УДК 539.3

Т. В. Клімчук, В. І. Острик

ГЛАДКИЙ КОНТАКТ НАПІВНЕСКІНЧЕННОГО ШТАМПА ІЗ ЗАОКРУГЛЕНИМ КРАЄМ І ПРУЖНОЇ СМУГИ

Розглянуто контактну задачу для пружної смуги, в одну грань якої вдавлюється напівнескінченний штамп із заокругленим краєм, а інша її грань закріплена. Сили тертя в області контакту не враховуються. Методом Вінера – Гопфа отримано точний аналітичний розв'язок задачі. Знайдено розподіли контактних напружень, напруження всередині смуги та вздовж закріпленої грані, нормальні переміщення точок вільної від навантаження частини однієї із граней смуги. Побудовано ізохори та встановлено положення точки, в якій максимальні дотичні напруження досягають свого найбільшого значення.

Контактні задачі теорії пружності для смуги у випадку, коли штамп, що вдавлюється в одну із граней смуги, є напівнескінченним і має прямолінійну горизонтальну основу, а інша грань смуги знаходиться в умовах гладкого контакту з жорсткою основою або закріплена, розглядалися в роботах [1, 2, 6]. Методом Вінера – Гопфа було знайдено точні аналітичні розв'язки цих задач.

Нижче будується аналітичний розв'язок контактної задачі для пружної смуги у випадку, коли край штампа заокруглений. Вплив заокруглення краю штампа на розподіл контактних напружень у контактних задачах для пружного півпростору досліджувався у роботах [8, 9].

1. Постановка задачі. Розглянемо стан плоскої деформації в пружній смузі $-\infty < x < \infty$, $-h \le y \le h$ ширини $2h$ з коефіцієнтом Пуассона ν та модулем зсуву G (рис. 1). Нижня грань $y = -h$, $-\infty < x < \infty$ смуги жорстко закріплена, а у верхню грань $y = h$ на проміжку $0 \le x < \infty$ під дією рівномірно розподіленого нормального навантаження інтенсивності p вдавлюється напівнескінченний штамп із прямолінійною основою та заокругленим краєм. Інша частина $-\infty < x < 0$ грані $y = h$ смуги вільна від навантажень. Сили тертя в області контакту $0 \le x < \infty$, $y = h$ штампа та смуги не враховуємо.

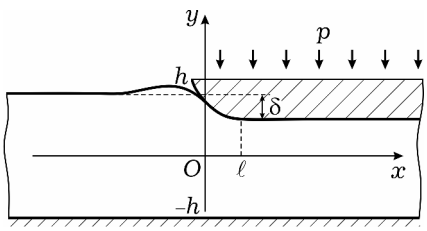

Рис. 1

Крайові умови задачі такі:

$$u_y\big|_{y=h} = f_0(x)H(\ell - x) - \delta, \qquad 0 \le x < \infty,$$

$$\sigma_y\big|_{y=h} = 0, \qquad -\infty < x < 0,$$

$$\tau_{yx}\big|_{y=h} = 0, \quad u_x\big|_{y=-h} = 0, \quad u_y\big|_{y=-h} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

де $y = f_0(x) \equiv \frac{1}{2R}(x-\ell)^2$, $x \le \ell$, – рівняння заокругленого краю штампа, R – радіус кривини криволінійної частини контуру штампа в точці $x = \ell$, $H(x)$ – функція Гевісайда, δ – осадка смуги під штампом. З умов на нескінченності $\sigma_y = -p$, $\varepsilon_x = 0$, $\varepsilon_y = -\delta/(2h)$, $x \to \infty$, осадку δ виражаємо через тиск p таким чином:

$$\frac{\delta}{2h} = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{p}{2G}. \tag{2}$$

2. Інтегральне рівняння. Введемо невідому функцію нормальних контактних напружень

$$\sigma(x) = \frac{1}{2G}\,\sigma_y\Big|_{y=h}, \qquad 0 < x < \infty, \tag{3}$$

та її трансформанту Фур'є ($\sigma(x) = 0$, $-\infty < x < 0$)

$$\tilde{\sigma}(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \sigma(r)e^{i\mu r}\,dr. \tag{4}$$

Для виведення інтегрального рівняння розглянемо основну змішану крайову задачу для смуги з такими умовами:

$$\frac{1}{2G}\,\sigma_y\Big|_{y=h} = \sigma(x), \qquad \tau_{yx}\Big|_{y=h} = 0,$$

$$u_x\Big|_{y=-h} = 0, \qquad u_y\Big|_{y=-h} = 0. \tag{5}$$

Загальний розв'язок рівнянь рівноваги для смуги має вигляд [5, 6]:

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\mu, y)e^{-i\mu x}\,d\mu, \qquad u_y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\mu, y)e^{-i\mu x}\,d\mu,$$

$$\frac{1}{2G}\,\sigma_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(\mu, y)e^{-i\mu x}\,d\mu, \qquad \frac{1}{2G}\,\sigma_y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_2(\mu, y)e^{-i\mu x}\,d\mu,$$

$$\frac{1}{2G}\,\tau_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau(\mu, y)e^{-i\mu x}\,d\mu,$$

$$\mu^2 u(\mu, y) = \mu A(\mu)\operatorname{ch}\mu y + \mu B(\mu)\operatorname{sh}\mu y + C(\mu)\big[(3-4\nu)\operatorname{ch}\mu y + \mu y\operatorname{sh}\mu y\big] -$$
$$- D(\mu)\big[(3-4\nu)\operatorname{sh}\mu y + \mu y\operatorname{ch}\mu y\big],$$

$$v(\mu, y) = A(\mu)\operatorname{sh}\mu y + B(\mu)\operatorname{ch}\mu y + C(\mu)y\operatorname{ch}\mu y - D(\mu)y\operatorname{sh}\mu y,$$

$$\sigma_1(\mu, y) = -\mu A(\mu)\operatorname{ch}\mu y - \mu B(\mu)\operatorname{sh}\mu y - C(\mu)\big[(3-2\nu)\operatorname{ch}\mu y + \mu y\operatorname{sh}\mu y\big] +$$
$$+ D(\mu)\big[(3-2\nu)\operatorname{sh}\mu y + \mu y\operatorname{ch}\mu y\big],$$

$$\sigma_2(\mu, y) = \mu A(\mu)\operatorname{ch}\mu y + \mu B(\mu)\operatorname{sh}\mu y + C(\mu)\big[(1-2\nu)\operatorname{ch}\mu y + \mu y\operatorname{sh}\mu y\big] -$$
$$- D(\mu)\big[(1-2\nu)\operatorname{sh}\mu y + \mu y\operatorname{ch}\mu y\big],$$

$$\mu\tau(\mu, y) = \mu A(\mu)\operatorname{sh}\mu y + \mu B(\mu)\operatorname{ch}\mu y + C(\mu)\big[2(1-\nu)\operatorname{sh}\mu y + \mu y\operatorname{ch}\mu y\big] -$$
$$- D(\mu)\big[2(1-\nu)\operatorname{ch}\mu y + \mu y\operatorname{sh}\mu y\big], \tag{6}$$

де $A(\mu)$, $B(\mu)$, $C(\mu)$, $D(\mu)$ – довільні функції.

Підставивши розв'язок (6) у крайові умови (5), одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sigma_2(\mu, h) = \tilde{\sigma}(\mu), \quad \tau(\mu, h) = 0, \quad u(\mu, -h) = 0, \quad v(\mu, -h) = 0 \tag{7}$$

відносно невідомих $A(\mu)$, $B(\mu)$, $C(\mu)$, $D(\mu)$. Звідси знаходимо

$$A(\mu) = \big\{2(1-\nu)(3-4\nu)\operatorname{ch}3\mu h + \big[(2\mu h)^2 + 2(1-\nu)(3-4\nu)\big]\operatorname{ch}\mu h +$$
$$+ 2\mu h\big[(3-4\nu)(\operatorname{ch}2\mu h + 1) + 2(1-\nu)\big]\operatorname{sh}\mu h\big\}\tilde{\sigma}(\mu)\big(\mu\Delta(2\mu h)\big)^{-1},$$

$$B(\mu) = \big\{2(1-\nu)(3-4\nu)\operatorname{sh}3\mu h - \big[(2\mu h)^2 + 2(1-\nu)(3-4\nu)\big]\operatorname{sh}\mu h +$$
$$+ 2\mu h\big[(3-4\nu)(\operatorname{ch}2\mu h - 1) - 2(1-\nu)\big]\operatorname{ch}\mu h\big\}\tilde{\sigma}(\mu)\big(\mu\Delta(2\mu h)\big)^{-1},$$

$$C(\mu) = -\left[(3-4\nu)\operatorname{ch} 3\mu h + \operatorname{ch}\mu h + 4\mu h \operatorname{sh}\mu h\right]\tilde{\sigma}(\mu)\left(\Delta(2\mu h)\right)^{-1},$$

$$D(\mu) = \left[(3-4\nu)\operatorname{sh} 3\mu h - \operatorname{sh}\mu h - 4\mu h \operatorname{ch}\mu h\right]\tilde{\sigma}(\mu)\left(\Delta(2\mu h)\right)^{-1},$$

$$\Delta(2\mu h) = (3-4\nu)(\operatorname{ch} 4\mu h - 1) + 2(2\mu h)^2 + 8(1-\nu)^2. \tag{8}$$

Зі співвідношень (6), (8) маємо, зокрема, нормальні переміщення в точках верхньої грані смуги:

$$u_y\Big|_{y=h} = 2h\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(2\mu h)\tilde{\sigma}(\mu)e^{-i\mu x}\,d\mu,$$

$$\mathcal{K}(2\mu h) = \frac{\lambda(2\mu h)}{2\mu h\Delta(2\mu h)}, \quad \lambda(2\mu h) = 2(1-\nu)\left[(3-4\nu)\operatorname{sh} 4\mu h - 4\mu h\right]. \tag{9}$$

Підставивши вираз для $u_y\Big|_{y=h}$ із (9) у першу з крайових умов (1), отримаємо рівняння

$$2h\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(2\mu h)\tilde{\sigma}(\mu)e^{-i\mu x}\,d\mu = f_0(x)H(\ell - x) - \delta, \qquad 0 \le x < \infty. \tag{10}$$

Враховуючи поведінку шуканої функції контактних напружень $\sigma(x)$ із (3) на нескінченності ($\sigma(x) \sim -p/(2G)$, $x \to \infty$), подамо її таким чином:

$$\sigma(x) = -\frac{p}{2G} + \sigma_*(x), \qquad \sigma_*(\infty) = 0. \tag{11}$$

Тоді

$$\tilde{\sigma}(\mu) = -\frac{p}{4G}\left(\delta(\mu) + \frac{i}{\pi\mu}\right) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \sigma_*(r)e^{i\mu r}\,dr, \tag{12}$$

де $\delta(\mu)$ – дельта-функція Дірака.

Виконавши заміни змінних

$$x = 2h\xi, \qquad r = 2h\eta, \qquad \tau = 2\mu h, \qquad a = \ell/(2h), \tag{13}$$

перейдемо до нової невідомої функції

$$\varphi(\xi) = -\sqrt{2\pi}\,\frac{2h}{\delta}\,\sigma_*(2h\xi), \qquad 0 \le \xi < \infty. \tag{14}$$

У результаті рівняння (10) перетворимо до інтегрального рівняння

$$\int\limits_0^{\infty} k(\xi-\eta)\varphi(\eta)\,d\eta = f(\xi), \qquad 0 \le \xi < \infty, \tag{15}$$

де

$$k(\xi-\eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\tau)e^{-i\tau(\xi-\eta)}\,d\tau,$$

$$f(\xi) = \sqrt{2\pi}\,\delta^{-1}\left(-f_0(2h\xi)H(a-\xi) + \frac{hp}{G}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(is_k)}{s_k^2\Delta'(is_k)}\,e^{-s_k\xi}\right),$$

де s_k, $k = 1, 2, \ldots$, – корені рівняння $\Delta(is) = 0$ з півплощини $\operatorname{Re} s > 0$. Функцію $f(\xi)$, праву частину рівняння (15), перетворили за теорією лишків.

3. Розв'язання інтегрального рівняння методом Вінера – Гопфа [3]. Розповсюдимо інтегральне рівняння (15) на всю числову вісь, вважаючи, що $\varphi(\eta) = 0$ при $\eta < 0$, та застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Введемо невідомі функції від комплексної змінної z:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \varphi(\xi) e^{iz\xi}\, d\xi\,,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^0 e^{iz\xi}\, d\xi \int\limits_0^\infty k(\xi-\eta)\varphi(\eta)\, d\eta\,, \tag{16}$$

аналітичні відповідно в півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ і $\operatorname{Im} z < c^-$ ($c^+ < 0$, $c^- > 0$).

Використавши теорему про згортку для інтегрального перетворення Фур'є, на підставі подань (16) інтегральне рівняння (15) зведемо до функціонального рівняння

$$\mathcal{K}(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z), \qquad c^+ < \operatorname{Im} z < c^-. \tag{17}$$

Права частина цього рівняння

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty f(\xi) e^{iz\xi}\, d\xi = \frac{1}{\delta}\left[\frac{(2h)^2}{2R}\left(\frac{a^2}{iz} + \frac{2a}{(iz)^2} - \frac{2}{(iz)^3}(e^{iza} - 1)\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{hp}{G} \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda(is_k)}{s_k^2 \Delta'(is_k)} \frac{1}{iz - s_k}\right] \tag{18}$$

є аналітичною функцією у півплощині $\operatorname{Im} z > c^+$.

Факторизуємо коефіцієнт $\mathcal{K}(z)$ рівняння (17) у вигляді нескінченного добутку:

$$\mathcal{K}(z) = \mathcal{K}(0)\mathcal{K}^+(z)\mathcal{K}^-(z), \qquad \mathcal{K}(0) = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\,,$$

$$\mathcal{K}^+(z) \equiv \mathcal{K}^-(-z) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{iz}{\zeta_k}\right)\left(1 - \frac{iz}{s_k}\right)^{-1}, \tag{19}$$

де ζ_k, $k = 1, 2, \ldots$, – корені рівняння $\lambda(is) = 0$ з півплощини $\operatorname{Re} s > 0$.

Поділимо рівняння (17) на $\mathcal{K}^-(z)$ і отриману праву частину подамо як

$$\frac{F^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = f^+(z) - f^-(z), \qquad c^+ < \operatorname{Im} z < c^-, \tag{20}$$

де $f^+(z)$, $f^-(z)$ – функції, аналітичні у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$, $\operatorname{Im} z < c^-$ відповідно. Функцію $f^+(z)$ запишемо через інтеграл типу Коші у вигляді

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{F^+(\zeta)\, d\zeta}{\mathcal{K}^-(\zeta)(\zeta - z)} = f_1^+(z) + f_2^+(z), \qquad \operatorname{Im} z > 0\,,$$

$$f_1^+(z) = \frac{1}{\delta}\frac{(2h)^2}{2R}\frac{\mathcal{K}(0)}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\zeta\Delta(\zeta)\mathcal{K}^+(\zeta)}{\lambda(\zeta)(\zeta - z)}\left(\frac{a^2}{i\zeta} + \frac{2a}{(i\zeta)^2} - \frac{2}{(i\zeta)^3}(e^{i\zeta a} - 1)\right) d\zeta\,,$$

$$f_2^+(z) = -\frac{1}{\delta}\frac{hp}{G}\frac{\mathcal{K}(0)}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\zeta\Delta(\zeta)\mathcal{K}^+(\zeta)}{\lambda(\zeta)(\zeta - z)} \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda(is_k)}{s_k^2\Delta'(is_k)} \frac{1}{i\zeta - s_k}\, d\zeta\,. \tag{21}$$

Інтеграл для $f_1^+(z)$ обчислимо через лишки підінтегральної функції у її простих полюсах $\zeta = i\zeta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $\zeta = z$ з півплощини $\operatorname{Im}\zeta > 0$, у якій $e^{i\zeta a} \to 0$ при $|\zeta| \to \infty$. Маємо

$$f_1^+(z) = -\frac{1}{\delta}\frac{(2h)^2}{2R}\mathcal{K}(0)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i\zeta_k\mathcal{K}^+(i\zeta_k)\Delta(i\zeta_k)}{\lambda'(i\zeta_k)(i\zeta_k - z)}\left(\frac{a^2}{\zeta_k} - \frac{2a}{\zeta_k^2} - \frac{2}{\zeta_k^3}(e^{-\zeta_k a} - 1)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{z\Delta(z)\mathcal{K}^+(z)}{\lambda(z)}\left(-\frac{a^2}{iz} - \frac{2a}{(iz)^2} + \frac{2}{(iz)^3}(e^{iza} - 1)\right)\right]. \qquad (22)$$

У розвинені (22) підсумуємо складову ряду, яка не містить множника $e^{-\zeta_k a}$, перейшовши від ряду за лишками із півплощини $\operatorname{Im}\tau > c$, $0 < c < \zeta_1$, до інтеграла уздовж прямої $\operatorname{Im}\zeta = c$. Цей інтеграл обчислимо через лишок у єдиному полюсі $\zeta = 0$ з півплощини $\operatorname{Im}\tau < c$. Отже,

$$\mathcal{K}(0)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i\zeta_k\mathcal{K}^+(i\zeta_k)\Delta(i\zeta_k)}{\lambda'(i\zeta_k)(i\zeta_k - z)}\left(\frac{a^2}{\zeta_k} - \frac{2a}{\zeta_k^2} + \frac{2}{\zeta_k^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\mathcal{K}^-(z)}\left(-\frac{a^2}{iz} - \frac{2a}{(iz)^2} - \frac{2}{(iz)^3}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic}\frac{1}{\mathcal{K}^-(\tau)(\tau - z)}\left(-\frac{a^2}{i\tau} - \frac{2a}{(i\tau)^2} - \frac{2}{(i\tau)^3}\right)d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\mathcal{K}(-z)}\left(-\frac{a^2}{iz} - \frac{2a}{(iz)^2} - \frac{2}{(iz)^3}\right) + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3}. \qquad (23)$$

Тут

$$a_1 = i(a^2 + 2ab_1 + 2b_2), \qquad a_2 = 2(a + b_1), \qquad a_3 = -2i,$$

$$\frac{1}{\mathcal{K}^-(z)} = 1 + b_1 iz + b_2(iz)^2 + O((iz)^3), \quad z \to 0, \quad b_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{\zeta_k}\right),$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{\zeta_k}\right)\left[\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{s_m} - \frac{1}{\zeta_m}\right) - \frac{1}{\zeta_k}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(b_1^2 - \frac{\nu(1 - 4\nu)}{3(1 - \nu)(1 - 2\nu)}\right). \qquad (24)$$

Інтеграл для $f_2^+(z)$ за допомогою лишків у точках $\zeta = -is_k$, $k = 1, 2, \ldots$, із півплощини $\operatorname{Im}\zeta < 0$ перетворимо до ряду

$$f_2^+(z) = \frac{i}{\delta}\frac{hp}{G}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(is_k)}{s_k^2\Delta'(is_k)}\frac{1}{\mathcal{K}^-(-is_k)(z + is_k)}, \qquad (25)$$

який підсумуємо аналогічно до (23). Знаходимо

$$f_2^+(z) = \frac{i}{\delta}\frac{hp}{G}\mathcal{K}(0)\frac{1 - \mathcal{K}^+(z)}{z}. \qquad (26)$$

У результаті отримаємо

$$f^+(z) = -\frac{1}{\delta}\frac{(2h)^2}{2R}\left(2\mathcal{K}(0)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathcal{K}^+(i\zeta_k)\Delta(i\zeta_k)}{i\zeta_k^2\lambda'(i\zeta_k)(i\zeta_k - z)}e^{-\zeta_k a} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mathcal{K}^-(z)}\frac{2}{(iz)^3}e^{iza} + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3}\right) + \frac{i}{\delta}\frac{hp}{G}\mathcal{K}(0)\frac{1 - \mathcal{K}^+(z)}{z}. \qquad (27)$$

Виконані за формулами (19), (20) операції дають змогу записати рівняння (17) у вигляді

$$\mathcal{K}(0)\mathcal{K}^+(z)\Phi^+(z) - f^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} - f^-(z), \qquad c^+ < \operatorname{Im} z < c^-. \tag{28}$$

До лівої частини рівняння (28) віднесено функції, аналітичні у півплощині $\operatorname{Im} z > c^+$, а до правої – функції, аналітичні у півплощині $\operatorname{Im} z > c^-$. З огляду на те, що півплощини мають спільну смугу аналітичності $c^+ < \operatorname{Im} z < c^-$, ліва та права частини рівняння (28) аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину та визначають деяку цілу функцію $P(z)$. На підставі оцінок $\mathcal{K}^+(z) = O(z^{-1/2})$, $\Phi^+(z) = o(1)$, $f^+(z) = O(z^{-1})$, $|z| \to \infty$, знаходимо асимптотичну поведінку для функції $P(z)$ при $|z| \to \infty$: $P(z) = o(z^{-1/2})$. Звідси робимо висновок, що $P(z) \equiv 0$, і отримуємо розв'язок функціонального рівняння (17):

$$\Phi^+(z) = \frac{f^+(z)}{\mathcal{K}(0)\mathcal{K}^+(z)}, \qquad \Phi^-(z) = f^-(z)\mathcal{K}^-(z). \tag{29}$$

Згідно з лемою Ватсона [7] із поведінки функції $\Phi^+(z) = O(z^{-1/2})$ при $|z| \to \infty$ за формулами (3), (11), (14), (16) випливає, що контактні напруження $\sigma_y\big|_{y=h}$ є необмеженими на краю області контакту $(x \to +0)$. Вимагаючи обмеженості напружень у точці $x = 0$, $y = h$, накладемо умову $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf^+(z) = 0$, яку на підставі (27) запишемо у вигляді

$$\mathcal{K}(0) - 2\frac{hG}{pR}\left[2\mathcal{K}(0)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta(i\zeta_k)\mathcal{K}^+(i\zeta_k)}{\zeta_k^2\lambda'(i\zeta_k)}e^{-\zeta_k a} + a_1\right] = 0. \tag{30}$$

Рівняння (30) зв'язує відносний розмір $a = \ell/(2h)$ криволінійної частини основи штампа, яка входить у контакт з пружною смугою, з сукупним параметром $hG/(pR)$ задачі. За умови (30) поведінка контактних напружень на краю області контакту стає такою: $\sigma_y\big|_{y=h} = O(\sqrt{x})$, $x \to +0$.

Застосувавши обернене перетворення Фур'є до першої з рівностей (16), з урахуванням (29) отримаємо розв'язок інтегрального рівняння (15):

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^+(\tau)e^{-i\tau\xi}\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^+(\tau)}{\mathcal{K}(0)K^+(\tau)}e^{-i\tau\xi}\,d\tau. \tag{31}$$

4. Визначення напружень і переміщень. Контактні напруження знайдемо за формулами (3), (31) із використанням замін (11), (14). Перетворивши інтеграл із (31) за теорією лишків, отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\sigma_y\Big|_{y=h} = {} & -1 - \frac{1}{\mathcal{K}(0)}\frac{2hG}{pR}\left(\frac{2\nu(1-4\nu)}{3(1-\nu)(1-2\nu)} - (\xi-a)^2\right)H(a-\xi) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta_k\Delta(i\zeta_k)}{\lambda'(i\zeta_k)}\mathcal{K}^+(i\zeta_k)e^{-\zeta_k\xi}\left\{\frac{4hG}{pR}\left[\frac{1}{\zeta_k^3\mathcal{K}^+(i\zeta_k)}\times\right.\right. \\ & \times \operatorname{sgn}(\xi-a)e^{\zeta_k(\xi-|\xi-a|)} - \left(\frac{1}{\zeta_k^3} + \frac{a_2}{2\zeta_k^2} + \frac{a_1}{2\zeta_k}\right) - \\ & \left.\left. - \mathcal{K}(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta(i\zeta_n)\mathcal{K}^+(i\zeta_n)}{\zeta_n^2\lambda'(i\zeta_n)(\zeta_n+\zeta_k)}e^{-\zeta_n a}\right] + \mathcal{K}(0)\frac{1}{\zeta_k}\right\}, \\ & \xi = \frac{x}{2h}, \qquad 0 < x < \infty. \end{aligned} \tag{32}$$

Нормальні переміщення точок вільної від навантаження частини верхньої грані смуги, виходячи з виразу (9), з урахуванням рівностей (12)–(14), (16) перетворимо до вигляду

$$u_y\big|_{y=h} = -\frac{\delta}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\tau)\Phi^+(\tau)e^{-i\tau\xi}\,d\tau - \frac{hp}{2G}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\tau)\left[\delta(\tau)+\frac{i}{\pi\tau}\right]e^{-i\tau\xi}\,d\tau. \quad (33)$$

Підставивши в (33) розв'язок $\Phi^+(\tau)$ із (29), після перетворень дістанемо

$$\frac{1}{\delta}u_y\big|_{y=h} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(is_k)}{s_k\Delta'(is_k)\mathcal{K}^+(is_k)}e^{s_k\xi}\left\{\frac{4h^2}{R\delta}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta(i\zeta_n)\mathcal{K}^+(i\zeta_n)}{\zeta_n^2\lambda'(i\zeta_n)(s_k-\zeta_n)}e^{-\zeta_n a} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\mathcal{K}(0)}\left(\frac{1}{s_k^3}-\frac{a_2}{2s_k^2}+\frac{a_1}{2s_k}\right)\right] - \frac{1}{\mathcal{K}(0)s_k}\right\},$$

$$\xi = \frac{x}{2h}, \qquad -\infty < x < 0\,. \quad (34)$$

Напруження у довільній точці смуги з використанням подань (6), (8) запишемо у вигляді таких комбінацій:

$$\frac{1}{2G}(\sigma_x+\sigma_y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\{[D(\mu)-C(\mu)]e^{\mu y} - [C(\mu)+D(\mu)]e^{-\mu y}\}e^{-i\mu x}\,d\mu\,,$$

$$\frac{1}{2G}(\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{yx}) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{\mu[A(\mu)+B(\mu)]e^{\mu y} +$$

$$+ [2(1-\nu)+\mu y][C(\mu)-D(\mu)]e^{\mu y}\}e^{-i\mu x}\,d\mu\,. \quad (35)$$

Звідси з урахуванням рівностей (8), (12)–(14), (16), (29) отримаємо

$$\frac{1}{p}(\sigma_x+\sigma_y) = -\frac{1}{2(1-\nu)} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_1(\tau,\zeta)e^{-i\xi\tau}\,d\tau, \quad \zeta = \frac{y}{2h}, \quad -h \le y \le h\,,$$

$$\frac{1}{p}(\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{yx}) = -\frac{1}{2}\mathcal{K}(0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_2(\tau,\zeta)e^{-i\xi\tau}\,d\tau\,, \quad (36)$$

де

$$M_j(\tau,\zeta) = \frac{\alpha_j(\tau,\zeta)}{\Delta(\tau)\mathcal{K}^+(\tau)}\left(\frac{1}{i\tau}-f_1^+(\tau)\right), \qquad j=1,2\,,$$

$$\alpha_1(\tau,\zeta) = (3-4\nu)\,\mathrm{ch}\left(\frac{3}{2}+\zeta\right)\tau + \mathrm{ch}\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)\tau - 2\tau\,\mathrm{sh}\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)\tau\,,$$

$$\alpha_2(\tau,\zeta) = (3-4\nu)\tau\left(\frac{1}{2}-\zeta\right)e^{(3/2+\zeta)\tau} + \left[4(1-\nu)(1-2\nu) + \right.$$

$$\left. + \tau\left(\frac{1}{2}-\zeta\right) + 2\tau^2\left(\frac{1}{2}+\zeta\right)\right]e^{(\zeta-1/2)\tau}.$$

Відмітимо, що інтеграли із (36) при $-h \le y < h$ збігаються експоненціально, а при $y = h$ – повільно зі степеневою швидкістю. У цьому випадку інтеграли необхідно перетворювати за теорією лишків до рядів, як це зроблено для контактних напружень (32). Збіжність таких рядів, за винятком точки $x = 0$, є експоненціальною.

5. Результати обчислень. Розрахунки проведено для коефіцієнта Пуассона $\nu = 1/3$ і різних значень відносного розміру $a = \ell/(2h)$ криволінійної частини основи штампа, яка входить у контакт з пружною смугою.

На рис. 2 суцільними кривими зображено розподіли безрозмірних контактних напружень $\bar{\sigma} = \frac{1}{p}\sigma_y\big|_{y=h}$, обчислених за формулою (32) для різних значень a. Зі зменшенням параметра a від $a = 0.8$ до $a = 0.1$ контактні напруження наближаються до свого граничного розподілу при $a = 0$ (штрихова крива), який відповідає штампу з прямолінійною основою за відсутності заокруглення [6]. Зі збільшенням параметра a від $a = 1.0$ до $a = 2.0$ контактні напруження мало відрізняються від контактних напружень у випадку параболічного штампа зі скінченною областю контакту $0 \le x \le 2\ell$ [4].

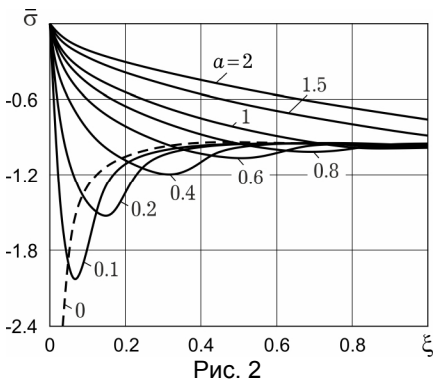

Рис. 2

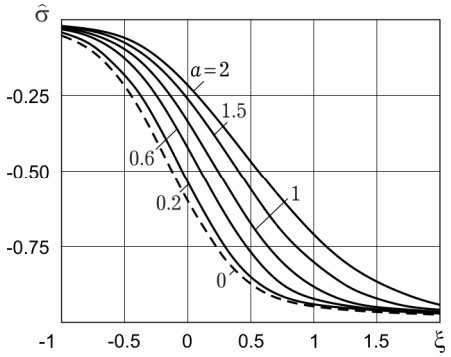

Рис. 3

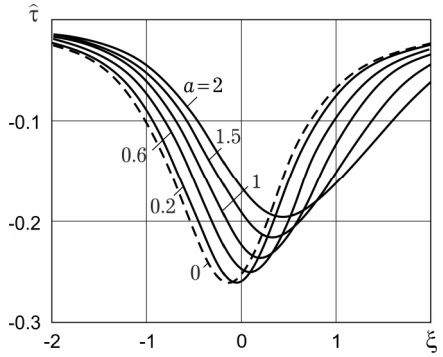

Рис. 4

На рис. 3, рис. 4 подано розподіли безрозмірних нормальних $\hat{\sigma} = \frac{1}{p}\sigma_y\big|_{y=-h}$ і дотичних $\hat{\tau} = \frac{1}{p}\tau_{yx}\big|_{y=-h}$ напружень уздовж закріпленої грані смуги для значень параметра $a = 0$, 0.2, 0.6, 1.0, 1.5, 2.0, а на рис. 5 – розподіли безрозмірних дотичних напружень усередині смуги уздовж прямих, паралельних граням смуги, у випадку $a = 0.2$.

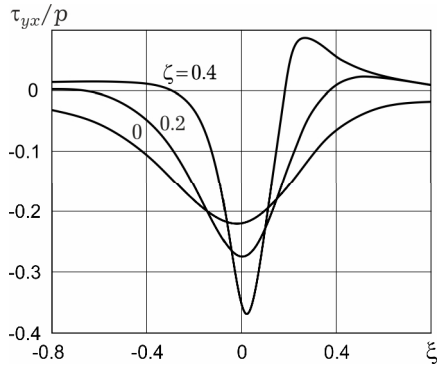

Рис. 5

На рис. 6, рис. 7 зображено ізохори – лінії рівня віднесених до величини p максимальних дотичних напружень $\tau_{\max} = \frac{1}{2}\left|\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}\right|$ – при $a = 0.2$ і $a = 1$ відповідно. Коли $a = 0.2$, величина $\bar{\tau}_{\max} = \frac{1}{p}\tau_{\max}$ досягає свого найбільшого значення $\max \bar{\tau}_{\max} = 0.479$ у точці $\xi = x/(2h) = 0.105$, $\zeta = y/(2h) = 0.398$. Якщо ж $a = 1$, значення $\max \bar{\tau}_{\max} = 0.305$ досягається у точці $\xi = 0.857$, $\zeta = 0.048$.

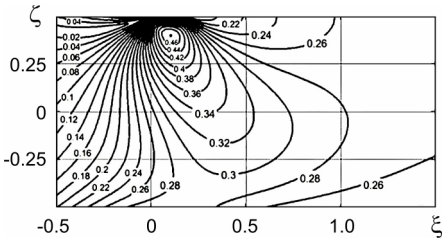

Рис. 6

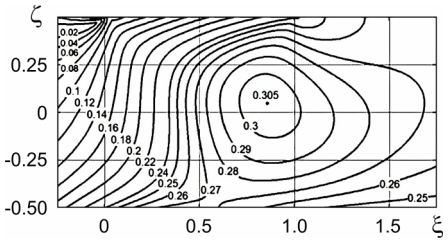

Рис. 7

Значення $\max \overline{\tau}_{\max}$ для різних a разом із безрозмірними координатами ξ, ζ відповідних точок, а також значення сукупного параметра $\alpha = hG/(pR)$ наведено у табл. 1.

Таблиця 1

$\max \overline{\tau}_{\max}$	0.479	0.370	0.332	0.315	0.305	0.289	0.279	0.272	0.268
a	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.5	2	2.5	3
ξ	0.105	0.266	0.464	0.672	0.857	1.310	1.783	2.265	2.750
ζ	0.398	0.298	0.192	0.096	0.048	0.034	0.067	0.103	0.127
α	2.841	0.940	0.480	0.294	0.199	0.096	0.056	0.037	0.026

При обчисленні за формулами (34) нормальних переміщень у точках вільної частини верхньої грані смуги, як і у випадку штампа без заокруглення [6], встановлено, що на певній відстані від краю області контакту деформована межа смуги припіднімається, утворюючи пагорбок. У табл. 2 подано відносні максимальні значення переміщень $\overline{u}_{\max} = 10 \max u_y/\delta$ і відповідні їм безрозмірні координати ξ верхньої грані смуги, які визначають висоту пагорбка та положення його вершини.

Таблиця 2

$\overline{u}_{\max}$	0.433	0.428	0.423	0.417	0.410	0.403	0.395	0.387	0.379
$-\xi$	0.954	0.924	0.897	0.872	0.85	0.831	0.814	0.798	0.785
a	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1

1. *Альперин И. Г.* Напряжения в бесконечной полосе, равномерно сжатой на половине длины // Уч. записки / Харьк. гос. ун-т им. А. М. Горького. – Т. XXVIII: Записки Науч.-исслед. ин-та математики и механики и Харьк. мат. общ-ва. Сер. 4. – 1950. – Т. 20. – С. 107–118. http://dspace.univer.kharkov.ua/handle/123456789/1503.
2. *Беленький М. Я.* Смешанная задача теории упругости для бесконечно длинной полосы // Прикл. математика и механика. – 1952. – **16**, № 3. – С. 283–292.
3. *Нобл Б.* Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
   Те саме: *Noble B.* Methods based on the Wiener–Hopf technique for the solution of partial differential equations. – London: Pergamon Press, 1958. – x+246 p.
4. *Острик В. І.* Ковзний і гладкий контакт штампів різного профілю з пружною смугою // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 4. – С. 133–145.
5. *Улитко А. Ф.* Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академпериодика, 2002. – 342 с.
6. *Улитко А. Ф., Острик В. И.* Смешанная задача теории упругости для полосы на жестком основании // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости с междунар. участием. – Ростов-на-Дону: Новая книга, 2004. – С. 372–375.
7. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
8. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1949. – 272 с.
9. *Dini D., Barber J. R., Churchman C. M., Sackfield A., Hills D. A.* The application of asymptotic solutions to contact problems characterised by logarithmic singularities // Eur. J. Mech. A-Solid. – 2008. – **27**, No. 5. – P. 847–858.

ГЛАДКИЙ КОНТАКТ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ШТАМПА С ЗАКРУГЛЕННЫМ КРАЕМ И УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

Рассмотрена контактная задача для упругой полосы, в одну грань которой вдавливается полубесконечный штамп с закругленным краем, а другая ее грань закреплена. Силы трения в области контакта не учитываются. Методом Винера – Хопфа получено точное аналитическое решение задачи. Найдены распределения контактных напряжений, напряжения внутри полосы и вдоль закрепленной грани, нормальные перемещения точек свободной от нагружения части одной из граней полосы. Построены изохоры и установлено положение точки, в которой максимальные касательные напряжения достигают своего наибольшего значения.

SMOOTH CONTACT OF THE SEMI-INFINITE PUNCH WITH ROUNDED EDGE AND AN ELASTIC STRIP

The contact problem is considered for an elastic strip with fixed bottom face and into the top face the semi-infinite punch with rounded edge is impressed. The friction forces in the contact area are not taken into account. The exact analytical solution of the problem is obtained using the Wiener – Hopf method. The distributions of the contact stresses, the stresses inside the strip and along its fixed face as well as the normal displacements of the points of traction-free part of the top strip face are determined. The isochoric lines of maximum shear stresses are constructed and the position of the point with maximum value of these stresses is established.

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
25.05.16