УДК 517.524

Д. І. Боднар[1], Х. Й. Кучмінська[2]

РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ У 1996–2016 РОКАХ

Проведено аналіз досліджень у теорії гіллястих ланцюгових дробів за останні 20 років у напрямках, що розвивались під загальним керівництвом професора В. Я. Скоробогатька (18.07.1927 – 04.07.1996), зокрема: інтерполяція функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами, встановлення ефективних ознак збіжності та обчислювальної стійкості таких дробів, відповідність між кратними степеневими рядами і функціональними гіллястими ланцюговими дробами, дослідження різних класів функціональних дробів, застосування гіллястих ланцюгових дробів.

В оглядовій статті [25], присвяченій пам'яті професора Віталія Яковича Скоробогатька (18.07.1927 – 04.07.1996), проаналізовано результати з аналітичної теорії і застосувань гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) за час після виходу перших публікацій [48, 70]. Ці дослідження виконувались під керівництвом В. Я. Скоробогатька у таких напрямках: інтерполяція функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами, встановлення ефективних ознак збіжності та обчислювальної стійкості ГЛД, відповідність між кратними степеневими рядами і функціональними ГЛД, дослідження різних класів функціональних ГЛД, застосування ГЛД до побудови ефективних алгоритмів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, побудова теорії інтегральних ланцюгових дробів, їх застосування до розв'язання інтегральних рівнянь. Результати досліджень були підсумовані у монографіях [13, 27, 69, 72].

Проаналізуємо, як розвивались ці напрямки після 1996 р. За цей час з аналітичної теорії багатовимірних неперервних дробів захищено одну докторську [57] і сім кандидатських дисертацій [10, 28, 32, 33, 36, 42, 61].

Дослідження з теорії інтегральних ланцюгових дробів не продовжувались, але такі дроби успішно використовувались у задачах інтерполяції нелінійних функціоналів і операторів на континуальних множинах вузлів [40, 60].

Задачі інтерполяції розглядались лише для окремих типів ГЛД, зокрема для дво- і тривимірних неперервних дробів, гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними (Х. Й. Кучмінська [50], О. Є. Баран [10], С. М. Возна [59]), а також для неперервних дробів (М. М. Пагіря [67, 68]).

М. О. Недашковський разом зі своїми учнями продовжує розвивати тематику, пов'язану із побудовою ефективних чисельно стійких методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою ГЛД [65]. У монографії [66] розв'язуються системи лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнтами яких є поліноми від параметра.

Отримала розвиток аналітична теорія гіллястих ланцюгових дробів з N гілками розгалуження. Встановлено найбільш загальну на сьогодні ознаку збіжності ГЛД з додатними елементами [18]. Однак з цієї теореми не вдається отримати аналог критерію Зейделя збіжності неперервних дробів [76, 83, 85, 87] хоча б у такому формулюванні:

ГЛД $b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}}$ *з додатними елементами збігається, якщо ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left(b_{i(k)},\, i_p = 1,\dots,N,\, p = 1,\dots,k\right)$$ *є розбіжним.*

Отже, ця задача залишається відкритою.

У працях [14, 15] проведено аналіз ознак збіжності ГЛД, сформульовано нерозв'язані проблеми. Набули подальшого розвитку дослідження збіжності ГЛД, елементи яких належать до спарених і параболічних областей [1, 2].

Найбільш загальну параболічну область збіжності для ГЛД загального вигляду встановила Т. М. Антонова [2].

Теорема 1. *Нехай існують такі додатні сталі* ε, $\varepsilon < 1$, *і* ψ, $\psi < \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)}$, *що для всіх можливих мультиіндексів елементів ГЛД*

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1} \tag{1}$$

задовольняються умови

$$\sum_{i_k=1}^{N} \frac{\left|a_{i(k)}\right| - \operatorname{Re}\left(a_{i(k)} \exp\left(-i(\psi_{i(k-1)} + \psi_{i(k)})\right)\right)}{\cos\psi_{i(k)} - p_{i(k)}} \le 2(1-\varepsilon)p_{i(k-1)},$$

де $\psi_{i(k)}$, $p_{i(k)}$ – *деякі дійсні числа такі, що*

$$\left|\psi_{i(n)}\right| \le \psi, \quad n = 0,1,\ldots, \quad 0 \le p_{i(k)} < (1-\varepsilon)\cos\psi_{i(k)}, \quad k = 1,2,\ldots, p_0 \ge 0.$$

Тоді

(***i***) *значення всіх підхідних дробів ГЛД* (1) *скінченні і лежать у півплощині*

$$V_0 = \{w \in C : \operatorname{Re}\left(w \exp(-i\psi_0)\right) \ge -p_0\};$$

(***ii***) *існують скінченні границі підпослідовностей підхідних дробів* $\{f_{2n}\}$, $\{f_{2n-1}\}$ *ГЛД* (1);

(***iii***) *ГЛД* (1) *збігається, якщо розбігається ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\max\left|a_{i(k)}\right|\right)^{-1}$.

В. Р. Гладун трактує питання стійкості ГЛД через стійкість до збурень як неперервну залежність нескінченних ГЛД від своїх елементів [33, 34] Нехай $I_0 = \{0\}$, $I_k = \{i(k) : i_p = 1,2,\ldots,N,\ p = 1,2,\ldots,k\}$, $k \ge 1$. Розглянемо ГЛД

$$a_0\left(b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1} \tag{2}$$

і збурений до нього ГЛД

$$\tilde{a}_0\left(\tilde{b}_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\tilde{a}_{i(k)}}{\tilde{b}_{i(k)}}\right)^{-1} \tag{3}$$

з комплексними елементами. Послідовність непорожніх множин $\{\Omega_{i(k)}\}$, $\Omega_{i(k)} \subset \mathbb{C}^2$ назвемо послідовністю множин абсолютної стійкості до збурень ГЛД (2), якщо для довільного дійсного ε, $\varepsilon > 0$, існує таке дійсне число δ, $\delta > 0$, що для кожного $(a_{i(k)}, b_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k \ge 0$, і кожного $(\tilde{a}_{i(k)}, \tilde{b}_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k \ge 0$, таких, що $\left|a_{i(k)} - \tilde{a}_{i(k)}\right| < \delta$, $\left|b_{i(k)} - \tilde{b}_{i(k)}\right| < \delta$, виконуються нерівності

$$\left|f_n - \tilde{f}_n\right| < \varepsilon, \qquad n \ge 0,$$

де f_n, $\tilde{f}_n$ – n-ті підхідні дроби ГЛД (2) і (3) відповідно.

Якщо ж всі $a_{i(k)} \ne 0$, $b_{i(k)} \ne 0$, $i(k) \in I_k$, $k \ge 0$, і для кожного $(a_{i(k)}, b_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k \ge 0$, і кожного $(\tilde{a}_{i(k)}, \tilde{b}_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$,

$k \geq 0$, таких, що $\left|\frac{a_{i(k)} - \tilde{a}_{i(k)}}{a_{i(k)}}\right| < \delta$, $\left|\frac{b_{i(k)} - \tilde{b}_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right| < \delta$, виконуються нерівності $\left|\frac{f_n - \tilde{f}_n}{f_n}\right| < \varepsilon$, $n \geq 0$, то послідовність множин $\{\Omega_{i(k)}\}$ називають множинами відносної стійкості до збурень ГЛД (2).

Д. І. Боднар і В. Р. Гладун досліджували стійкість до збурень ГЛД з додатними, дійсними, зокрема, від'ємними, знакозмінними елементами, а також стійкість деяких підпослідовностей їх підхідних дробів [19–21, 34]. Особливо цікавим виявився факт збіжності, і тим більше стійкості, у випадку, коли частинні чисельники ГЛД є від'ємними [4, 34]. Для неперервних дробів в області $\{x \in R : x < -1/4\}$ ці питання не досліджено.

Теорема 2. *Нехай відносні похибки елементів ГЛД* (2) *є рівномірно обмеженими. Тоді області* $\Omega_0 = (0, +\infty) \times (\nu_0, +\infty)$, $\Omega_{i(k)} = \Omega_k = (0, \mu_k) \times (\nu_k, +\infty)$, $i(k) \in I_k$, $k \geq 1$, *де всі* $\nu_k > 0$, $\mu_k > 0$, *є послідовністю областей відносної стійкості ГЛД* (2), *якщо розбігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_{k-1} \nu_k^2 \mu_k^{-1} (N\mu_{k+1} + \nu_k \nu_{k+1})^{-1} .$$

Досліджено також багатовимірні множини стійкості ГЛД з комплексними елементами, коли

$$\left(a_{i(k)1}, a_{i(k)2}, \ldots, a_{i(k)N}, b_{i(k)}\right) \in \Omega_{i(k)}, \quad \Omega_{i(k)} \subset \mathbb{C}^{N+1}, \quad i(k) \in I_k, \quad k \geq 0 .$$

Цікавими і перспективними є дослідження збіжності ГЛД з матричними елементами [64]. Нехай X – банахова алгебра квадратних матриць порядку p над полем $\mathbb{C}$. Матричний ГЛД – це послідовність підхідних дробів:

$$F_1 = \sum_{i_1=1}^{N} b_{i_1}^{-1} a_{i_1} = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}},$$

$$F_2 = \sum_{i_1=1}^{N} \left(b_{i_1} + \sum_{i_2=1}^{N} b_{i_1 i_2}^{-1} a_{i_1 i_2} \right)^{-1} a_{i_1} = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{2} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \ldots,$$

де $a_{i(k)}$, $b_{i(k)} \in X$ – квадратні невироджені $(p \times p)$-матриці.

Теорема 3. *Матричний гіллястий ланцюговий дріб*

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{4}$$

з елементами, що задовольняють умови

$$\left\| b_{i(k)}^{-1} \right\| \leq \left(1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \left\| a_{i(k+1)} \right\| \right)^{-1}, \qquad i(k) \in I_k, \qquad k \geq 1,$$

абсолютно збігається, а його множиною значень є множина

$$\left\{ z \in X : \|z\| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \left\| a_{i(1)} \right\| \right\}.$$

Для побудови розвинень функцій багатьох змінних у ГЛД використовують два підходи: ***1***) встановлення рекурентних співвідношень для заданих функцій; ***2***) принцип відповідності між кратними степеневими рядами і функціональними ГЛД.

Власне перший підхід був використаний О. С. Манзій для побудови розвинень відношень гіпергеометричних функцій Аппеля $F_2(a, b, b'; c, c'; z)$,

$F_3(a,a',b,b';c;z)$. Нею встановлено нові рекурентні співвідношення для цих функцій, на основі яких побудовано та досліджено відповідність і збіжність розвинень їх відношень у ГЛД, встановлено оцінки похибок апроксимацій підхідними дробами в деяких областях [26, 62, 63]. У роботах Н. П. Гоєнко [22, 23, 35, 37, 38] апарат гіллястих ланцюгових дробів було використано для наближення гіпергеометричних функцій Лаурічелли

$$F_D^{(N)}(a,b_1,b_2,\dots,b_N;c;z_1,z_2,\dots,z_N) =$$
$$= \sum_{k_1,k_2,\dots k_N=0}^{N} \frac{(a)_{k_1+k_2+\dots+k_N}(b_1)_{k_1}(b_2)_{k_2}\dots(b_N)_{k_N}}{(c)_{k_1+k_2+\dots+k_N}} \frac{z_1^{k_1}z_2^{k_2}\dots z_N^{k_N}}{k_1!k_2!\dots k_N!},$$

де параметри $a,b_1,b_2,\dots,b_N;c$ – комплексні числа, $c\neq 0,-1,-2,\dots$; z_1,z_2, $\dots,z_N$ – комплексні змінні; $(\alpha)_k$ – символ Похгаммера.

Побудовано та досліджено багатовимірний аналог неперервного дробу Nörlund'a.

Теорема 4. *Нехай параметри функції F_D є дійсними числами і задовольняють умови $a>0$, $b_k>0$, $k=1,\dots,N$, $2c>a+\sum_{k=1}^{N}b_k+1$. Відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли*

$$\frac{F_D(a,\overline{b};c;\overline{z})}{F_D(a+1,\overline{b}+\overline{e}_i;c+1;\overline{z})} \tag{5}$$

розвивається у ГЛД типу Nörlund'a

$$b_0(\overline{z})+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}(\overline{z})}{b_{i(k)}(\overline{z})}, \tag{6}$$

де

$$b_0(\overline{z})=1-\frac{a+1}{c}z_1-\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j}{c}z_j,\quad a_{i(k)}(\overline{z})=\frac{(a+k)(b_{i_k}+p_{i(k)})}{(c+k-1)(c+k)}z_{i_k}(1-z_{i_k}),$$

$$b_{i(k)}(\overline{z})=1-\frac{a+k}{c+k}z_{i_k}-\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j+p_{i(k)j}}{c+k}z_j,\qquad p_{i(k)}=\sum_{m=1}^{k-1}\delta_{i_k}^{i_m}+\delta_{i_k}^{1}.$$

ГЛД (6) збігається рівномірно на компактах області $G=\{\overline{z}\in\mathbb{C}^N:\operatorname{Re}z_i<\frac{1}{2},\ i=1,\dots,N\}$ до голоморфної функції, яка є аналітичним продовженням функції (5), голоморфної у деякому околі початку координат, на область G.

Наближення функцій Лаурічелли – Сарана гіллястими ланцюговими дробами досліджено у роботі [39].

Одним із найбільш ефективних і загальних методів розвинення функцій як однієї [76], так і багатьох змінних у функціональні ГЛД є побудова ГЛД, відповідних до кратних степеневих рядів.

Нехай задано формальний кратний степеневий ряд

$$L(z)=\sum_{|m(N)|\geq 0}c_{m(N)}z^{m(N)}, \tag{7}$$

де $c_{m(N)}\in\mathbb{C}$, $z=(z_1,z_2,\dots z_N)\in\mathbb{C}^N$, $m(N)=m_1m_2\dots m_N$ – мультиіндекс, $m_i\geq 0$, $i=1,2,\dots,N$; $|m(N)|=m_1+m_2+\dots m_N$; $z^{m(N)}=z_1^{m_1}z_2^{m_2}\dots z_N^{m_N}$.

Деякий функціональний ГЛД є відповідним до ряду (7), якщо розвинення кожного його n-го підхідного дробу у формальний кратний степеневий ряд збігається з рядом (7) за всіма однорідними поліномами до степеня ν_n включно і $\nu_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Для класу багатовимірних C-дробів $b_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{N} \dfrac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}$ ця задача не має однозначного розв'язку. Для досягнення бажаного результату потрібно накладати додаткові умови на коефіцієнти дробу, наприклад, умову, що $a_{i(k)}$ не змінюються при перестановці індексів у всіх мультиіндексах, або покласти деякі $a_{i(k)}$ рівними нулеві.

Інший шлях − змінити структуру багатовимірного неперервного дробу. Саме так було означено перші відповідні двовимірні неперервні дроби (ДНД) для подвійних степеневих рядів у роботах Х. Й. Кучмінської [49], J. A. Murphy, M. R. O'Donohoe [84]:

$$\Phi_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,i} xy}{\Phi_i}, \qquad \Phi_i = 1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i} x}{1} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j} y}{1} \tag{8}$$

і їх наближення (підхідні дроби)

$$f_n = \frac{P_n}{Q_n} = \Phi_0^{(n)} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{a_{i,i} xy}{\Phi_i^{(n-2i)}(x, y)},$$

$$\Phi_i^{(k)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{k} \frac{a_{i+j,i} x}{1} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{k} \frac{a_{i,i+j} y}{1}, \qquad \Phi_i^{(0)} = 1. \tag{9}$$

Однак введені наближення ДНД вигляду (9) не давали можливості отримати оцінки таких дробів з додатними елементами, аналогічні до оцінок для неперервних дробів, що й привело до розгляду загального типу наближень для ДНД [78, 79]. Для ДНД

$$\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=0}^{\infty} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i}, \qquad \Phi_i = b_{i,i} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}, \tag{10}$$

загальні наближення мають вигляд

$$f_n = \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i^{(n-i-1)}},$$

$$\Phi_i^{(k)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{k} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{k} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}},$$

$$\Phi_i^{(0)} = b_{i,i}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Твердження [78]. *Нехай елементи ДНД* (10) − *додатні дійсні числа,* j, k − *довільні натуральні числа. Тоді для наближень* f_n (11) *виконується властивість «вилки»* $f_{2k} < f_{2k+2} < f_{2j+1} < f_{2j-1}$.

Наближення (9) є фігурними наближеннями ДНД (8). Вони отримали назву C-наближень. ДНД (8) з наближеннями типу (11) також є відповідними до формального подвійного степеневого ряду [77, 79].

Основи аналітичної теорії двовимірних неперервних дробів були закладені в роботах Х. Й. Кучмінської [49−59, 77−82], Т. М. Антонової, О. М. Сусь [5−7], О. М. Сусь [59, 71], С. М. Возної [31, 32, 59, 80].

Сформулюємо ознаку збіжності ДНД, встановлену О. М. Сусь [71].

Теорема 5. *Нехай елементи* $b_{ij}, i, j = 0,1,\ldots$, *ДНД*

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b_{kk} + \Phi_k}, \qquad \Phi_k = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_{k,k+j}}, \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{12}$$

належать області $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0, |\arg z| < \theta\}$, $\theta < \frac{\pi}{2}$, *і виконуються умови*

$$\lim_{r\to\infty} (\cos\theta)^{-2r} A_r^1 = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} (\cos\theta)^{-2r} A_r^2 = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} (\cos\theta)^{-3r} A_r^3 = 0,$$

де

$$A_r^k = \prod_{\ell=1}^{r} (1 + \mu_{\ell+1}^k), \qquad k = 1,2,3,$$

$$\mu_\ell^1 = \sup_i \{|b_{i+\ell-1,i}| \,\mathrm{Re}\, b_{i+\ell,i}\}, \qquad \mu_\ell^2 = \sup_i \{|b_{i,i+\ell-1}| \,\mathrm{Re}\, b_{i,i+\ell}\},$$

$$\mu_\ell^3 = |b_{\ell-1,\ell-1}| \,\mathrm{Re}\, b_{\ell,\ell}, \qquad \ell = 2,3,\ldots, \qquad i = 0,1,\ldots.$$

Тоді ДНД (12) *є збіжним і справджується оцінка*

$$|f_n - f_{4p+1}| \le \frac{1}{\mathrm{Re}\, b_{0,0}} (1-\cos\theta)^{-1} (\cos\theta)^{-4p-2} (A_{2p+2}^1 + A_{2p+2}^2) +$$

$$+ \frac{2}{\mathrm{Re}\, b_{0,0}} (1-\cos\theta)^{-1} (\cos\theta)^{-3p-1} A_{p+1}^3 + \frac{1}{\mathrm{Re}\, b_{0,0}} (\cos\theta)^{-2p-1} A_{2p}^3,$$

де $n > 4p+1$.

Дещо іншу структуру двовимірних неперервних дробів запропонував W. Siemaszko [86].

ГЛД, відповідні до ряду (7), можна будувати у вигляді ГЛД з нерівнозначними змінними

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{13}$$

де $i_0 = N$. Такі дроби тепер найбільш активно досліджуються. У роботах [3, 8–11, 16, 17, 29, 30, 44, 47, 74, 75] розглянуто різні ознаки збіжності таких дробів, а в роботах [12, 41, 43, 45, 46, 74, 75] встановлено зв'язок із кратними степеневими рядами.

Для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду О. Є. Баран [8, 9, 11, 12, 46] встановила кругові області збіжності, які є багатовимірними узагальненнями деяких відомих теорем (W. Leighton, H. S. Wall, W. J. Thron, L. J. Lange, N. J. Wyshinski, J. Mc Laughlin) [76, 83] про спарені множини збіжності неперервних дробів. У випадку $N = 1$ при певних умовах на параметри отримані нею у [8] кругові множини збіжності є ширшими, ніж у згаданих вище теоремах.

Нехай

$$I = \{i(k) : i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k,\ 1 \le i_p \le i_{p-1},\ p = 1,\ldots k,\ k \ge 1\}$$

і

$$\ell = \ell(i(k)) = \sum_{s=1}^{k} \delta_{i_k}^{i_s}.$$

Множину мультиіндексів I розіб'ємо на три підмножини:

$$I_1 = \{i(k) : \ell = 1, k \ge 1\}, \qquad I_2 = \{i(k) : \ell = 2m, k \ge 2\},$$

$$I_3 = \{i(k) : \ell = 2m+1, k \ge 2\},$$

які попарно не перетинаються.

Теорема 6. *Гіллястий ланцюговий дріб* $(N > 1)$

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)}^2}{1} \tag{14}$$

з комплексними елементами $c_{i(k)}$ *збігається, якщо виконуються умови*

$$|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{1,i_k}| \le \xi_{1,i_k}, \quad (\xi_{1,i_k} + |\Gamma_{1,i_k}|)^2 \le \frac{\rho_1 - \varepsilon_1}{i_{k-1} - 1}, \qquad i(k) \in I_1,$$

$$|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{2,i_k}| \ge \xi_{2,i_k}, \quad (\xi_{2,i_k} - |\Gamma_{2,i_k}|)^2 \ge (2 + \rho_1)(1 + \rho_1 + \rho + \varepsilon_2),$$

$$i(k) \in I_2,$$

$$|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{3,i_k}| \le \xi_{3,i_k}, \quad (\zeta_{3,i_k} + |\Gamma_{3,i_k}|)^2 \le \rho - \varepsilon_3, \qquad i(k) \in I_3,$$

де $\rho_1 > 0$, $\rho > 0$, $0 < \varepsilon_1 < \rho$, $0 < \varepsilon_3 < \rho$, $\varepsilon_2 > 0$, $\Gamma_{s,i_k} \in \mathbb{C}$, $\xi_{s,i_k} > 0$, $s = 1, 2, 3$.

Для ДНД і ГЛД спеціального вигляду Х. Й. Кучмінською були запропоновані межові версії теореми Ворпіцького [52, 82]. Наведемо одну з них.

Теорема 7. *Нехай* ρ *– дійсне число з* $(0, S]$ *і* F_ρ *– сім'я двовимірних неперервних дробів* (10) *з частинними знаменниками, що дорівнюють 1, елементи яких задовольняють умови*

$$|a_{i+1,i}| + |a_{i,i+1}| + |a_{i+1,i+1}| = \rho(1-\rho), \qquad |a_{0,0}| = \rho(1-\rho),$$

$$|a_{i+j,i}| = \rho(1-\rho), \quad |a_{i,i+j}| = \rho(1-\rho), \quad j \ge 2, \quad 0 < \rho \le 1/2.$$

Тоді множини всіх можливих значень f *двовимірних неперервних дробів* (11) *з* F_ρ *є кільцем* $\rho\dfrac{(1-\rho)}{1+\rho} \le |f| \le \rho$.

Р. І. Дмитришин дослідив деякі класи функціональних гіллястих ланцюгових дробів із нерівнозначними змінними, встановив умови їх збіжності, встановив оцінки похибок апроксимації підхідними дробами, побудував різні багатовимірні алгоритми розвинення кратних степеневих рядів у такі дроби, зокрема, g-алгоритм Бауєра, qd-алгоритм Рутисхаузера та інші [42–47, 74, 75]. Він побудував і досліджує розвинення деяких конкретних аналітичних функцій у функціональні ГЛД з нерівнозначними змінними. Наприклад, функція

$$F(a,1,c;z_1)\, F\big(b,1,d;-z_2\,(F(a,1,c;-z_1))^2\big) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(a)_k}{(c)_k} z_1^k \right)^{2\ell+1} \frac{(b)_\ell}{(d)_\ell} z_2^\ell$$

розвивається у g-дріб з нерівнозначними змінними

$$\left(\Phi_0(z_1) + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{g_{0n}(1-g_{0n})z_2}{\Phi_n(z_1)} \right)^{-1},$$

$$\Phi_n(z_1) = 1 + g_{1n} z_1 \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \frac{g_{kn}(1-g_{k-1,n})z_1}{1} \right)^{-1},$$

$$g_{2r-1,\ell-1} = \frac{a+r-1}{c+2r-2}, \qquad g_{2r,\ell-1} = \frac{r}{c+2r-1},$$

$$g_{0,2\ell-1} = \frac{b+\ell-1}{d+2\ell-2}, \qquad g_{0,2\ell} = \frac{\ell}{d+2\ell-1}.$$

У різних класах ГЛД розглядаються різні типи функціональних ГЛД: багатовимірні g-, J-, π-, C-дроби. Найбільш вивченими є багатовимірні g-дроби. Їх дослідження підсумовано в оглядовій статті [24]. У роботі Н. П. Гоєнко [37] досліджено зв'язок між відповідністю і рівномірною збіжністю функціональних ГЛД.

М. М. Бубняк означила і, використовуючи властивості гранично-періодичних і зворотних неперервних дробів, встановила ознаки поточкової і рівномірної збіжності періодичних ГЛД спеціального вигляду, зокрема, дослідила овальні області збіжності для p-періодичних ГЛД [16, 17, 29, 30, 73]. Наведемо необхідну умову збіжності 1-періодичного ГЛД з дійсними елементами, сформульовану у такій теоремі [28, с. 99].

Теорема 8. *Якщо 1-періодичний ГЛД*

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1} \tag{15}$$

з дійсними елементами c_{i_k} *збігається, то його елементи задовольняють умови* $c_q \ge -\frac{1}{4} X_{q-1}^2$, $q = 1, 2, \ldots, N$, *де* X_q *визначаються рекурентно:* $X_q = \frac{1}{2}\left(X_{q-1} + \sqrt{X_{q-1}^2 + 4c_q}\right)$, $X_0 = 1$.

Достатньою умовою збіжності ГЛД (15) є умова $c_q > -\frac{1}{4} X_{q-1}^2$, $q = 1, 2, \ldots, N$.

Зауважимо, що список використаних джерел є далеко не повним.

1. *Антонова Т. М.* Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 4. – С. 7–12.
2. *Антонова Т. М.* Збіжність гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами та їх парних частин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 4. – С. 7–15.
3. *Антонова Т. М., Боднар Д. І.* Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2000. – **31**. – С. 19–32.
4. *Антонова Т. М., Гладун В. Р.* Деякі достатні умови збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 4. – С. 27–35.
5. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Достатні умови еквівалентної збіжності послідовностей різних наближень двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 4. – С. 7–14.
6. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Необхідні умови збіжності для одного класу двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. А. С. Романюк. – 2015. – **12**, № 4. – С. 8–28.
7. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про парні множини збіжності для двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50,** № 3. – С. 94–101.
8. *Баран О. Є.* Деякі кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 3. – С. 7–14.
   Те саме: *Baran O. E.* Some circular convergence regions for branched continued fractions of a special form // J. Math. Sci. – 2015. – **205**, No. 4. – P. 491–500.
9. *Баран О. Є.* Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Карпат. мат. публікації. – 2013. – **5**, № 1 – С. 4–13.
10. *Баран О. Є.* Наближення функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Івано-Франківськ, 2014. – 146 с.
11. *Баран О. Є.* Парні кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 4. – С. 73–80.
    Те саме: *Baran O. E.* Twin circular domains of convergence of branched continued fractions with inequivalent variables // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 2. – P. 209–218.

12. *Баран О. Є., Боднар Д. І.* Розвинення кратного степеневого ряду у багатовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними // Волин. мат. вісн. – 1999. – Вип. 6. – С. 15–20.
13. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
14. *Боднар Д. І.* Аналітична теорія гіллястих ланцюгових дробів: історія, основні результати, нерозв'язані проблеми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50,** № 3. – С. 21–29.
15. *Боднар Д. І.* Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41,** № 1. – С. 117–126.
    Те саме: *Bodnar D. I.* On the convergence of branched continued fractions // J. Math. Sci. – 1999. – **97**, No. 1. – P. 3862–3871.
16. *Боднар Д. І., Бубняк М. М.* Багатовимірне узагальнення овальної теореми для періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. І. О. Луковський, В. Л. Макаров. – 2014. – **11**, № 4. – С. 54–67.
17. *Боднар Д. І., Бубняк М. М.* Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 4. – С. 24–32.
    Те саме: *Bodnar D. I., Bubnyak M. M.* Estimates of the rate of pointwise and uniform convergence for one-periodic branched continued fractions of a special form // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 289–300.
18. *Боднар Д. І., Возняк О. Г., Михальчук Р. І.* Ознака збіжності гіллястого ланцюгового дробу з додатними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 1. – С. 57–64.
    Те саме: *Bodnar D. I., Voznyak O. H., Mykhal'chuk R. I.* A criterion of convergence of a branched continued fraction with positive elements // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, No. 1. – P. 70–80.
19. *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Деякі області стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2006. – Вип. 288. – С. 18–27.
20. *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Достатні умови стійкості гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45,** № 1. – С. 22–27.
21. *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Про стійкість до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Мат. студії. – 2006. – **25**, № 2. – С. 207–212.
22. *Боднар Д. І., Гоєнко Н. П.* Наближення відношення функцій Лаурічелли гіллястим ланцюговим дробом // Мат. студії. – 2003. – **20**, № 2. – С. 210–214.
23. *Боднар Д. І., Гоєнко Н. П.* Наближення гіпергеометричних функцій Лаурічелли багатовимірними узагальненнями неперервних дробів Nörlund'а // Український математичний конгрес-2001. Секція 10. Теорія наближень та гармонічний аналіз. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – С. 34–44.
24. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Багатовимірні узагальнення g-дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 2. – С. 34–41.
    Те саме: *Bodnar D. I., Kuchmins'ka Kh. Yo.* Multidimensional generalizations of g-fractions // J. Math. Sci. – 2009. – **162**, No. 1. – P. 34–43.
25. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Гіллясті ланцюгові дроби (до 30-річчя виходу першої публікації) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39,** № 2. – С. 9–19.
    Те саме: *Bodnar D. I., Kuchmins'ka Kh. I.* Branched continued fractions (30$^{\text{th}}$ anniversary of the first publication) // J. Math. Sci. – 1998. – **90**, No. 5. – P. 2324–2333.
26. *Боднар Д. І., Манзій О. С.* Дослідження збіжності розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 у гіллястий ланцюговий дріб // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41,** № 4. – С. 12–16.
    Те саме: *Bodnar D. I., Manzii O. S.* Expansion of the ratio of Appel hypergeometric functions F_3 into a branching continued fraction and its limit behavior // J. Math. Sci. – 2001. – **107**, No. 1. – P. 3550–3554.
27. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – Київ: Наук. думка, 1974. – 272 с.
28. *Бубняк М. М.* Множини збіжності періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Івано-Франківськ, 2016. – 151 с.

29. *Бубняк М. М.* Ознаки збіжності періодичних гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. А. С. Романюк. – 2015. – **12**, № 4. – С. 54–66.
30. *Бубняк М. М.* Оцінки швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Карпат. мат. публікації. – 2013. – **5**, № 2. – С. 187–195.
31. *Возна С. М.* Збіжність двовимірного неперервного g-дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 3. – С. 28–32.
32. *Возна С. М.* Наближення функцій неперервними та двовимірними неперервними дробами: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Львів, 2008. – 146 с.
33. *Гладун В. Р.* Аналіз стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Львів, 2007. – 150 с.
34. *Гладун В. Р.* Ознаки збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 4. – С. 16–26.
35. *Гоєнко Н. П.* Збіжність розвинення відношення функцій Лаурічелли F_D у гіллястий ланцюговий дріб // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45,** № 4. – С. 61–66.
36. *Гоєнко Н. П.* Наближення гіпергеометричних функцій Лаурічелли гіллястими ланцюговими дробами: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Львів, 2004. – 125 с.
37. *Гоєнко Н. П.* Про збіжність розвинення відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли у гіллясті ланцюгові дроби // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2000. – **31**. – С. 135–143.
38. *Гоєнко Н.* Принцип відповідності та збіжність послідовностей аналітичних функцій багатьох змінних // Мат. вісн. НТШ. – 2007. – **4**. – С. 42–48.
39. *Гоєнко Н., Антонова Т., Ракінцев С.* Наближення відношення функцій Лаурічелли–Сарана F_S з дійсними параметрами гіллястими ланцюговими дробами // Мат. вісн. НТШ. – 2011. – **8**. – С. 28–42.
40. *Демків І. І.* Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби для функціоналів від двох змінних // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2011. – № 3. – С. 143–148.
41. *Дмитришин Р. І.* Багатовимірне узагальнення g-алгоритму Бауера // Карпат. мат. публікації. – 2012. – **4**, № 2. – С. 247–260.
42. *Дмитришин Р. І.* Багатовимірні аналоги g-дробів, їх властивості, ознаки збіжності: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Львів, 1998. – 128 с.
43. *Дмитришин Р. І.* Приєднані гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 9. – С. 1175–1184.
    Те саме: *Dmytryshyn R. I.* Associated branched continued fractions with two independent variables // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, No. 9. – P. 1312–1323.
44. *Дмитришин Р. І.* Про збіжність багатовимірного g-дробу з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 4. – С. 121–127.
45. *Дмитришин Р. І.* Про розвинення деяких функцій у двовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 4. – С. 28–34.
    Те саме: *Dmytryshyn R. I.* On the expansion of some functions in a two-dimensional g-fraction with independent variables // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 3. – P. 320–327.
46. *Дмитришин Р. І., Баран О. Є.* Деякі типи гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до кратних степеневих рядів // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2000. – **31**. – С. 82–92.
47. *Дмитришин Р.* Про деякі області збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними // Мат. вісн. НТШ. – 2011. – **8**. – С. 69–77.
48. *Дронюк Н. С.* Розклад деяких функцій у гіллясті ланцюгові дроби // Друга наук. конф. молодих математиків України. – Київ: Наук. думка, 1966. – С. 185–189.
49. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 613–617.
50. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.
51. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні правильні C-дроби // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55,** № 2. – С. 7–15.

Те саме: *Kuchmins'ka Kh. Yo.* Two-dimensional regular C-fractions // J. Math. Sci. – 2013. – **192**, No. 5. – P. 485–497.
52. *Кучмінська Х. Й.* Межові версії теореми Ворпіцького для двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 8. – P. 1106–1116.
Те саме: *Kuchmins'ka Kh. Yo.* Boundary versions of the Worpitzki theorem for two-dimensional continued fractions // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, No. 8. – P. 1236–1247.
53. *Кучмінська Х. Й.* Про властивості двовимірних неперервних дробів // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. А. С. Романюк. – 2010. – **7**, № 1. – С. 113–127.
54. *Кучмінська Х. Й.* Про достатні умови збіжності двовимірних неперервних дробів // Доп. НАН України. – 2000. – № 12. – С. 11–16.
55. *Кучмінська Х. Й.* Про збіжність двовимірних неперервних дробів // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2000. – **31**. – С. 282–296.
56. *Кучмінська Х. Й.* Про теореми типу Ворпіцького для двовимірного неперервного дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 3. – С. 17–26.
Те саме: *Kuchmins'ka Kh. Yo.* On Worpitzky-like theorems for a two-dimensional continued fraction // J. Math. Sci. – 2012. – **180**, No. 1. – P. 1–14.
57. *Кучмінська Х. Й.* Розвиток аналітичної теорії двовимірних неперервних дробів: Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Львів, 2012. – 306 с.
58. *Кучмінська Х. Й.* Стійкість при обчисленні двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 4. – С. 15–23.
Те саме: *Kuchmins'ka Kh. Yo.* Stability in the calculation of two-dimensional continued fractions // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 277–288.
59. *Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30–44.
Те саме: *Kuchmins'ka Kh. I., Sus' O. M., Vozna S. M.* Approximation properties of two-dimensional continued fractions // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 1. – P. 36–54.
60. *Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Михальчук Б. Р.* Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 479–488.
Те саме: *Makarov V. L., Khlobystov V. V., Mykhal'chuk B. R.* Interpolational integral continued fractions // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 4. – P. 576–587.
61. *Манзій О. С.* Наближення гіпергеометричних функцій Аппеля гіллястими ланцюговими дробами: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Львів, 2000. – 142 с.
62. *Манзій О. С.* Про збіжність розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 у гіллястий ланцюговий дріб у деякій необмеженій області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. –1999. – **42**, № 2. – С. 7–11.
63. *Манзій О. С.* Розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 в гіллястий ланцюговий дріб // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». – 1998. – № 346. – С. 3–9.
64. *Недашковський М. О.* Ознаки збіжності матричних гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 4. – С. 50–56.
65. *Недашковський М. О.* Розв'язування нелінійно-поліноміальних рівнянь гіллястими ланцюговими дробами // Комп'ютинг. – 2003. – **2**, вип. 1 (№ 3).– Р. 83–87.
66. *Недашковський М. О., Ковальчук О. Я.* Обчислення з λ-матрицями. – Київ: Наук. думка, 2007. – 294 с.
67. *Пагіря М. М.* Наближення функцій ланцюговими дробами. – Ужгород: Ґражда, 2016. – 412 с.
68. *Пагіря М. М., Кацала Р. А.* Властивості обернених похідних // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 5. – С. 708–713.
Те саме: *Pahirya M. M., Katsala R. A.* Properties of reciprocal derivatives // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, No. 5. – P. 816–823.
69. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применения в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
70. *Скоробогатько В. Я., Дронюк Н. С., Бобик О. І., Пташник Б. Й.* Гіллясті ланцюгові дроби і їх застосування // Друга наук. конф. молодих математиків України. – Київ: Наук. думка, 1966. – С. 561–565.
71. *Сусь О. М.* Про оцінку швидкості збіжності двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 115–123.

72. *Сявавко М. С.* Інтегральні ланцюгові дроби. – Київ: Наук. думка, 1994. – 205 с.
73. *Bodnar D. I., Bubniak M. M.* On convergence (2,1,...,1)-periodic branched continued fraction of the special form // Карпат. мат. публікації. – 2015. – **7**, № 2. – С. 148–154.
74. *Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I.* On the convergence of multidimensional g-fraction // Мат. студії. – 2001. – **15**, № 2. – С. 115–126.
75. *Dmytryshyn R. I.* The two-dimensional *g*-fraction with independent variables for double power series // J. Approx. Theory. – 2012. – **164**, No. 12. – P. 1520–1539.
76. *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA.: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – xxix + 428 p. – Encyclopedia Math. Appl. – Vol. 11.
   Те саме: *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
77. *Kuchmins'ka Kh.* On sufficient conditions for convergence of two-dimensional continued fractions // Acta Applicandae Math. – 2000. – **61**, No. 1-3. – C. 175–183.
78. *Kuchmins'ka Kh.* On the "fork" property for two-dimensional continued fractions // Commun. Analyt. Theory Continued Fractions. – 1997. – **7**. – P. 32–35.
79. *Kuchmins'ka Kh.* Some properties of two-dimensional continued fractions // J. Comput. Appl. Math. – 1999. – **105**, No. 1-2. – P. 347–353.
80. *Kuchmins'ka Kh. Yo., Vozna S. M.* Truncation error bounds for a two-dimensional continued g-fraction // Мат. студії. – 2005. – **24**, № 2. – P. 120–126.
81. *Kuchminska Kh.* Two-dimensional generalization of continued fractions // In: Diophantine Analysis and Related Fields-2006 / Ed. by M. Katsurada, T. Komatsu, H. Nakada. – Dept. Math. Keio Univ. Seminar on Math. Sci. – 2006. – No. 35. – P. 125–140.
82. *Kuchminska Kh. Yo.* A Worpitzky boundary theorem for branched continued fractions of the special form // Карпат. мат. публікації. – 2016. – **8**, № 2. – P. 272–278.
83. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions. – Vol. 1: Convergence theory. – Amsterdam – Paris: Atlantis Press/Word Scientific, 2008. – xii+308 p.
84. *Murphy J. A., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comput. Appl. Math. – 1978. – **4**, No. 3. – P. 181–190.
85. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. – Band II: Analytisch-funktionentheoretische Kettenbrüche. – Stuttgart: B. G. Teubner, 1957. – vi+316 S.
86. *Siemaszko W.* Branched continued fractions for double power series // J. Comput. Appl. Math. –1980. – **6**, No. 2. – P. 121–125.
87. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand Co., 1948. – xiii+433 p.

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ В 1996–2016 ГОДАХ

Проведен анализ исследований в теории ветвящихся цепных дробей за последние 20 лет в направлениях, которые развивались под общим руководством профессора В. Я. Скоробогатько (18.07.1927 – 04.07.1996), в частности: интерполяция функций многих переменных ветвящимися цепными дробями, установление эффективных признаков сходимости и вычислительной устойчивости таких дробей, соответствие между кратными степенными рядами и функциональными ветвящимися цепными дробями, исследование разных классов функциональных дробей, применения ветвящихся цепных дробей.

THE DEVELOPMENT OF THE THEORY OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS IN 1996–2016

An analysis of the research in the theory of branched continued fractions over the past 20 years in directions evolved under the general guidance of Professor V. Ya. Skorobogatko (18.07.1927 – 04.07.1996), namely: interpolation of functions of several variables by branched continued fractions, the establishment of effective tests of convergence and computational stability of such fractions, correspondence between multiple power series and functional branched continued fractions, the study of various classes of functional fractions, and applications of branched continued fractions is done.

[1] Тернопільськ. нац. економ. ун-т, Тернопіль,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.12.15