

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ
НЕТОНКОЇ ОРТОТРОПНОЇ ПОЛОГОЇ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ
ТОВЩИНИ В УТОЧНЕНІЙ ПОСТАНОВЦІ**

Розглянуто задачу про дослідження спектра власних коливань нетонкої ортотропної пологої оболонки змінної у двох координатних напрямках товщини в неklasичній постановці. Підхід до розв'язання отриманої двовимірної крайової задачі ґрунтується на її зведенні за допомогою методу сплайн-апроксимації невідомих функцій по одному з координатних напрямків до одновимірної задачі з подальшим її розв'язанням. Досліджено різні випадки граничних умов на контурах оболонки. Проведено порівняння та аналіз власних частот і форм коливань ортотропних оболонок сталого і змінного товщини.

Вступ. Пологі анізотропні оболонки широко використовуються у багатьох галузях сучасної техніки, у авіа-, судно- та ракетобудуванні тощо. У промисловості та будівництві значна частина конструктивних елементів має форму оболонок з різними геометричними та фізичними параметрами. З розробкою і впровадженням на практиці нових сучасних технологій одночасно зростають і вимоги до параметрів міцності та надійності створюваних машин, механізмів і споруд, у тому числі й тих, що мають форму оболонок. Отже, виникає необхідність розробки ефективних чисельних та експериментальних методів дослідження таких об'єктів з метою визначення параметрів їх несучої здатності, зокрема, і визначення резонансних частот коливань оболонок.

Основна частина наукових праць, присвячених цій проблематиці, ґрунтується на класичній теорії, в основу якої покладено гіпотези Кірхгофа – Лява [1–4, 6]. Основи класичної теорії оболонок викладено в [1, 11]. При розрахунку деяких типів оболонок виникає необхідність використання уточнених теорій, пов'язаних з урахуванням додаткових параметрів. Зокрема, у випадку нетонких оболонок доцільно враховувати поперечні зсуви, що передбачено у неklasичній теорії Тимошенка – Міндліна [12–14]. Відмітимо ряд монографій, у яких викладено основи уточненої теорії оболонок. Дослідження напружено-деформованого стану пологих оболонок в неklasичній постановці наведено у [8, 9]. Розрахунок вільних коливань пластин в теорії Тимошенка – Міндліна викладено в роботах [5, 8, 13, 15].

У цій статті розглядаються вільні коливання прямокутної в плані ортотропної пологої циліндричної оболонки при різних типах граничних умов. Товщина оболонки змінюється в обох координатних напрямках. Розрахунки частот базуються на використанні сплайн-апроксимації по одному з координатних напрямків і подальшим розв'язанням крайової задачі на власні значення для систем звичайних диференціальних рівнянь високого порядку зі змінними коефіцієнтами сталим чисельним методом дискретної ортогоналізації у поєднанні з методом покрового пошуку [7–10].

Метою дослідження, результати якого викладено у цій статті, є розрахунок вільних частот коливань пружних прямокутних оболонок змінної в обох координатних напрямках товщини в уточненій постановці на основі методу сплайн-апроксимації, а також порівняння отриманих значень частот при різних типах граничних умов на контурах оболонки.

Основні співвідношення. Розглянемо у декартовій системі координат задачу про вільні коливання прямокутної в плані ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$) пологої ортотропної оболонки змінної у двох координатних напрямках товщини $h(x, y)$. Геометрія плану оболонки приблизно ототожню-

ється з геометрією серединної поверхні оболонки, а головні кривини задовольняють співвідношення $k_1 \cdot k_2 \approx 0$.

Міркування проводяться з урахуванням гіпотези Тимошенка – Міндліна: елемент, який до деформації був нормальним до координатної поверхні, після деформації зберігає свою довжину та залишається прямолінійним, але вже не перпендикулярним до поверхні, а повертається на деякий кут. Також враховується, що нормальні напруження на площинах, паралельних до координатної поверхні, є малими порівняно з відповідними напруженнями на поверхнях, перпендикулярних до неї [8].

Відповідно до прийнятої гіпотези, переміщення u_x , u_y , u_z подамо у вигляді

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t), \\ u_y(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t), \\ u_z(x, y, z, t) &= w(x, y, t), \end{aligned} \quad (1)$$

де x , y , z – координати точок оболонки; t – час; u_x , u_y , u_z – відповідні переміщення; u , v , w – переміщення точок координатної поверхні у напрямках x , y , z ; ψ_x , ψ_y – повні кути повороту прямолінійного елемента.

Згідно з (1) вирази для деформацій запишемо як

$$\begin{aligned} e_x(x, y, z, t) &= \varepsilon_x(x, y, t) + z\chi_x(x, y, t), \\ e_y(x, y, z, t) &= \varepsilon_y(x, y, t) + z\chi_y(x, y, t), \\ e_{xy}(x, y, z, t) &= \varepsilon_{xy}(x, y, t) + 2z\chi_{xy}(x, y, t), \\ e_{xz}(x, y, z, t) &\cong \gamma_x(x, y, t), \\ e_{yz}(x, y, z, t) &\cong \gamma_y(x, y, t). \end{aligned}$$

Тут γ_x , γ_y – кути повороту, викликані поперечними зсувами; ε_x , ε_y , ε_{xy} – компоненти тангенціальної деформації, які визначають внутрішню геометрію координатної поверхні; χ_x , χ_y , $2\chi_{xy}$ – компоненти деформації згину, що характеризують згинання і скручування координатної поверхні.

Рівняння, які описують вільні поперечні коливання пологих оболонок, у некласичній теорії типу Тимошенка – Міндліна мають вигляд [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_1 N_x - k_2 N_y + \rho h \omega^2 w &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x + \rho \frac{h^3}{12} \omega^2 \psi_x &= 0, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + \rho \frac{h^3}{12} \omega^2 \psi_y &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

У рівняннях (2) x , y – прямокутні декартові координати точки серединної поверхні $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$; w – прогин; ρ – густина матеріалу.

Для нормальних N_x , N_y і зсувних зусиль N_{xy} , N_{yx} , згинальних M_x , M_y і крутильних моментів M_{xy} , M_{yx} , а також для перерізувальних зусиль

Q_x , Q_y справджуються співвідношення пружності, які у випадку ортотропної оболонки з осями ортотропії, що співпадають з координатними прямими, подамо так:

$$\begin{aligned}
N_x &= C_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w \right) + C_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w \right), \\
N_y &= C_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w \right) + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w \right), \\
N_{xy} &= C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + k_2 D_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \\
N_{yx} &= C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + k_1 D_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \\
M_x &= D_{11} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + k_1^2 w \right) + D_{12} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + k_2^2 w \right), \\
M_y &= D_{12} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + k_1^2 w \right) + D_{22} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + k_2^2 w \right), \\
M_{xy} &= M_{yx} = D_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \\
Q_x &= K_1 \gamma_x = K_1 \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} - k_1 u \right), \\
Q_y &= K_2 \gamma_y = K_2 \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} - k_2 v \right).
\end{aligned}$$

Жорсткісні характеристики C_{ij} , K_i та D_{ij} визначаємо за формулами

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{E_x h}{1 - \nu_x \nu_y}, \quad C_{12} = \nu_y C_{11}, \quad C_{22} = \frac{E_y h}{1 - \nu_x \nu_y}, \quad C_{66} = G_{xy} h, \\
D_{11} &= \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_{12} = \nu_y D_{11}, \\
D_{22} &= \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_{66} = \frac{G_{xy} h^3}{12}, \\
K_1 &= \frac{5}{6} h G_{xz}, \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{yz}. \tag{3}
\end{aligned}$$

У рівняннях (3) E_x , E_y – модулі пружності; G_{xy} , G_{xz} , G_{yz} – модулі зсуву; ν_x , ν_y – коефіцієнти Пуассона.

На контурах оболонки $x = 0$, $x = a$ і $y = 0$, $y = b$ задаємо граничні умови, записані через переміщення і кути повороту.

Наведемо вирази для граничних умов при $x = \text{const}$:

– жорстко закріплений контур:

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = a; \tag{4}$$

– шарнірно закріплений контур:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = a; \tag{5}$$

– один контур жорстко закріплений, а інший – шарнірно закріплений:

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \quad \text{при } x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = 0 \quad \text{при } x = a. \tag{6}$$

Аналогічно можемо записати граничні умови і на контурах $y = 0$, $y = b$, виконавши у рівняннях (4)–(6) заміни: $x \rightarrow y$, $u \rightarrow v$, $\psi_x \rightarrow \psi_y$.

Для розв'язання отриманої двовимірної крайової задачі застосуємо підхід, який базується на апроксимації шуканих функцій в одному з координатних напрямків за допомогою сплайн-функцій, а отриману при цьому одновимірну крайову задачу розв'язуємо з використанням стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації у поєднанні з методом покрокового пошуку [7–10].

Методика розв'язання. Розв'язок системи рівнянь (2) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=0}^N u_i(x) \varphi_{1,i}(y), & v(x, y) &= \sum_{i=0}^N v_i(x) \varphi_{2,i}(y), \\ w(x, y) &= \sum_{i=0}^N w_i(x) \varphi_{3,i}(y), \\ \psi_x(x, y) &= \sum_{i=0}^N \psi_{x_i}(x) \varphi_{4,i}(y), & \psi_y(x, y) &= \sum_{i=0}^N \psi_{y_i}(x) \varphi_{5,i}(y), \end{aligned} \quad (7)$$

де $u_i(x)$, $v_i(x)$, $w_i(x)$, $\psi_{x_i}(x)$, $\psi_{y_i}(x)$, $i = 0, \dots, N$, – шукані функції; $\varphi_{j,i}(y)$, $j = 1, \dots, 5$, – лінійні комбінації B -сплайнів на рівномірній сітці Δ : $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_N = b$, що задовольняють граничні умови на контурах $y = 0$ та $y = b$.

У розглядуваному випадку обмежимося апроксимацією сплайн-функціями третього степеня:

$$B_3^i(y) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0, & -\infty < y < y_{i-2}, \\ z^3, & y_{i-2} \leq y < y_{i-1}, \\ -3z^3 + 3z^2 + 3z + 1, & y_{i-1} \leq y < y_i, \\ 3z^3 - 6z^2 + 4, & y_i \leq y < y_{i+1}, \\ (1-z)^3, & y_{i+1} \leq y < y_{i+2}, \\ 0, & y_{i+2} \leq y < \infty, \end{cases}$$

де $z = (y - y_k)/h_y$ на інтервалі $[y_k, y_{k+1}]$, $k = i - 2, \dots, i + 1$, $i = -1, \dots, N + 1$, $h_y = y_{k+1} - y_k = \text{const}$.

При цьому функції $\varphi_{j,i}(y)$ формуємо таким чином:

– якщо відповідна розв'язувальна функція дорівнює нулеві, тоді

$$\varphi_{j,0}(y) = -4B_3^{-1}(y) + B_3^0(y), \quad \varphi_{j,1}(y) = B_3^{-1}(y) - \frac{1}{2}B_3^0(y) + B_3^1(y),$$

$$\varphi_{j,i}(y) = B_3^i(y), \quad i = 2, 3, \dots, N - 2;$$

– якщо похідна за y від розв'язувальної функції дорівнює нулеві, тоді

$$\varphi_{j,0}(y) = B_3^0(y), \quad \varphi_{j,1}(y) = B_3^{-1}(y) - \frac{1}{2}B_3^0(y) + B_3^1(y),$$

$$\varphi_{j,i}(y) = B_3^i(y), \quad i = 2, 3, \dots, N - 2.$$

Аналогічні формули маємо і для функцій $\varphi_{j,N-1}(y)$, $\varphi_{j,N}(y)$.

Підставивши (7) у рівняння (2), будемо вимагати, щоб рівняння (2) виконувались у заданих точках колокації $\xi_k \in [0, b]$, $k = 0, \dots, N$. У випадку парного числа вузлів сітки ($N = 2n + 1$, $n \geq 3$) і при умові, що $\xi_{2i} \in [y_{2i}, y_{2i+1}]$, $\xi_{2i+1} \in [y_{2i}, y_{2i+1}]$, $i = 0, \dots, n$, на відрізку $[y_{2i}, y_{2i+1}]$ маємо

два вузли колокації, а на сусідніх відрізках $[y_{2i+1}, y_{2i+2}]$ вузли колокації відсутні. На кожному з відрізків $[y_{2i}, y_{2i+1}]$ точки колокації вибираємо таким чином: $\xi_{2i} = y_{2i} + z_1 h$, $\xi_{2i+1} = y_{2i} + z_2 h$, $i = 0, \dots, n$, де z_1, z_2 – корені полінома Лежандра другого порядку на відрізку $[0, 1]$: $z_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{6}$. Такий вибір точок колокації є оптимальним і значно підвищує порядок точності апроксимації. Після перетворень отримуємо систему $N + 1$ лінійних диференціальних рівнянь відносно $u_i, v_i, w_i, \psi_{x_i}, \psi_{y_i}$.

Отриману систему звичайних диференціальних рівнянь можна звести до нормального вигляду:

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = A(x, \omega)\bar{Y}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= [\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{\psi}_x, \bar{\psi}'_x, \bar{\psi}_y, \bar{\psi}'_y]^T = \\ &= [u_0, \dots, u'_N, v_0, \dots, v'_N, w_0, \dots, w'_N, \psi_{x_0}, \dots, \psi'_{x_N}, \psi_{y_0}, \dots, \psi'_{y_N}]^T \end{aligned}$$

– вектор-стовпчик шуканих функцій і їх похідних розмірністю $10(N + 1)$; $A(x, \omega)$ – квадратна матриця порядку $10(N + 1) \times 10(N + 1)$.

Аналогічно формулюємо граничні умови (4)–(6) для системи рівнянь (2):

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{0}, \quad B_2 \bar{Y}(a) = \bar{0}. \quad (9)$$

Задачу на власні значення для системи звичайних диференціальних рівнянь (8) з граничними умовами (9) розв'язували методом дискретної ортогоналізації у поєднанні з методом покрокового пошуку [8, 9].

Результати дослідження. За допомогою запропонованої методики проведено дослідження спектра власних частот коливань ортотропної пологої оболонки змінної в обох координатних напрямках товщини $h(x, y)$. Об'єктом дослідження була циліндрична оболонка з квадратним планом $a = b = 0.5$ м і безрозмірним радіусом кривини $r_x = \frac{R_x}{a} = 1.3$, $k_x = 1.538 \text{ м}^{-1}$, $k_y = 0$.

Товщина оболонки змінювалася за законом

$$h(x, y) = h_0 \left(1 + \alpha \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \beta \cos \frac{\pi y}{b} \right), \quad (10)$$

де параметри $|\alpha| \leq 0.5$ та $|\beta| \leq 0.5$ змінювались з кроком 0.1, h_0 – товщина оболонки сталої товщини та еквівалентної маси (прийнято $h_0 = 0.04$ м).

Фізичні параметри матеріалу оболонки:

$$\begin{aligned} E_x &= 3.68 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad E_y = 2.68 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G_{xy} = 0.50 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G_{yz} = 0.41 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\ G_{xz} &= 0.45 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \nu_x = 0.077, \quad \nu_y = 0.105, \quad \rho = 1870 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Задачу розв'язували для п'яти типах граничних умов на контурах оболонки:

1°) шарнірне опирання всіх сторін оболонки (тип граничних умов **ГУ-1°**):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a,$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial y} = w = \psi_x = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b;$$

2°) жорстке закріплення по всьому контуру (**ГУ-2°**):

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a,$$

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b;$$

3°) жорстке закріплення трьох сторін і шарнірне опирання четвертої сторони (ГУ-3°):

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \quad y = 0,$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial y} = w = \psi_x = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = b;$$

4°) жорстке закріплення двох протилежних сторін і шарнірне опирання двох інших сторін (ГУ-4°):

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a,$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial y} = w = \psi_x = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b;$$

5°) жорстке закріплення двох суміжних сторін і шарнірне опирання двох інших сторін (ГУ-5°):

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad y = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = 0 \quad \text{при} \quad x = a,$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial y} = w = \psi_x = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = b.$$

Точність розрахунку частот вільних коливань досліджуваної оболонки за допомогою методу сплайн-колокації перевіряли шляхом порівняння отриманих результатів з відповідними значеннями частот, розрахованими аналітично шляхом розкладання невідомих функцій в подвійні ряди Фур'є за формулами

$$u = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$v = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b},$$

$$w = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$\psi_x = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} d_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$\psi_y = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} e_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (11)$$

У табл. 1 подано значення перших чотирьох безрозмірних частот коливань $\bar{\omega}_i$ оболонки сталого товщини ($h(x, y) = h_0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$). Тут у стовпці I наведено аналітично розраховані частоти за формулою (11), у стовпці II наведено відповідні частоти, отримані шляхом обчислень з використанням методу сплайн-апроксимації при шарнірному закріпленні всіх контурів оболонки (ГУ-1°) і кількості точок колокації $N = 18$, П – різниця, виражена у відсотках. Як бачимо, різниця між частотами не перевищує 0.2%, що свідчить про високу точність і надійність запропонованого методу для розрахунку вільних частот коливань оболонок.

Таблиця 1

	$\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D_{11}}$		
i	I	II	П, %
1	18.0714	18.0723	0.01
2	39.1647	39.1656	0.00
3	40.3978	40.4562	0.14
4	55.0759	55.1162	0.07

Виконано дослідження залежності значень частот $\bar{\omega}_i$, розрахованих запропонованим методом сплайн-апроксимації, від кількості точок колокації N . Результати досліджень містяться в табл. 2 і табл. 3. Кількість точок колокації змінювалась від $N = 8$ до $N = 22$ з кроком 2.

У табл. 2 наведено перші чотири безрозмірні частоти коливань оболонки змінної товщини при $\alpha = -0.4$, $\beta = -0.4$ і граничних умовах на контурах типу $\Gamma\mathcal{U}-2^\circ$, у табл. 3 – при $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.4$ і $\Gamma\mathcal{U}-5^\circ$.

Як бачимо з табл. 2 і табл. 3, значення частот коливань при будь-якому характері зміни товщини оболонки та граничних умовах на краях істотно залежать від кількості точок колокації при малих значеннях N . Зі збільшенням кількості точок колокації величини частот зменшуються, при цьому точність розрахунків зростає. Вже при $N = 16$ у більшості випадків можна отримати задовільну точність результату. У цьому дослідженні всі розрахунки виконано при $N = 18$.

Таблиця 2

		$\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D_{11}}$ (при $\alpha = -0.4$, $\beta = -0.4$, $\Gamma\mathcal{U}-2^\circ$)							
$i \backslash N$		8	10	12	14	16	18	20	22
1		37.8216	37.6029	37.5358	37.5052	37.4896	37.4775	37.4736	37.4707
2		50.1194	49.6381	49.4826	49.4184	49.3815	49.3601	49.3460	49.3378
3		57.2793	55.1016	54.4211	54.1509	54.0187	53.9438	53.8996	53.8728
4		70.5151	68.6243	67.9049	67.6240	67.4874	67.4081	67.3610	67.3304

Таблиця 3

		$\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D_{11}}$ (при $\alpha = -0.4$, $\beta = 0.4$, $\Gamma\mathcal{U}-5^\circ$)							
$i \backslash N$		8	10	12	14	16	18	20	22
1		24.2309	24.0705	24.0156	23.9884	23.9738	23.9660	23.9607	23.9573
2		41.9581	41.3797	41.0915	40.9476	40.8703	40.8241	40.7954	40.7775
3		45.8808	44.6802	44.2145	44.0298	43.9408	43.8947	43.8660	43.8490
4		61.4790	60.6186	60.0164	59.7364	59.5949	59.5157	59.4676	59.4370

На рис. 1 – рис. 10 наведено графіки залежності від параметрів α та β безрозмірних частот вільних коливань $\bar{\omega}_i$ ортотропної оболонки змінної в обох координатних напрямках товщини: на рис. 1, рис. 2 – перші дві частоти коливань при граничних умовах на контурах оболонки типу $\Gamma\mathcal{U}-1^\circ$, на рис. 3, рис. 4 – при $\Gamma\mathcal{U}-2^\circ$, на рис. 5, рис. 6 – при $\Gamma\mathcal{U}-3^\circ$, на рис. 7, рис. 8 при – $\Gamma\mathcal{U}-4^\circ$, на рис. 9, рис. 10 – при $\Gamma\mathcal{U}-5^\circ$.

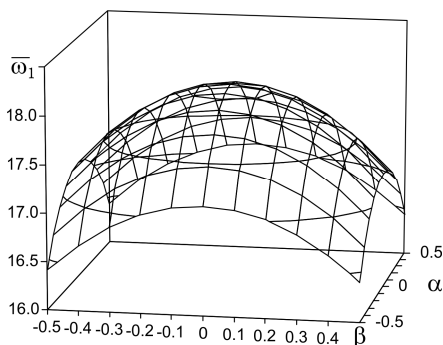


Рис. 1

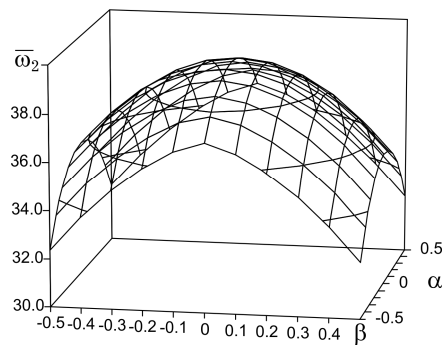


Рис. 2

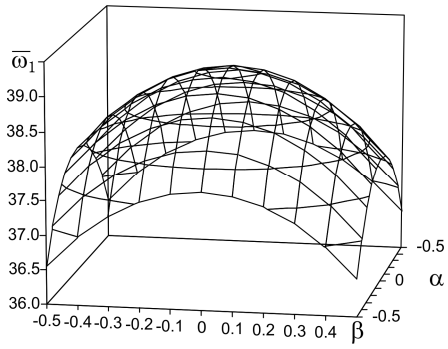


Рис. 3

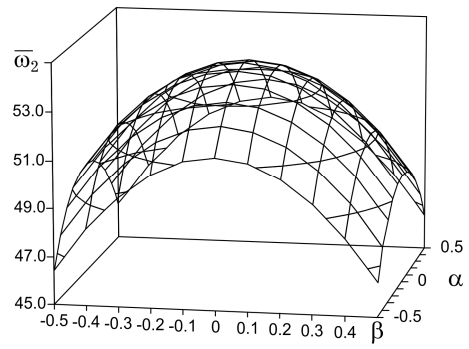


Рис. 4

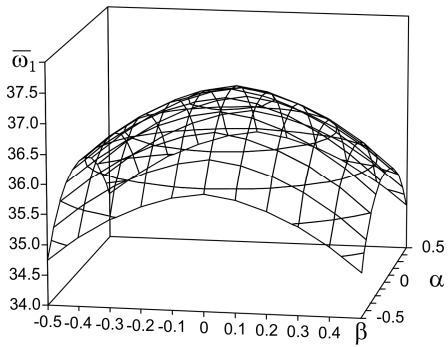


Рис. 5

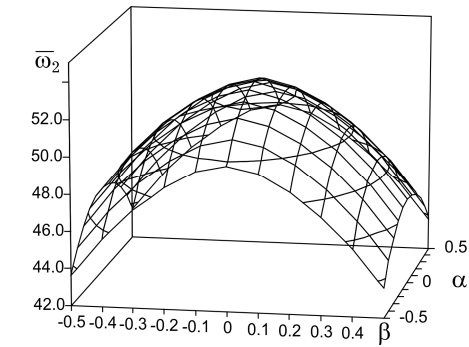


Рис. 6

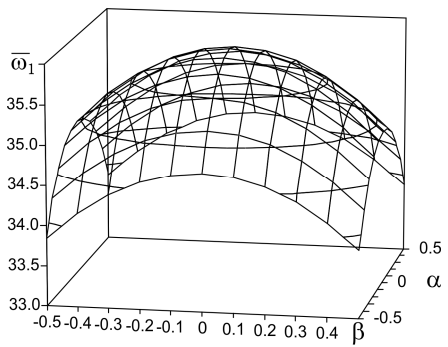


Рис. 7

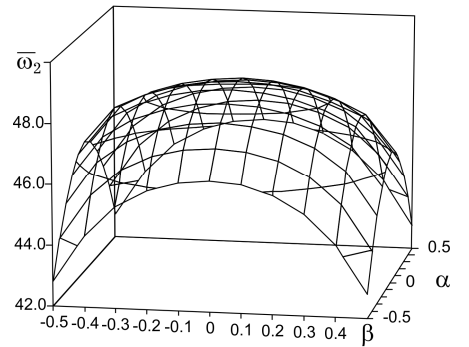


Рис. 8

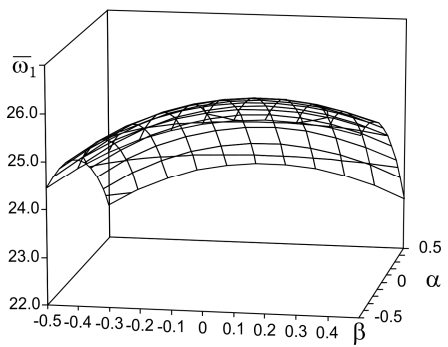


Рис. 9

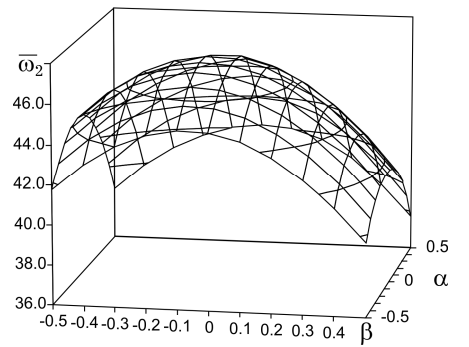


Рис. 10

З аналізу графіків на рис. 1 – рис. 10 випливають такі висновки:

- залежності частот пологих ортотропних циліндричних оболонок від параметрів α та β для всіх типів граничних умов подібні;

- при заданому значенні параметра $\alpha = \text{const}$ частоти коливань оболонок з будь-яким однаковим за модулем і протилежним за знаком значенням параметра β є майже однаковими для всіх розглядуваних типів граничних умов;

- аналогічно, за тих самих граничних умов, у випадках, коли параметр $\beta = \text{const}$, частоти вільних коливань є майже однаковими при однакових за модулем і протилежних за знаками значеннях параметра α ;

- для всіх розглядуваних типів граничних умов частоти вільних коливань циліндричних оболонок утворюють просторові поверхні, що нагадують параболоїд, симетричний відносно координатних площин $\alpha = 0$ і $\beta = 0$;

- значення частот вільних коливань циліндричних ортотропних оболонок сталої товщини ($\alpha = 0$ і $\beta = 0$) завжди є більшими від відповідних частот оболонок змінної за законом (10) товщини за будь-яких типів граничних умов;

- резонансні частоти коливань ортотропних пологих оболонок змінної в обох координатних напрямках за законом (10) товщини зростають зі зменшенням за модулем значення параметра α (при сталому значенні β) або β (при сталому α).

Це означає, що при будь-якому типі граничних умов на контурах шляхом підбору відповідним чином значень параметрів зміни товщини α , β можна в досить широкому діапазоні варіювати значеннями частот і форм вільних коливань ортотропних циліндричних пологих оболонок.

На рис. 11 наведено форми вільних коливань пологих ортотропних циліндричних оболонок змінної у двох координатних напрямках товщини при жорсткому закріпленні оболонок по контуру (тип граничних умов $\Gamma\mathcal{U}-1^\circ$) при $\alpha = 0.3$, $\beta = -0.2$.

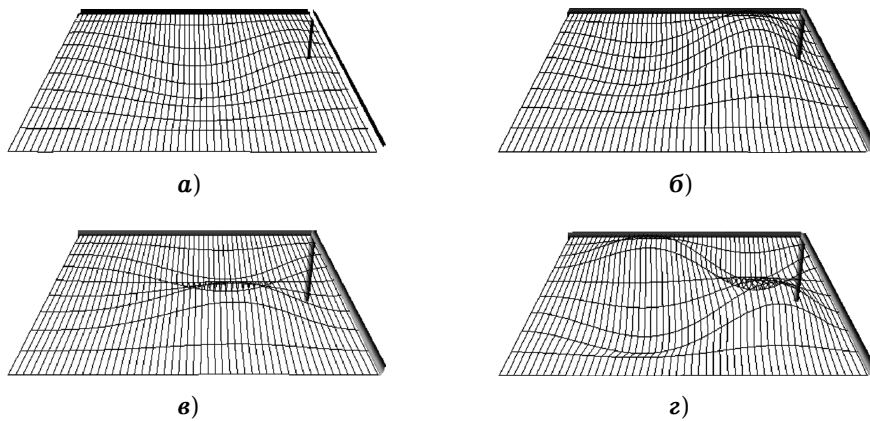


Рис. 11

Можна спостерігати ефект симетричності форм вільних коливань досліджуваних оболонок відносно площин $x = a/2$, $y = b/2$, $z = 0$, однак помітний він лише для великих за модулем значень α . Симетрія форм вільних коливань спостерігається також при заданому $\alpha = \text{const}$ для різних β . Центри амплітуд коливань зміщені у напрямку з меншою жорсткістю.

Для однакових за модулем і протилежних за знаком α і β перші форми є симетричними відносно площини плану, а вищі форми – відносно площин, що проходять через діагоналі плану оболонок.

У роботі розвинуто ефективний чисельний метод, який базується на зведенні системи диференціальних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами, що відповідає механіко-математичній моделі вільних коливань анізотропних пологих товстостінних оболонок зі змінною товщиною у двох координатних напрямках в рамках уточненої теорії Тимошенка –Міндліна, до системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку. Для розв'язання отриманої системи застосовано метод дискретної ортогоналізації разом з методом покрокового пошуку. На основі розробленого підходу проведено дослідження вільних коливань пологої ортотропної оболонки, товщина якої змінюється у двох координатних напрямках. Виконано аналіз впливу характеру зміни товщини оболонки на розподіл її динамічних характеристик.

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. Будак В. Д., Григоренко А. Я., Пузырев С. В. О свободных колебаниях прямоугольных в плане ортотропных пологих оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 6. – С. 102–115.
Te same: Budak V. D., Grigorenko A. Ya., Puzyrev S. V. Free vibrations of rectangular orthotropic shallow shells with varying thickness // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 6. – P. 670–682.
3. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач о свободных колебаниях прямоугольных пластин переменной толщины // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 10. – С. 90–99.
Te same: Grigorenko A. Ya., Efimova T. L. Spline-approximation method applied to solve natural-vibration problems for rectangular plates of varying thickness // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 10. – P. 1161–1169.
4. Григоренко А. Я., Золотой Ю. Г., Пригода А. П., Жук И. Ю., Хоришко В. В., Овчаренко А. В. Экспериментальное исследование собственных колебаний толстостенной цилиндрической оболочки методом голографической интерферометрии // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 3. – С. 93–98.
Te same: Grigorenko A. Ya., Zolotoi Yu. G., Prigoda A. P., Zhuk I. Yu., Khorishko V. V., Ovcharenko A. V. Experimental investigation of natural vibrations of a thick-walled cylindrical shell by the method of holographic interferometry // J. Math. Sci. – 2013. – **194**, No. 3. – P. 239–244.
5. Григоренко А. Я., Пархоменко А. Ю. Свободные колебания пологих прямоугольных в плане ортотропных оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 8. – С. 29–41.
Te same: Grigorenko A. Ya., Parkhomenko A. Yu. Free vibrations of shallow orthotropic shells with variable thickness and rectangular planform // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, No. 8. – P. 877–889.
6. Григоренко А. Я., Пузырев С. В., Волчек Е. А. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощью метода сплайн-коллокации // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 3. – С. 60–69.
Te same: Grigorenko A. Ya., Puzyrev S. V., Volchek E. A. Investigation of free vibrations of noncircular cylindrical shells by the spline-collocation method // J. Math. Sci. – 2012. – **185**, No. 6. – P. 824–836.
7. Григоренко О. Я., Ефимова Т. Л., Лоза І. А. Розв'язання осесиметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченної довжини методом сплайн-колокацій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 112–120.
Te same: Grigorenko O. Ya., Efimova T. L., Loza I. A. Solution of an axisymmetric problem of free vibrations of piezoceramic hollow cylinders of finite length by the spline collocation method // J. Math. Sci. – 2010. – **165**, No. 2. – P. 290–300.
8. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
9. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под ред. А. Н. Гузя. – Т. 4.)

10. *Ефимова Т. Л.* Решение задач о свободных крутильных колебаниях толстостенных ортотропных неоднородных цилиндров // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2009. – **52**, № 1. – С. 92–100.
 The same: *Efimova T. L.* Solution of problems of free torsional vibrations of thick-walled orthotropic inhomogeneous cylinders // *J. Math. Sci.* – 2010. – **168**, No. 4. – P. 613–623.
11. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
 The same: *Lekhnitsky S. G.* Theory of elasticity of an anisotropic elastic body. – San Francisco: Holden Day, 1963. – xi + 404 p.
12. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
13. *Dawe D. J.* Finite strip models for vibration of Mindlin plates // *J. Sound Vib.* – 1978. – **59**, No. 3. – P. 441–452.
14. *Mindlin R. D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1951. – **18**. – P. 31–38.
15. *Mizusawa T., Kondo Y.* Application of the spline element method to analyze vibration of skew Mindlin plates with varying thickness in one direction // *J. Sound Vib.* – 2001. – **241**, No. 3. – P. 485–501.

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ
 НЕТОНКОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ
 ТОЛЩИНЫ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ**

Рассмотрена задача об исследовании спектра собственных колебаний нетонкой ортотропной пологой оболочки переменной в двух координатных направлениях толщины в неклассической постановке. Подход к решению полученной двумерной краевой задачи основывается на сведении ее с помощью сплайн-аппроксимации неизвестных функций по одному из координатных направлений к одномерной задаче с последующим ее решением. Исследованы разные случаи граничных условий на контурах оболочки. Проведено сравнение и анализ собственных частот и форм колебаний ортотропных оболочек постоянной и переменной толщины.

**SOLVING THE PROBLEM ON FREE VIBRATIONS OF A
 NON THIN ORTHOTROPIC SHALLOW SHELL OF VARIABLE
 THICKNESS IN A REFINED STATEMENT**

The problem on studying the spectrum of natural vibrations of a non thin orthotropic shallow shell of variable in two coordinate directions thickness is considered in the non-classical statement. The approach to the solution of received two-dimensional boundary value problem is based on its reduction by means of the spline-approximation of unknown functions in one of the coordinate directions to the one-dimensional problem with its subsequent solution. The different cases of boundary conditions on the shell edges are investigated. The comparison and analysis of natural frequencies and forms of vibrations of orthotropic shells of constant and variable thickness are carried out.

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
 НАН України, Київ,
² Миколаїв. нац. ун-т
 ім. В. О. Сухомлинського, Миколаїв

Одержано
 21.03.15