)}^{ijkl} \chi_{ij}^{(s)}(M_{(s)}^{ij}) \chi_{kl}^{(s)}(M_{(s)}^{kl})) + \right. \right. \\ \left. \left. + K_{(s)}^{ijkl} \varepsilon_{ij}^{(s)}(T_{(s)}^{ij}) \chi_{kl}^{(s)}(M_{(s)}^{kl}) - \right. \right. \\ \left. \left. - T_{(s)}^{ij} \varphi_{ij}^{(s)} - M_{(s)}^{ij} \varphi_{ij}^{(s)} - \tilde{Q}_{(s)}^i \zeta_i^{(s)} \right] dx_1 dx_2 - \right. \\ \left. - \iint_{\Omega(s)} \lambda q_{(s)} w_{(s)} dx_1 dx_2 \right], \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\varphi_{ij}^{(s)} \equiv \varepsilon_{ij}^{(s)}(T_{(s)}^{ij}) - \frac{1}{2} [u_{i,x_j}^{(s)} + u_{j,x_i}^{(s)}] + B_{ij} w^{(s)} - \frac{1}{2} \theta_i^{(s)} \theta_j^{(s)},$$

$$B_{11} = B_{12} = 0, \quad B_{22} = 1,$$

$$\zeta_i^{(s)} \equiv \theta_i^{(s)} + w_{,x_i}^{(s)},$$

$$\varphi_{ij}^{(s)} \equiv \chi_{ij}^{(s)}(M_{(s)}^{ij}) - \theta_{i,x_j}^{(s)}, \quad \tilde{Q}_{(s)}^i \equiv Q_{(s)}^i + T_{ij}^{(s)} \theta_j^{(s)},$$

$\tilde{Q}_{(s)}^i$ – узагальнені перерізувальні сили Кірхгофа.

Умови стаціонарності зазначеного функціонала дають систему рівнянь із частинними похідними нелінійної теорії тонкостінних оболонок [1], мають бути доповненими умовами (1)–(5) на відповідних границях.

Для виконання умов (5) непроникнення шарів всередині підобластей нормального контакту вводимо функцію контактного тиску q_c , яку визначимо саме з умов непроникнення. Відповідно функція навантаження $q_{(s)}$ набуває такого вигляду:

$$q_{(s)}(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda q(x_1, x_2), & s = 0, \\ q_c(x_1, x_2), & s = 1, \\ \lambda q(x_1, x_{2,i}) - q_c(x_1, x_2), & s = 2. \end{cases} \quad (8)$$

2. Метод розв'язування. Розв'язок розглядуваної нелінійної крайової задачі (1)–(8) шукаємо у вигляді

$$U(x_1, x_2) = \{h_k^{(i_1)}(x_1) g_k^{(i_2)}(x_2), k = 1, \dots, 13(s)\}, \quad (9)$$

де для i парних маємо $i_1 = i$, $i_2 = i - 1$, а для i непарних – $i_1 = i - 1$, $i_2 = i$.

Функції однієї змінної $h_k^{(i)}(x_1)$, $g_k^{(i)}(x_2)$ є незалежно варійовними усередині областей $\Omega^{(s)}$, $s = 0, 1, 2$. У процесі побудови варіаційної похідної функціонала (7) за функціями $h_k^{(i)}(x_1)$ та $g_k^{(i)}(x_2)$ функції $g_k^{(i)}(x_2)$ та $h_k^{(i)}(x_1)$, відповідно, є відомими, оскільки вони вже знайдені на попередньому кроці ітераційного процесу.

Ітераційний процес, визначений поданням (9), є еквівалентним до узагальненого методу Канторовича, який застосуємо до розв'язання нелінійної крайової задачі (1)–(8).

Як критерій завершення таким чином сформульованого ітераційного процесу використовується величину зміни функціонала (7) на послідовних ітераціях $|I^{(i)} - I^{(i-1)}|$, $I^{(i)} = I(h_k^{(i_1)}, g_k^{(i_2)})$.

Введемо вектори

$$h(x_1) = \{h^{(i)}(x_1)\}, \quad g(x_2) = \{g^{(i)}(x_2)\}, \quad i = 1, \dots, 13(s).$$

Тоді розв'язання двовимірної нелінійної крайової задачі з варіаційного формулювання зводиться до відшукування розв'язків послідовності крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dh_k^{(i)}}{dx_1} = f_k^{x_1}(h^{(i)}(x_1), a^{x_2}(x_1), \lambda), \quad x_1 \in [0, L/R], \quad k = 1, \dots, 8, \quad (10)$$

$$\frac{dg_k^{(i)}}{dx_2} = f_k^{x_2}(g^{(i)}(x_2), a^{x_1}(x_2), \lambda), \quad x_2 \in [0, 2\pi], \quad k = 1, \dots, 8. \quad (11)$$

Тут компоненти векторів $a^{x_1}(x_2)$, $a^{x_2}(x_1)$ є визначеними інтегралами від компонент вектор-функцій $h(x_1)$ та $g(x_2)$, обчислених на попередній ітерації. Компоненти вектора a^{x_2} залежать від $g^{(i-1)}(x_2)$ таким чином:

– для коефіцієнтів лінійних членів рівняння (10)

$$a_j^{x_2}(x_1) = \int_{\xi_1(x_1)}^{\xi_2(x_1)} g_{j_1}^{(i-1)}(x_2) g_{j_2}^{(i-1)}(x_2) dx_2;$$

– для коефіцієнтів нелінійних членів рівняння (10)

$$a_j^{x_2}(x_1) = \int_{\xi_1(x_1)}^{\xi_2(x_1)} g_{j_1}^{(i-1)}(x_2) g_{j_2}^{(i-1)}(x_2) g_{j_3}^{(i-1)}(x_2) dx_2.$$

Компоненти вектора a^{x_1} аналогічно залежать від $h^{(i-1)}(x_1)$:

– для коефіцієнтів лінійних членів рівняння (11)

$$a_j^{x_1}(x_2) = \int_{\eta_1(x_2)}^{\eta_2(x_2)} h_{j_1}^{(i-1)}(x_1) h_{j_2}^{(i-1)}(x_1) dx_1;$$

– для коефіцієнтів нелінійних членів рівняння (11)

$$a_j^{x_1}(x_2) = \int_{\eta_1(x_2)}^{\eta_2(x_2)} h_{j_1}^{(i-1)}(x_1) h_{j_2}^{(i-1)}(x_1) h_{j_3}^{(i-1)}(x_1) dx_1.$$

Зазначені системи звичайних диференціальних рівнянь необхідно доповнити граничними умовами, одержаними з умов (2)–(4) з урахуванням подання (9).

Для визначення границь між підобластями нормального контакту та окремої деформації шарів в області розшарування використаємо умови трансверсальності, які з урахуванням подання (9) є умовами трансверсальності для функціонала, що залежить від функцій однієї змінної:

$$\left[F(h(x_1)) - \sum_i h^{(i)}(x_1) \frac{\partial F(h(x_1))}{\partial h^{(i)}} \right]_{\Gamma_j^{(s-)}}^{\Gamma_j^{(s+)}} = 0, \quad (12)$$

$$\left[F(g(x_2)) - \sum_i g^{(i)}(x_2) \frac{\partial F(g(x_2))}{\partial g^{(i)}} \right]_{\Gamma_j^{(s-)}}^{\Gamma_j^{(s+)}} = 0. \quad (13)$$

Формули (12), (13) використовуємо для визначення границь підобластей окремого деформування вигляду відповідно $x_1 = \text{const}$ і $x_2 = \text{const}$. Тут $F(h(x_1))$, $F(g(x_2))$ – підінтегральний вираз у функціоналі (7), перетворений з урахуванням подання (9), причому у виразі (12) компоненти вектор-

функції $g(x_2)$ є відомими з попередньої ітерації і відповідно перетворюються на визначені інтеграли. Аналогічно, у виразі (13) відомими є компоненти вектор-функції $h(x_1)$.

Розв'язки одновимірних задач будуються ітеративним чином через редукцію на кожній ітерації крайової задачі до задачі Коші методом Ньютона, координати границі є невідомими.

Для забезпечення збіжності алгоритму використовували метод продовження за параметром. В околі граничних точок залежностей навантаження – прогин використовували прийом зміни ведучого параметра. Вихід на закритичні гілки здійснювали за допомогою методу збурення.

3. Структура галуження розв'язків нелінійної крайової задачі.

Описаний метод застосовано до аналізу структури галуження розв'язків задачі (1)–(8) для умов шарнірного опирання на торцях оболонки. Область розшарування розглядалась у вигляді смуги.

Встановлено, що гілки розв'язку розглядуваної задачі можуть бути поділені на дві групи відповідно до характеру деформації шарів в області розшарування. До першої групи належать гілки, що характеризуються повним нормальним контактом шарів в області розшарування, до другої групи – гілки, що характеризуються чергуванням підобластей повного контакту та окремої деформації шарів.

На рис. 1 наведено характерну структуру галуження нелінійної крайової задачі для випадку $L/R = 4$, $R/h = 150$, $\eta_d = h_1/h = 0.1$, область розшарування $\Omega_d = \{0 \leq x_1 \leq L/R, -\pi/6 \leq x_2 \leq \pi/6\}$. На рис. 1а подано гілки, яким відповідають форми з повним контактом шарів, на рис. 1б – форми з чергуванням підобластей контакту та окремої деформації шарів.

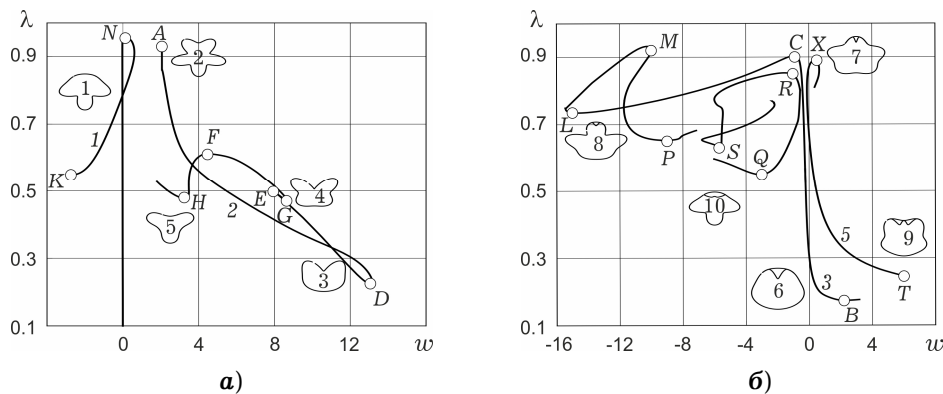


Рис. 1. Структура галуження нелінійної крайової задачі: **а)** – гілки, яким відповідають форми з повним контактом шарів в області розшарування; **б)** – гілки, яким відповідають форми з чергуванням підобластей повного контакту та окремої деформації шарів.

Уздовж осі абсцис відкладено безрозмірний прогин (віднесений до h), а вздовж осі ординат – величину параметра навантаження (відношення значення діючого навантаження до величини критичного навантаження, одержаного для тієї ж оболонки без області розшарування у межах лінійної теорії – λ_{cr}). Особливі точки розв'язку позначено колами. Колові перерізи розміщені поряд з ділянками гілок розв'язку, які їм відповідають.

Гілки розв'язку зі спільною деформацією шарів подібні за топологічною структурою і за формами деформації, що на них фіксуються, до закритичних гілок розв'язку для випадку оболонки без розшарування: ця частина структури галуження може розглядатися як руйнація біфуркаційної картини для випадку монолітної оболонки внаслідок зниження жорсткості в області розшарування.

Зазначена руйнація призводить у розглядуваному випадку повного нормального контакту шарів до появи трьох гілок: гілки $O-N-K-L$ (позначено цифрою 1 на рис. 1а), що виходить з нуля, та двох ізольованих гілок (одну з них, гілку $A-D-E-G-F-H$, подану на рис. 1а, позначено цифрою 2).

Гілку $O-N-K-L$ можемо розглядати як руйнацію частини біфуркаційної діаграми для випадку монолітної оболонки, а саме: ділянка стовбура до першої точки регулярного спектра, початкова ділянка регулярної гілки, що відгалужується у цій точці регулярного спектра, та гілка вторинного галуження, якій відповідають форми деформації з двома локальними вм'ятинами. На рис. 1а їм відповідають докритична ділянка (до точки N), початкова закритична ділянка (форма 2) і «глибока» закритична ділянка (форма 1), відповідно.

На цій гілці послідовно фіксуються такі форми деформації (зі спільною деформацією шарів в області розшарування): подібна до регулярної форма з п'ятьма хвилями (форма 2), локальна форма з двома локальними вм'ятинами (форма 1), інша регулярна форма з чотирма хвилями. Ця послідовність форм деформації відповідає послідовності форм, що фіксується на зазначених гілках для випадку непошкодженої оболонки.

Інша гілка форм спільної деформації, подана на рис. 1а, – ізольована гілка $D-E-G-F-H$. Цю гілку можна розглядати як руйнацію гілки вторинного галуження для випадку непошкодженої оболонки, якій відповідає локальна форма деформації (форма 3) з однією локальною вм'ятиною.

На гілці $D-E-G-F-H$ (як і на відповідній їй гілці для випадку непошкодженої оболонки) фіксується така послідовність форм деформації (рис. 1а): регулярна форма деформації з п'ятьма хвилями у коловому напрямку (форма 1), локальна форма з однією локальною вм'ятиною (форма 3), локальна форма з трьома локальними вм'ятинами (форма 4) і, нарешті, регулярна форма деформації з трьома хвилями (форма 5).

Границі областей існування усіх форм деформації, що фіксуються на цій гілці (крім форми 3 з однією локальною вм'ятиною), подібні до відповідних границь для випадку непошкодженої оболонки (з урахуванням зниження жорсткості в області розшарування). Нижня границя форми «одна локальна вм'ятина» є суттєво меншою, ніж у випадку непошкодженої оболонки. Відповідні верхні границі співпадають ($\lambda \sim 0.85$).

Інша група гілок характеризується формами деформації з чергуванням підобластей повного контакту та окремої деформації в області розшарування. Відповідні гілки наведено на рис. 1б. Підкреслимо, що гілки цього типу, очевидно, не мають аналогів у біфуркаційній картині для випадку монолітної оболонки і є притаманними лише розглядуваній задачі.

Гілка $B-C-L-M-P$ (позначена номером 3 на рис. 1б) характеризується формами деформації з однією областю окремої деформації шарів в області розшарування. Тут послідовно фіксуються: майже регулярна форма деформації оболонки (форма 7), при цьому в області розшарування є лише одна підобласть окремої деформації шарів, і розміри цієї підобласті є суттєво меншими від розмірів області розшарування. Ділянка $C-B$ характеризується збільшенням підобласті окремої деформації, яка в околі особливої точки B (форма 6) майже співпадає з усією областю розшарування $\Omega_1 : x_{1,\min}^{(1)} \approx 0, x_{1,\max}^{(1)} \approx L/R, x_{2,\min}^{(1)} = -\pi/6 + \varphi_c, x_{2,\max}^{(1)} = \pi/6 - \varphi_c, \varphi_c \approx 0.01$. Області повного нормального контакту є тоненькими смужками ширини φ_c , розташованими поряд із непошкодженою частиною оболонки. Форму деформації всієї оболонки тут можна охарактеризувати як «три локальні вм'ятини».

Зауважимо, що подібно до випадку сферичного сегмента з розшаруванням [3], не зважаючи на достатньо мале значення ширини φ_c , тобто

невелику площу підобласті повного нормального контакту шарів, існування цієї підобласті є необхідним для можливості реалізації такої форми деформації (у цьому випадку та для інших форм деформації з підобластями окремої деформації).

Після досягнення мінімуму в особливій точці B гілка демонструє висхідну ділянку, на якій відбувається розвиток форми «три локальні вм'ятини».

На ділянці $C - L - M - P$ зазначеної гілки з форми **7** розвивається форма з двома локальними вм'ятинами (форма **8**). Підобласть окремого деформування шарів при цьому зростає, але її розміри в коловому напрямку не перевищують розмірів області випинання, що формується навколо прямої $x_2 = 0$.

Інша гілка, якій відповідає форма деформації з чергуванням підобластей нормального контакту та окремого деформування шарів в області розшарування, – гілка $X - T$ (позначена цифрою 5 на рис. 1б). Ця гілка (як і гілка $B - C - L - M - P$) також характеризується стрімким розвитком з регулярної форми з підобластю окремої деформації майже нульової площі (форма **7**) локальної форми з трьома локальними вм'ятинами, але деформація оболонки в області розшарування характеризується не однією, а двома підобластями окремого деформування шарів, які розташовані симетрично відносно лінії $x_2 = 0$ (форма **9**).

У своєму граничному вигляді – в околі точки T – ця форма характеризується тим, що підобласті окремої деформації займають практично всю область розшарування:

$$\begin{aligned} \Omega_j : x_{1,\min}^{(j)} &\approx 0, \quad x_{1,\max}^{(j)} \approx L/R, \quad j = 1, 2; \\ \Omega_1 : x_{2,\min}^{(1)} &= -\pi/6 + \varphi_c, \quad x_{2,\max}^{(1)} = -\varphi_c, \quad \Omega_2 : x_{2,\min}^{(2)} = \varphi_c; \\ \Omega_2 : x_{2,\min}^{(2)} &= \pi/6 - \varphi_c, \quad \varphi_c \approx 0.01. \end{aligned}$$

При цьому області контакту шарів зменшуються до трьох нешироких смужок шириною φ_c кожна, розташованих біля границь області розшарування та лінії $x_2 = 0$.

Нарешті, третя наведена на рис. 1б гілка з формами деформації, що характеризуються наявністю підобластей окремого деформування шарів в області розшарування, – гілка $Q - R - S$ (позначена цифрою 4 на рис. 1б) має форму деформації з двома локальними вм'ятинами (форма **10**), симетричну відносно площини $x_2 = \pi/2$ порівняно з формою **8**.

Як і у випадку гілки $B - C - L - M - P$, тут, крім розвитку локальної форми деформації, спостерігається розвиток підобласті окремої деформації шарів в області розшарування, яка врешті-решт збільшується практично до розмірів всієї області розшарування, залишаючи дві неширокі смуги підобластей нормального контакту біля границі з непошкодженою частиною оболонки.

Зауважимо, що з порівняння форм деформації **8**, **10** і **6** (рис. 1б) випливає, що вони відповідають трьом можливим варіантам взаємовпливу загальної («глобальної») форми деформації оболонки та деформації оболонки в області розшарування («локальної»). У всіх трьох випадках нижній шар оболонки в області розшарування випинається донизу, проте у першому випадку (форма **8**) верхній шар випинається догори, заважаючи розвитку підобласті окремого деформування шарів, у другому випадку (форма **10**) – залишається практично недеформованим, у третьому випадку (форма **6**) – випинається донизу (в одному напрямку з нижнім шаром), створюючи сильний контактний тиск та сприяючи появі підобласті окремого деформування. Відповідно, нижні границі областей існування зазначених форм складають

$0.7\lambda_{cr}$, $0.5\lambda_{cr}$ та $0.15\lambda_{cr}$, що свідчить про те, що останній випадок є найзагрозливішим з огляду на втрату стійкості.

У випадку області розшарування у вигляді смуги поведінка нижнього шару може розглядатися як поведінка арки відповідних геометричних розмірів під дією нерівномірного зовнішнього тиску q_c .

Хоча для тих значень геометричних параметрів, які відповідають рис. 1а та рис. 1б, нижня границя за параметром навантаження області існування форми **9** (тобто форми з двома областями окремого деформування шарів в області розшарування) є вищою від відповідної нижньої границі для форми **6** (тобто форми з однією областю окремого деформування шарів в області розшарування), проте для інших значень параметрів ця ситуація може змінитися на протилежну (див. нижче рис. 2, рис. 3).

Широкомасштабний обчислювальний експеримент для різних значень геометричних параметрів продемонстрував, що залежно від геометричних характеристик як самої оболонки, так і області розшарування для кожної гілки першої групи може існувати гілка другої групи з аналогічними формами деформації, проте з окремим деформуванням шарів.

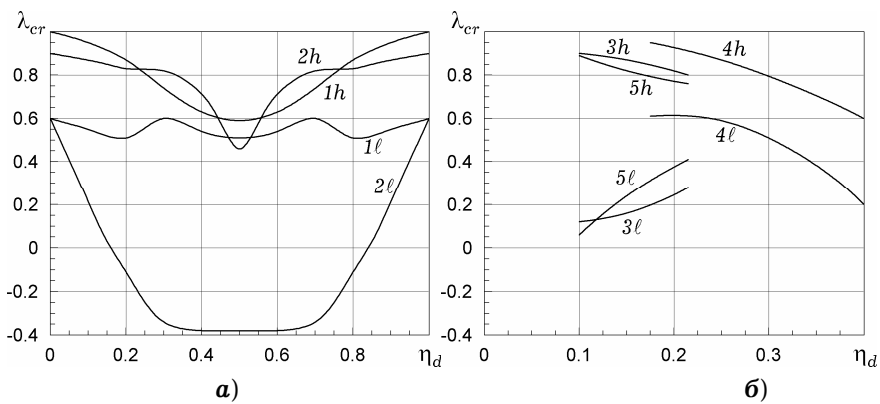


Рис. 2. Залежність величини параметра навантаження для верхньої та нижньої особливих точок гілок розв'язку від відносної товщини нижнього шару в області розшарування: – а) форми з повним контактом шарів; – б) форми з чергуванням підобластей повного контакту та окремої деформації.

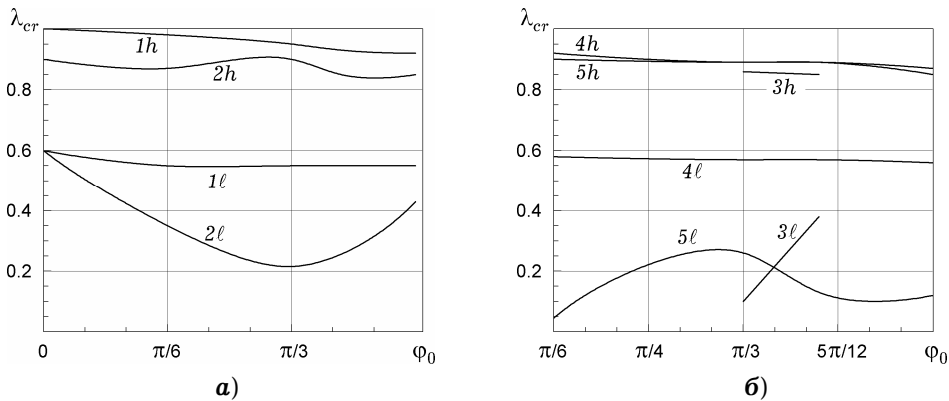


Рис. 3. Залежність величини параметра навантаження для верхньої і нижньої особливих точок гілок розв'язку від центрального кута (в радіанах) області розшарування: – а) форми з повним контактом шарів в області розшарування; – б) форми з чергуванням підобластей повного контакту та окремої деформації шарів.

Якщо область розшарування має вигляд смуги, то розміри підобластей контакту та окремого деформування у поздовжньому напрямку є близькими до довжини смуги. Для випадку однієї підобласті окремого деформування

ня шарів розміри цієї підобласті в коловому напрямку або практично співпадають з розмірами області розшарування у цьому напрямку, або, якщо розміри області розшарування у цьому напрямку більші від певного граничного кута φ^* , дорівнюють цьому куту та не залежать від розмірів області розшарування. Величина φ^* визначається товщиною нижнього шару.

На рис. 2 наведено характерну залежність значень параметра навантаження, що відповідають верхнім (h) та нижнім (l) особливим точкам гілок розв'язку, що були розглянуті вище, від параметра відносної товщини η_d нижнього шару оболонки в області розшарування. На рис. 2а подано залежності, що відповідають гілкам з повним контактом шарів, на рис. 2б – з окремою деформацією. На рис. 3 для цих гілок подано зазначені величини як функції від розмірів φ_0 області розшарування у коловому напрямку, де $\varphi_0 = x_{2,\max} - x_{2,\min}$.

Наведений вище аналіз дозволяє зробити такі висновки.

– Ітераційний процес на основі узагальненого методу Канторовича продемонстрував добру практичну збіжність у задачах нелінійної теорії оболонок за наявності зони розшарування.

– Структура розв'язків нелінійної крайової задачі теорії оболонок для випадку циліндричної оболонки з розшаруванням містить як гілки з формами деформації, що характеризуються повним нормальним контактом шарів в області розшарування, так і гілки з формами деформації підобластей повного контакту та окремої деформації шарів.

– Наявність області розшарування за товщиною оболонки суттєво змінює критичні навантаження і характер деформування, при цьому біфуркаційна картина суттєво відрізняється від осесиметричного випадку.

1. *Ворович И. И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. – Москва: Наука, 1989. – 376 с.
Te same: *Vorovich I. I.* Nonlinear theory of shallow shells. – New York: Springer, 1999. – xvi+388 p.
2. *Железко И. П., Ободан Н. И.* Вторичные ветвления и закритическое поведение тонкостенных оболочек при неоднородной деформации // Прикл. математика и механика. – 1997. – **61**, № 2. – С. 344–349.
Te same: *Zhelezko I. P., Obodan N. I.* Secondary branching and the post critical behaviour of thin-walled shells during non-uniform deformation // J. Appl. Math. and Mech. – 1997. – **61**, No. 2. – P. 333–337.
3. *Моссаковский В. И., Ободан Н. И., Железко И. П.* Нелинейная модель деформирования оболочек с расслоениями // Докл. АН СССР. – 1985. – **282**, № 5. – С. 1070–1073.
4. *Alfano G., Crisfield M. A.* Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues // Int. J. Numer. Methods Eng. – 2001. – **50**, No. 7. – P. 1701–1736.
5. *Blachut J.* Buckling of multilayered metal domes // Thin-Wall. Struct. – 2009. – **47**, No. 12. – P. 1429–1438.
6. *Jabareen M.* Rigorous buckling of laminated cylindrical shells // Thin-Wall. Struct. – 2009. – **47**, No. 2. – P. 233–240.
7. *Li Z. M., Zhao Y. X., Chen X. D., Wang W. R.* Nonlinear buckling and postbuckling of a shear-deformable anisotropic laminated cylindrical panel under axial compression // Mech. Compos. Mater. – 2011. – **46**, No. 6. – P. 599–626.
8. *Liew K. M., Zhao Xin, Ferreira A. J. M.* A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells // Compos. Struct. – 2011. – **93**, No. 8. – P. 2031–2041.
9. *Nagashima T., Suemasu H.* X-FEM analyses of a thin-walled composite shell structure with a delamination // Comput. & Struct. – 2010. – **88**, No. 9–10. – P. 549–557.
10. *Reddy J. N.* Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. – New York: CRC Press, 2004. – 856 p.
11. *Soldatos K. P., Shu X.* Modelling of perfectly and weakly bonded laminated plates and shallow shells // Compos. Sci. Technol. – 2001. – **61**, No. 2. – P. 247–260.

12. Tian Y., Fu Y., Mao. Y. Nonlinear static/dynamic analysis for elasto-plastic laminated plates with interfacial damage evolution // Compos. Struct. – 2010. – **93**, No. 1. – P. 103–112.
13. Turon A., Camanho P. P., Costa J., Renart J. Accurate simulation of delamination growth under mixed-mode loading using cohesive elements: Definition of interlaminar strengths and elastic stiffness // Compos. Struct. – 2010. – **92**, No. 8. – P. 1857–1864.
14. Zhang T., Gu W. The secondary buckling and design criterion of composite laminated cylindrical shells// Appl. Compos. Mater. – 2012. – **19**, No. 3-4. – P. 203–217.

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ И ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С РАССЛОЕНИЯМИ
ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ**

Рассматривается структура ветвления решения нелинейной краевой задачи теории оболочек для случая цилиндрической оболочки с областью расслоения под действием внешнего давления. Для анализа краевой задачи использован обобщенный метод Канторовича. Представлена полная структура ветвления решения задачи: установлено существование веток решения как с формами деформации с общей деформацией слоев, так и с формами деформации с отдельной деформацией слоев в области расслоения.

**NONLINEAR DEFORMATION AND BRANCHING OF SOLUTIONS
OF BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE THEORY OF SHELLS WITH
THE DELAMINATION UNDER EXTERNAL PRESSURE**

The structure of the branching of solutions of nonlinear boundary value problem of the shell theory for the case of a cylindrical shell with a delamination area under external pressure is considered. The generalized Kantorovich method for analysis of the boundary value problem is applied. The complete structure of branching of solution of the problem is presented: the existence of branches of solution with forms of deformation with the total deformation of layers as well as with forms of deformation with a separate deformation of layers in the region of delamination is established.

Дніпропетр. нац. ун-т
ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ

Одержано
11.02.13