

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НАБЛИЖЕННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТОНКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ЗА ДОПОМОГОЮ ПОЛІНОМІВ ЛЕЖАНДРА ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ ТЕПЛОБМІНІ

За допомогою апроксимації N -го порядку функції температури та її першої похідної поліномами Лежандра побудовано розв'язок задачі теплопровідності тонкостінної пологої ізотропної оболонки та записано систему розв'язувальних рівнянь для N -го наближення. Для першого та третього наближень розв'язано задачу при зосереджених джерелах тепла. Для третього наближення побудовано графіки залежності температури від відстані до джерела тепла та від кривини оболонки при симетричному та несиметричному стаціонарному теплообміні.

Вступ. Фундаментальні розв'язки теплопровідності та термопружності в теорії пластин і оболонок отримали свій розвиток при розв'язуванні задач про дію зосереджених джерел тепла в тонкостінних елементах конструкцій.

При моделюванні теплових впливів на тонкостінні елементи конструкцій фундаментальні розв'язки є основним інструментом, що дозволяє досліджувати задачі про зосереджений і локальний нагрів. За своєю сутністю фундаментальні розв'язки є природною математичною моделлю зварювального процесу. У статті [2] одержано фундаментальний розв'язок рівнянь термопружності трансверсально-ізотропних пластин. Питання моделювання різних технологічних операцій, пов'язаних із локальним впливом температури, є актуальними в наш час. Наприклад, у статті [4] запропоновано математичну модель газолазерного різання металевих пластин в інертному газі. У роботі [5] розроблено метод розрахунку контактних задач для анізотропних пластин на основі апроксимації шуканих функцій поліномами Лежандра і побудовано наближення нульового і першого порядків нестационарного рівняння теплопровідності оболонок. До публікацій останніх років можна віднести працю [1], де з використанням підходу [5] побудовано наближений розв'язок рівняння теплопровідності для анізотропної пластини у вигляді ряду за поліномами Лежандра довільного N -го порядку.

Оскільки пластина є лише окремих випадком оболонки, то подальші дослідження теплових процесів будуть пов'язані саме з оболонками. У цій роботі побудовано наближення першого та третього порядку рівняння теплопровідності для пологої ізотропної оболонки за допомогою апроксимації функцій температури та її першої похідної поліномами Лежандра.

1. Постановка задачі. Розглянемо тонкостінну ізотропну оболонку товщини $2h$ у криволінійній системі координат α, β, γ , яка містить джерела тепла об'ємної густини $W_0(\alpha, \beta, \gamma)$. Тепловий контакт оболонки з навколишнім середовищем відбувається за законом Ньютона. Рівняння теплопровідності для ізотропної оболонки в цьому випадку має вигляд [5, 6]

$$\nabla^2 T = -\frac{1}{\lambda} W_0, \quad \nabla^2 = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + (k_1 + k_2) \frac{\partial}{\partial \gamma},$$

де T – функція температури, W_0 – об'ємна густина джерел тепла, λ – коефіцієнт теплопровідності, A, B – коефіцієнти першої квадратичної форми, k_1, k_2 – головні кривини серединної поверхні оболонки.

Тепловий стан вважаємо локальним, тобто таким, що не поширюється до лінії зовнішньої межі оболонки. Тому оболонку вважаємо нескінченною і припускаємо, що шукані значення температури наближаються до нуля на

нескінченності. Коректність цього припущення перевірена у численних дослідженнях. Тому крайова умова на безмежності матиме вигляд

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T = 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} T = 0.$$

Дослідження виконаємо для пологої оболонки товщини $2h$ у декартовій системі координат $x(\alpha)$, $y(\beta)$, $z(\gamma)$ (рис. 1). Для пологих оболонок геометрія поверхонь співпадає з геометрією їх проекцій. Коефіцієнти першої квадратичної форми в декартовій системі координат дорівнюють одиниці: $A = B = 1$ [8].

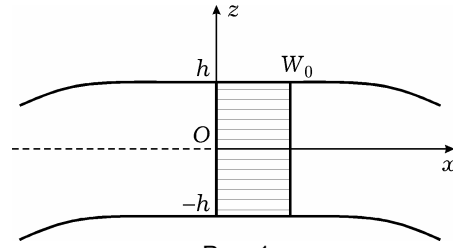


Рис. 1

Тоді рівняння теплопровідності запишеться так:

$$\Delta T + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (k_1 + k_2) \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{\lambda} W_0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Оболонка перебуває у тепловому контакті з навколишнім середовищем за законом Ньютона. Температуру навколишнього середовища для поверхонь $z = h$ і $z = -h$ відповідно позначимо через θ^+ і θ^- . Тому крайові умови на лицьових поверхнях оболонки подамо так [6]:

$$\partial_z T|_{z=\pm h} \pm \frac{\alpha^\pm}{\lambda} (T|_{z=\pm h} - \theta^\pm) = 0. \quad (2)$$

Тут α^\pm – коефіцієнт теплообміну на поверхнях $z = \pm h$, а $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$.

2. Знаходження наближеного розв'язку порядку N . Введемо функцію $Q = \partial_z T$. Тоді рівняння (1) набуде вигляду

$$\Delta T + \partial_z Q + 2k_0 Q = -\frac{1}{\lambda} W_0, \quad Q = \partial_z T, \quad (3)$$

де $k_0 = (k_1 + k_2)/2$ – середня кривина.

Наближений розв'язок задачі шукаємо, використовуючи апроксимацію функції T і її першої похідної Q поліномами Лежандра. Наближення порядку N рівняння (3) будемо, використовуючи часткові суми для шуканих і заданих функцій:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=0}^N T_k P_k, & T_k &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h T P_k dz, \\ Q &= \sum_{k=0}^{N+1} Q_k P_k, & Q_k &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h Q P_k dz, \\ W_0 &= \sum_{k=0}^N W_{0k} P_k, & W_{0k} &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h W_0 P_k dz, \end{aligned} \quad (4)$$

де $P_k = P_k\left(\frac{z}{h}\right)$ – поліноми Лежандра:

$$P_k(\psi) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{d\psi^k} [(\psi^2 - 1)^k], \quad -1 \leq \psi \leq 1.$$

У точках $\psi = \pm 1$ значення P_k відомі: $P_k(1) = 1$, $P_k(-1) = (-1)^k$.

При цьому також справджуються такі рекурентні залежності між компонентами температури T_k і її першої похідної Q_k [5]:

$$\frac{Q_{k-1}}{2k-1} - \frac{Q_{k+1}}{2k+3} = \frac{1}{h} T_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Також відомо [5], що компоненти температури T_k і функції Q_k задовольняють диференціальні рівняння

$$\begin{aligned} \Delta T_k + \frac{2k+1}{h} \left(\frac{Q^+ - Q^-}{2} - \sum_{i=1,3,\dots}^{k-1} Q_i \right) + 2k_0 Q_k &= -\frac{1}{\lambda} W_{0k}, \quad k = 0, 2, \dots, N_0, \\ \Delta T_k + \frac{2k+1}{h} \left(\frac{Q^+ + Q^-}{2} - \sum_{i=0,2,\dots}^{k-1} Q_i \right) + 2k_0 Q_k &= -\frac{1}{\lambda} W_{0k}, \quad k = 0, 2, \dots, N_1, \end{aligned} \quad (6)$$

де $Q^\pm = Q(x, y, \pm h)$. Тут $N_0 = N$, $N_1 = N - 1$, якщо N парне, і $N_0 = N - 1$, $N_1 = N$, якщо N непарне.

Зі структури рівнянь (6) випливає, що додаткова «кривинна» частина, яка для пластини дорівнює нулеві, міститься лише в одному елементі – в доданку $2k_0 Q_k$. Тому подальші перетворення зручно розділити на дві логічні частини: плоску – все те, що не включає «кривинної» частини і є еквівалентним перетворенням для пластин, і «кривинну» частину – те, що стоїть в перетворенні тільки частини з кривиною для оболонки.

Перетворення для плоскої частини виконано в роботі [1] та отримано систему

$$\Delta T_k + \sum_{i=0}^N A_{ki} \frac{T_i}{h^2} = -\frac{1}{\lambda} W_{0k} - \frac{\theta_k}{h^2}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{2k+1}{3} \theta_1^* N_{0k}^*, \quad k = 0, 2, \dots, N_0, \\ \theta_k &= (2k+1) \theta_0^* N_{1k}^*, \quad k = 1, 3, \dots, N_1, \\ N_{mj}^* &= \frac{1}{2} (N_m + j + 3)(N_m - j + 2). \end{aligned}$$

Елементи матриці $A_N = \|A_{ki}\|$ з використанням позначень [1]

$$\begin{aligned} \alpha_{ki} &= -\alpha_N N_{0i}^* N_{1k}^*, & \beta_{ki} &= (\beta_N N_{1i}^* - 1) N_{1k}^*, \\ \delta_{ki} &= (\delta_N N_{0i}^* - 1) N_{0k}^*, & \alpha_N &= \frac{1}{\Delta_N^*} (Bi^+ - Bi^-), \\ \beta_N &= \frac{1}{\Delta_N^*} (Bi^+ + Bi^- + 2N_{00}^*), & \delta_N &= \frac{1}{\Delta_N^*} (Bi^+ + Bi^- + 2N_{10}^*), \\ \theta_0^* &= \frac{1}{\Delta_N^*} [Bi^+ Bi^- (\theta^+ - \theta^-) + N_{00}^* (Bi^+ \theta^+ - Bi^- \theta^-)], \\ \theta_1^* &= \frac{3}{\Delta_N^*} [Bi^+ Bi^- (\theta^+ + \theta^-) + N_{10}^* (Bi^+ \theta^+ + Bi^- \theta^-)], \\ \Delta_N^* &= 2Bi^+ Bi^- + (N_{00}^* + N_{10}^*) (Bi^+ + Bi^-) + 2N_{00}^* N_{10}^* \end{aligned}$$

мають структуру, подану в табл. 1. Тут $Bi^\pm = \alpha^\pm h / \lambda$ – значення критерію Біо на поверхнях $z = \pm h$.

Таблиця 1

A_{ki}	
$k = 0, 2, \dots, N_0$	$k = 1, 3, \dots, N_1$
$(2k + 1)\alpha_{ik}, \quad i = 1, 3, \dots, N_1$	$(2k + 1)\alpha_{ki}, \quad i = 0, 2, \dots, N_0$
$(2k + 1)\delta_{ki}, \quad i = 0, 2, \dots, k$	$(2k + 1)\beta_{ki}, \quad i = 1, 3, \dots, k$
$(2k + 1)\delta_{ik}, \quad i = k + 2, k + 4, \dots, N_0$	$(2k + 1)\beta_{ik}, \quad i = k + 2, k + 4, \dots, N_1$

Далі переходимо до перетворень «кривинної» частини. Виразимо компоненти функції Q_k через компоненти температури T_k . З рекурентних залежностей (5) випливає, що

$$\begin{aligned} Q_k &= (2k + 1) \left\{ Q_0 - \sum_{i=1,3,\dots}^{k-1} \frac{T_i}{h} \right\}, \quad k = 2, 4, \dots, N_1 + 1, \\ Q_k &= (2k + 1) \left\{ \frac{Q_1}{3} - \sum_{i=2,4,\dots}^{k-1} \frac{T_i}{h} \right\}, \quad k = 3, 5, \dots, N_0 + 1. \end{aligned} \quad (8)$$

За допомогою співвідношень, отриманих у роботі [1]

$$\begin{aligned} Q_0 &= -N_{00}^* \alpha_N \frac{T_0}{h} + \beta_N S_1 - \alpha_N S_2 + \frac{\theta_0^*}{h}, \\ Q_1 &= -3\gamma_N \frac{T_0}{h} - 3\alpha_N S_1 + 3\delta_N S_2 + \frac{\theta_1^*}{h}, \\ S_1 &= \sum_{i=1,3,\dots}^{N_1} N_{1i}^* \frac{T_i}{h}, \quad S_2 = \sum_{i=2,4,\dots}^{N_0} N_{0i}^* \frac{T_i}{h}, \\ \gamma_N &= \frac{1}{\Delta_N^*} [2\text{Bi}^+ \text{Bi}^- + N_{10}^* (\text{Bi}^+ + \text{Bi}^-)], \end{aligned}$$

запишемо Q_0 та $Q_1/3$ через T_i , підставивши в них вирази S_1 і S_2 :

$$\begin{aligned} Q_0 &= -\alpha_N N_{00}^* \frac{T_0}{h} + \beta_N \sum_{i=1,3,\dots}^{N_1} N_{1i}^* \frac{T_i}{h} - \alpha_N \sum_{i=2,4,\dots}^{N_0} N_{0i}^* \frac{T_i}{h} + \frac{\theta_0^*}{h}, \\ \frac{Q_1}{3} &= -\gamma_N \frac{T_0}{h} - \alpha_N \sum_{i=1,3,\dots}^{N_1} N_{1i}^* \frac{T_i}{h} + \delta_N \sum_{i=2,4,\dots}^{N_0} N_{0i}^* \frac{T_i}{h} + \frac{\theta_1^*}{3h}. \end{aligned}$$

Підставляємо тепер ці вирази у (8) та з урахуванням співвідношення $\gamma_N = \delta_N N_{00}^* - 1$ отримуємо формули для Q_k :

$$\begin{aligned} Q_k &= (2k + 1) \left\{ \sum_{i=0,2,\dots}^{N_0} -\alpha_N N_{0i}^* \frac{T_i}{h} + \left[\sum_{i=1,3,\dots}^{k-1} (\beta_N N_{1i}^* - 1) \frac{T_i}{h} + \sum_{i=k+1,k+3,\dots}^{N_1} \beta_N N_{1i}^* \frac{T_i}{h} \right] + \frac{\theta_0^*}{h} \right\}, \quad k = 2, 4, \dots, N_1 + 1, \\ Q_k &= (2k + 1) \left\{ \sum_{i=1,3,\dots}^{N_1} -\alpha_N N_{0i}^* \frac{T_i}{h} + \left[\sum_{i=0,2,\dots}^{k-1} (\gamma_N N_{0i}^* - 1) \frac{T_i}{h} + \sum_{i=k+1,k+3,\dots}^{N_0} \delta_N N_{0i}^* \frac{T_i}{h} \right] + \frac{\theta_0^*}{h} \right\}, \quad k = 3, 5, \dots, N_0 + 1. \end{aligned}$$

Тепер «кривинну» частину до системи (7) можемо подати у вигляді

$$2k_0 \sum_{i=0}^N B_{ki} \frac{T_i}{h^2} = -2k_0 \frac{\tau_k}{h^2}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (9)$$

де k_0 – середня кривина: $k_0 = (1/R_1 + 1/R_2)/2$, R_1, R_2 – радіуси кривини;

$$\tau_k = \begin{cases} (2k+1)\theta_0^*, & k = 0, 2, \dots, N_0, \\ (2k+1)\frac{\theta_1^*}{3}, & k = 1, 3, \dots, N_1, \end{cases}$$

а елементи матриці $B_N = \|B_{ki}\|$ з використанням позначень

$$\varphi_i = -\alpha_N N_{0i}^*, \quad \psi_i = \beta_N N_{1i}^* - 1, \quad \chi_i = -\alpha_N N_{1i}^*, \quad \omega_i = \delta_N N_{0i}^* - 1$$

мають структуру, наведену в табл. 2.

Таблиця 2

B_{ki}	
$k = 0, 2, \dots, N_0$	$k = 1, 3, \dots, N_1$
$(2k+1)\varphi_i,$ $i = 0, 2, \dots, N_0$	$(2k+1)\chi_i,$ $i = 1, 3, \dots, N_1$
$(2k+1)\psi_i,$ $i = 1, 3, \dots, k-1$	$(2k+1)\omega_i,$ $i = 0, 2, \dots, k-1$
$(2k+1)(\psi_i + 1),$ $i = k+1, k+3, \dots, N_1$	$(2k+1)(\omega_i + 1),$ $i = k+1, k+3, \dots, N_0$

Об'єднуючи тепер системи (7) і (9), остаточно отримуємо

$$\Delta T_k + \sum_{i=0}^N (A_{ki} + 2k_0 B_{ki}) \frac{T_i}{h^2} = -\frac{1}{\lambda} W_{0k} - \frac{\theta_k + 2k_0 \tau_k}{h^2}, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

або

$$\Delta T_k + \sum_{i=0}^N C_{ki} \frac{T_i}{h^2} = -\frac{1}{\lambda} W_{0k} - \frac{\Theta_k}{h^2}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (10)$$

де $\Theta_k = \theta_k + 2k_0 \tau_k$, а елементи матриці $C_N = \|C_{ki}\|$ мають структуру, наведену в табл. 3.

Таблиця 3

C_{ki}	
$k = 0, 2, \dots, N_0$	$k = 1, 3, \dots, N_1$
$(2k+1)(\delta_{ki} + 2k_0 \varphi_i),$ $i = 0, 2, \dots, k$	$(2k+1)(\alpha_{ki} + 2k_0 \omega_i),$ $i = 0, 2, \dots, k-1$
$(2k+1)(\delta_{ki} + 2k_0 \varphi_i),$ $i = k+2, k+4, \dots, N_0$	$(2k+1)(\alpha_{ki} + 2k_0 [\omega_i + 1]),$ $i = k+1, k+3, \dots, N_0$
$(2k+1)(\alpha_{ik} + 2k_0 \psi_i),$ $i = 1, 3, \dots, k-1$	$(2k+1)(\beta_{ki} + 2k_0 \chi_i),$ $i = 1, 3, \dots, k$
$(2k+1)(\alpha_{ik} + 2k_0 [\psi_i + 1]),$ $i = k+1, k+3, \dots, N_1$	$(2k+1)(\beta_{ik} + 2k_0 \chi_i),$ $i = k+2, k+4, \dots, N_1$

3. Розв'язування системи при $N = 3$. Припускаємо, що температури навколишнього середовища θ^\pm дорівнюють нулеві: $\theta^+ = \theta^- = 0$. Густина розподілу об'ємних джерел тепла $W_0(x, y, z)$ з формули (4) моделюємо за допомогою двовимірної дельта-функції Дірака. У випадку зосередженого джерела, коли об'ємні джерела тепла розподілені лише вздовж однієї лінії

товщинної координати z , отримаємо

$$W_0(x, y, z) = W_0^* \delta(x, y) h^2 f\left(\frac{z}{h}\right),$$

де $W_0^* = \text{const}$ – інтенсивність джерела тепла, розмірність якої співпадає з розмірністю функції $W_0(x, y, z)$; $\delta(x, y)$ – двовимірний дельта-функція Дірака, $f\left(\frac{z}{h}\right)$ – функція, яка описує характер розподілу об’ємних джерел тепла уздовж товщинної координати. Подамо функцію f у вигляді суми парної та непарної складових. Парна складова дає коефіцієнти W_{0k} з парними номерами, а непарна – з непарними номерами. Інтегральні джерела тепла з парною функцією розподілу зумовлюють тільки плоский термопружний стан у пластині з симетричним теплообміном і є «плоскими» джерелами тепла, а інтегральні джерела з непарною функцією розподілу зумовлюють лише стан термопружного згину за таких самих умов і є «згинними» джерелами тепла.

Перейдемо до безрозмірної системи координат x_i , $i = 1, 2, 3$: $x_1 = x/h$, $x_2 = y/h$, $x_3 = z/h$. При одиничній зведеній потужності джерел тепла система (10) матиме вигляд

$$\Delta T_k + \sum_{m=0}^3 \tilde{n}_{km} T_m = \delta_{k+1,j} \delta(x_1, x_2), \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, а $\delta(x_1, x_2)$ – функція Дірака, символом $\delta_{k+1,j}$ позначено символ Кронекера. При $j = 1$ маємо найпростіше «плоске» джерело тепла, а при $j = 2$ маємо найпростіше «згинне» джерело тепла. Величини \tilde{n}_{km} залежать від критерію Біо та від безрозмірної середньої кривини оболонки, яка має наступний вигляд:

$$\bar{k}_0 = (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)/2 = (1/\bar{R}_1 + 1/\bar{R}_2)/2 = (h/R_1 + h/R_2)/2,$$

де \bar{R}_1 , \bar{R}_2 – безрозмірні радіуси кривини, \bar{k}_1 , \bar{k}_2 – безрозмірні головні кривини оболонки.

За допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур’є до системи (11) знаходимо шукані компоненти температури:

$$T_i(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^3 S_{i,m} G_{0,0}(r\sqrt{c_{m+1}}), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Тут $r = r(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, G – спеціальна функція [3, 7], $S_{i,m}$ і c_m – величини, які залежать від критерію Біо і безрозмірної середньої кривини оболонки.

Подібно отримуємо компоненти температури для випадку апроксимації температури і її похідної $N = 1$ першого наближення:

$$T_p(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^1 K_{p,q} G_{0,0}(r\sqrt{c_{q+1}}), \quad p = 0, 1,$$

де $K_{p,q}$ і c_q – величини, які залежать від таких параметрів, як критерій Біо та безрозмірна середня кривина оболонки.

На Visual Fortran обчислено температуру для першого та третього наближень. Відповідні значення співпадали з точністю до третього знаку після коми, тому для подальших досліджень використовували третє наближення температури:

$$T = \sum_{k=0}^3 T_k P_k(x_3). \quad (12)$$

Числові дослідження. Розрахунки за формулою (12) виконано на Visual Fortran. Оскільки об'єктом дослідження є тонка циліндрична оболонка, то накладали додаткові обмеження для безрозмірних кривин оболонки [6]:

$$\bar{k}_1 \ll 1, \quad \bar{k}_2 \ll 1.$$

На рис. 2 подано графіки залежності температури T на лицьовій поверхні оболонки, $x_3 = 1$, від відстані до джерела тепла – від координати x_2 . Значення температури обчислено на прямій $x_1 = 0$. Джерело тепла брали «плоске». Суцільною кривою зображено графік температури при параметрах теплообміну $Bi^+ = Bi^- = 1$ (симетричний теплообмін), штриховою – при $Bi^+ = Bi^- = 5$ (також симетричний теплообмін), і штрихпунктирною – при $Bi^+ = 10$ і $Bi^- = 0$ (верхній односторонній теплообмін). Обчислення виконано для значень безрозмірних головних кривин оболонки $\bar{k}_1 = 0.05$ і $\bar{k}_2 = 0$.

Бачимо, що параметр теплообміну Bi , а також симетричність теплообміну не впливають на характер зміни температури: вона наближається до нуля при віддаленні від джерела тепла.

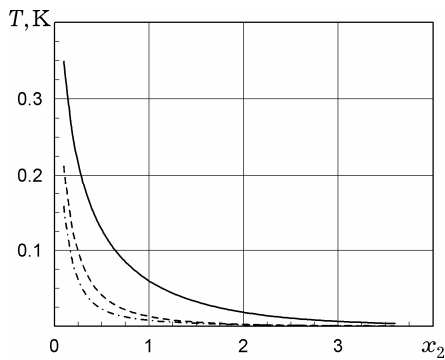


Рис. 2

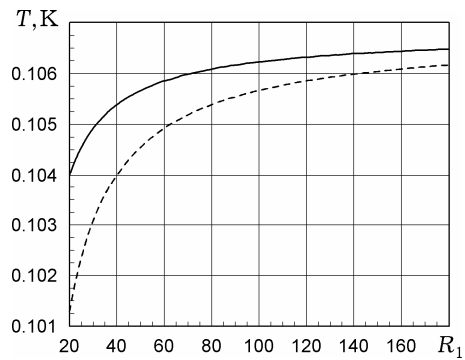


Рис. 3

На рис. 3 показано графіки залежності температури T на лицьовій поверхні оболонки, при $x_3 = 1$, від безрозмірного радіуса кривини оболонки \bar{R}_1 . Суцільною кривою зображено графік для випадку циліндричної оболонки, коли безрозмірний радіус $\bar{R}_2 = \infty$ (кривина $\bar{k}_2 = 0$), а штриховою – графік для випадку сферичної оболонки, коли $\bar{R}_1 = \bar{R}_2$. Параметри нагріву вибрано такими: джерело тепла плоске, теплообмін несиметричний, $Bi^+ = 0.1$ і $Bi^- = 0$. Температуру обчислювали у точці $x_1 = 3$, $x_2 = 0$.

Як бачимо на рис. 3, зі збільшенням радіуса кривини оболонки значення температури асимптотично наближаються до одного і того ж значення – до значення температури для випадку пластини, тобто оболонки із нульовими кривинами (коли радіуси кривин дорівнюють нескінченності). Це виконується як для циліндричної, так і для сферичної оболонки.

Висновки. При визначенні температури в ізотропних оболонках із зосередженим джерелом тепла необхідно враховувати теплообмін із навколишнім середовищем і геометрію оболонки (радіуси кривини). Параметр теплообміну не впливає на характер залежності температури від відстані від джерела тепла – її значення наближаються до нуля при віддаленні від джерела. Також досліджено циліндричну та сферичну оболонки: при збіль-

шенні радіусів кривин температура наближається до деякої константи – до значення для випадку пластини, тобто оболонки із нульовими головними кривинами (або радіусами кривини, які дорівнюють нескінченності).

1. Бондаренко Н. С., Гольцев А. С. Решение задачи теплопроводности для анизотропных пластин при сосредоточенных температурных воздействиях с использованием полиномов Лежандра // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2009. – 52, № 4. – С. 216–226.
Те саме: Bondarenko N. S., Gol'tsev A. S. Solution of the heat conduction problem for anisotropic plates under concentrated thermal loading using Legendre polynomials // *J. Math. Sci.* – 2011. – 174, No. 3. – P. 400–414.
2. Бондаренко Н. С., Гольцев А. С., Шевченко В. П. Фундаментальные решения уравнений термоупругости трансверсально-изотропных пластин // *Прикл. механика.* – 2010. – 46, № 3. – С. 51–60.
Те саме: Bondarenko N. S., Gol'tsev A. S., Shevchenko V. P. Fundamental solutions of the thermoelastic equations for transversely isotropic plates // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – 46, No. 3. – P. 287–295.
3. Гольцев А. С., Хижняк В. К. G-функция: Методичні поради до вивчення спецкурсу «Спеціальні функції». – Донецьк: Донецьк. держ. ун-т, 1999. – 8 с.
4. Ковалев О. Б., Оришич А. М., Фомин В. М., Шулятьев В. Б. Сопряженные задачи механики сплошных сред в процессах газолазерной резки металлов // *Прикл. механика и техн. физика.* – 2001. – 42, № 6. – С. 106–116.
Те саме: Kovalev O. B., Orishich A. M., Fomin V. M., Shulyat'ev V. B. Adjoint problems of mechanics of continuous media in gas-laser cutting of metals // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.* – 2001. – 42, No. 6. – P. 1014–1022.
5. Пелех Б. Л., Сухорольский М. А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 216 с.
6. Подстригач Я. С., Швеу Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 343 с.
7. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Уч. пособие. – Донецк: Донецк. гос. ун-т, 1980. – 128 с.
8. Ventsel E., Krauthammer Th. Thin plates and shells: Theory, analysis and applications. – New York – Basel: Marcel Dekker, Inc., 2001. – 658 p.

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТОНКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА ПРИ СТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛОБМЕНЕ

При помощи аппроксимации N -го порядка функции температуры и ее первой производной полиномами Лежандра представлено решение задачи теплопроводности тонкостенной пологой изотропной оболочки и записана система разрешающих уравнений для N -го приближения. Для первого и третьего приближений решена задача при сосредоточенных источниках тепла. Для третьего приближения построены графики зависимости температуры от расстояния до источника тепла и от кривизны оболочки при симметричном и несимметричном стационарном теплообмене.

CONSTRUCTION AND INVESTIGATION OF THIRD-ORDER APPROXIMATION OF SOLUTION FOR THIN SHALLOW SHELLS HEAT EQUATION USING LEGENDRE POLYNOMIALS UNDER STATIONARY HEAT EXCHANGE

Using the N th order approximation of temperature function and its first derivative by the Legendre polynomials, the solution of heat conduction problem for thin-walled shallow isotropic shell is represented and the system of resolving equations for the N th approximation is written. For the first and third approximations heat conduction problem is solved for concentrated heat sources. For the third approximation, the temperature dependence on the distance to the heat source and on the curvature of the shell for symmetric and asymmetric stationary heat exchange are plotted

Донецьк. нац. ун-т ім. Василя Стуса, Вінниця

Одержано
09.06.15