УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен[1,2], І. П. Мединський[2,3]

ПРО КЛАСИЧНІ ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ДВОМА ГРУПАМИ ПРОСТОРОВИХ ЗМІННИХ

Для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних встановлено оцінки приростів за просторовими змінними класичного фундаментального розв'язку задачі Коші та його похідних.

Рівняння дифузії з інерцією та його різноманітні узагальнення вивчались багатьма авторами [8]. Причиною цього є важливі застосування таких рівнянь у статистичній фізиці, теорії дифузійних процесів, сучасній фінансовій математиці і, зокрема, теорії опціонів [5–13]. У цих дослідженнях акцентувалась увага на побудові фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) та одержанню його точних оцінок за якомога слабших припущень щодо коефіцієнтів рівняння. Основним методом побудови ФРЗК був класичний метод Леві (див., наприклад, [8]) чи його модифікації. Аналіз цих підходів показав, що вирішення проблеми побудови класичного ФРЗК полягає не тільки у виборі відповідних умов на коефіцієнти рівняння, але й у вдалому виборі параметриксу разом з поетапним застосуванням методу Леві. Поетапний підхід, як модифікацію методу Леві, запропоновано авторами вперше в праці [3]. Особливістю цього підходу є те, що на першому етапі будуємо ФРЗК для рівняння, коефіцієнти якого залежать тільки від основних змінних і параметра, тобто не залежать від змінних виродження. Результати такого дослідження наведено в праці [2]. Реалізація поетапного підходу стримувалась відсутністю прийнятних умов Гельдера на коефіцієнти рівняння за змінними з групи виродження. Умови, знайдені в [1], дозволили завершити другий етап побудови, результатом якого є класичний ФРЗК для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних та його точні оцінки. Метою цієї статті є встановлення оцінок приростів ФРЗК і його похідних за просторовими змінними, що доповнює результати з праці [1].

1. Допоміжні відомості. Нехай n, n_1, n_2 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \ge n_2 \ge 1$ і $n = n_1 + n_2$, $m_1 = 1/2$, $m_2 = 3/2$, $M = m_1 n_1 + m_2 n_2$, $\mathbb{N}_j := \{1, \ldots, j\}$, $\mathbb{Z}_j := \mathbb{N}_j \cup \{0\}$, якщо $j \in \mathbb{N}$. Просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних $z^{(0)} := x := (x_1, x_2)$. До групи основних змінних належать змінні $t \in H \subset \mathbb{R}$ і $x_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$, а до групи змінних виродження належать $x_2 := (x_{21}, \ldots, x_{2n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$.

Користуватимемось ще такими позначеннями: $\Pi_H := \{(t,x) \mid t \in H,\, x \in \mathbb{R}^n\}$, з $H \subset \mathbb{R}$; $\Delta_x^z f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, z, \cdot)$, $\Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot, x, \cdot)$, $z^{(1)} := (z_1, x_2)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2)$, $Z^{(0)}(t) := X(t) := (X_1(t), X_2(t))$, $Z^{(s)}(t) := X(t)\big|_{x_s = z_s}$, $s \in \mathbb{N}_2$, $X_1(t) := x_1$, $X_2(t) := x_2 + t x_1'$, $x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2})$. Параметричні точки $Y(t)$ мають будову, аналогічну до будови точок $X(t)$.

У статті часто однаковими літерами (здебільшого літерами C і c) будемо позначати різні сталі, якщо їх величини нас не цікавлять.

Розглянемо рівняння вигляду

$$Lu(t,x) := (S - A(t, x, \partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} ,$$

$$A(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{j,\ell=1}^{n_1} a_{j\ell}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1\ell}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + a_0(t,x).$$

Будемо припускати, що коефіцієнти $a_{j\ell}$, a_j і a_0 є комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

(*i*) $a_{j\ell}$, a_j, a_0 є обмеженими й неперервними за t та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{j,\ell=1}^{n_1} a_{j\ell}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1\ell} \ge \delta |\sigma_1|^2 ; \qquad (2)$$

(*ii*) $a_{j\ell}$, a_j, a_0 є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists H_1 > 0, \quad \exists \alpha_1 \in (0,1) \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)\right| \le H_1 |x_1 - z_1|^{\alpha_1} , \qquad (3)$$

$$\exists H_2 > 0, \quad \exists \alpha_2 \in (1/3,\, 2/3] \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]}, \quad \forall h \in [0,T] :$$

$$\left|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)\right| \le H_2\left(h^{m_2\alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2}\right), \qquad (4)$$

де a − будь-який з коефіцієнтів $a_{j\ell}$, a_j або a_0.

Використовуватимемо такі оцінюючі функції:

$$E_c^j(t,z_j) := \exp\{-ct^{1-2j}|z_j|^2\}, \quad t > 0, \quad z_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \quad j \in \{1,2\}, \qquad (5)$$

$$E_c(t,x,\xi) := E_c^1(t, X_1(t) - \xi_1) E_c^2(t, X_2(t) - \xi_2), \quad t > 0, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (6)$$

$$I_0^{s\ell}(x,\xi) := ((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_c(t-\beta, x, \lambda) E_c(\beta-\tau, \Lambda^{s\ell}(t-\beta), \xi)\, d\lambda , \qquad (7)$$

$$I_1^{sr}(x_1,\xi) := (t-\beta)^{-m_1 n_1} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} E_{c_0}^1(t-\beta, x_1 - \lambda_1) E_c(\beta-\tau, \Lambda^{sr}(t-\beta), \xi)\, d\lambda_1 , \qquad (8)$$

де

$$\Lambda^{s\ell}(t) := \begin{cases} Z^{(s)}(t), & \ell = 0, \\ (\lambda_1, Z_2^{(s)}(t)), & \ell = 1, \\ \lambda, & \ell = 2, \end{cases} \quad s \in \mathbb{Z}_2,\ r \in \mathbb{Z}_1,\ 0 \le \tau < \beta < t \le T,$$

$$\{x,z,\xi\} \subset \mathbb{R}^n .$$

Наведемо властивості цих функцій.

Лема 1. *Правильні такі твердження:*

$$E_c(t,x,\xi) \le E_{c_0}(t,x,\xi), \quad t > 0, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (9)$$

$$|x_1 - \xi_1|^{\alpha_1} E_c^1(t, x_1 - \xi_1) \le C t^{m_1\alpha_1} E_{c_0}^1(t, x_1 - \xi_1), \quad t > 0, \quad \{x_1,\xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}, \qquad (10)$$

$$|X_s(t) - \xi_s|^{\alpha_s} E_c(t,x,\xi) \le C t^{m_s\alpha_s} E_{c_0}(t,x,\xi), \quad t > 0, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad s \in \mathbb{N}_2, \qquad (11)$$

$$t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} E_c(t,x,\xi)\,d\xi_2 \le Ct^{-m_1 n_1}E_c^1(t,x_1-\xi_1), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

$$\{x_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}, \tag{12}$$

$$t^{-m_s n_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_s}} E_c^s(t,X_s(t)-\xi_s)\,d\xi_s = C, \quad t>0, \quad x_s\in\mathbb{R}^{n_s}, \quad s\in\mathbb{N}_2, \tag{13}$$

$$t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c(t,x,\xi)\,d\xi = C, \qquad t>0, \qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{14}$$

$$E_c^1(t-\beta,\, x_1-\lambda_1)E_c^1(\beta-\tau,\, \lambda_1-\xi_1) \le E_c^1(t-\tau, x_1-\xi_1),$$

$$0\le\tau<\beta<t\le T, \qquad \{x_1,\lambda_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}, \tag{15}$$

$$E_c(t-\tau,\, y^{(s)},\, \xi) \le CE_{c_0}(t-\tau,\, x,\, \xi), \quad 0\le\tau<\beta<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{16}$$

$$E_c(\beta-\tau,\, Z(t-\beta),\, \xi) \le CE_{c/4}(\beta-\tau,\, X(t-\beta),\, \xi) \le CE_{c/4}(t-\tau,\, x,\, \xi),$$

$$0\le\tau<\beta<t\le T, \qquad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{17}$$

$$E_c(\beta-\tau,\, (\lambda_1, Z_2^{(\ell)}(t-\beta)),\, \xi) \le E_c^1(\beta-\tau,\, \lambda_1-\xi_1)E_{-c}^1(t-\beta,\, x_1-\lambda_1)\times$$

$$\times E_{c/4}^2(t-\tau,\, X_2(t-\tau)-\xi_2), \quad t_1\le\beta\le t, \quad \lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1},$$

$$\{x,\xi,z^{(\ell)}\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad \ell\in\mathbb{Z}_2, \tag{18}$$

$$I_0^{s2}(z^{(r)},\xi) \le CI_0^{s2}(x,\xi) \le C(t-\tau)^{-M}E_{c_0}(t-\tau,\, x,\, \xi), \quad 0\le\tau<\beta<t\le T,$$

$$\{x,\xi,z^{(r)}\}\subset\mathbb{R}^n, \quad \{s,r\}\subset\mathbb{Z}_2, \tag{19}$$

$$I_0^{s\ell}(z^{(r)},\xi) \le C(t-\tau)^{-M}E_c(t-\tau,\, x,\, \xi), \quad t_1\le\beta<t\le T, \quad \lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1},$$

$$\{x,\xi,z^{(r)}\}\subset\mathbb{R}^n, \quad \ell\in\mathbb{N}_2, \quad \{s,r\}\subset\mathbb{Z}_2, \tag{20}$$

$$I_1^{s\ell}(z_1,\xi) \le CI_1^{s\ell}(x_1,\xi) \le CE_c(t-\tau,\, x,\, \xi), \; t_1\le\beta<t\le T, \; \{x_1,z_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1},$$

$$\{x,\xi,z^{(s)}\}\subset\mathbb{R}^n, \quad s\in\mathbb{Z}_2, \quad \ell\in\mathbb{Z}_1, \tag{21}$$

де C, c *і* c_0 *– додатні сталі, причому* $c_0<c$, *у формулі* (16) $y^{(s)}$ *– точка на відрізку прямої, що сполучає точки* x *і* $z^{(s)}$, $s\in\mathbb{N}_2$, *у формулах* (16)–(21) $|x_s-z_s|^{1/m_s}\le(t-\tau)/4$, $s\in\mathbb{N}_2$, *а* $t_1:=(t+\tau)/2$.

Д о в е д е н н я. Твердження (9)–(16) доведено в [2]. Доведемо оцінки (17)–(21). Використовуватимемо елементарну нерівність

$$\forall\ \{a,b\}\subset\mathbb{R}^r:\ \ |a+b|^2\ge 2^{-1}|a|^2-|b|^2, \qquad r\ge1. \tag{22}$$

Для нерівності (17) запишемо

$$E_c(\beta-\tau, Z(t-\beta),\xi) = \exp\{-c[(\beta-\tau)^{-1}|z_1-\xi_1|^2+(\beta-\tau)^{-3}\times$$

$$\times|z_2+(t-\beta)z_1'+(\beta-\tau)z_1'-\xi_2|^2]\} =$$

$$=\exp\{-c[(\beta-\tau)^{-1}|(x_1-\xi_1)+(z_1-x_1)|^2+$$

$$+(\beta-\tau)^{-3}|X_2(t-\beta)-\xi_2+(\beta-\tau)x_1'+$$

$$+(\beta-\tau)(z_1'-x_1')+(z_2-x_2)|^2]\}\le$$

$$\le CE_{c/4}(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi)\le CE_{c/4}(t-\tau,x,\xi).$$

Нерівності (18) доводимо аналогічно, окремо для різних значень ℓ. Для $\ell = 0$ маємо

$$E_c(\beta - \tau, (\lambda_1, X_2(t-\beta)), \xi) = \exp\{-c[(\beta-\tau)^{-1}|\lambda_1 - \xi_1|^2 + (\beta-\tau)^{-3} \times$$
$$\times |x_2 + (t-\beta)x_1' + (\beta-\tau)\lambda_1' - \xi_2|^2]\} =$$
$$= \exp\{-c[(\beta-\tau)^{-1}|\lambda_1 - \xi_1|^2 + (\beta-\tau)^{-3} \times$$
$$\times |(X_2(t-\tau) - \xi_2) + (\beta-\tau)(\lambda_1' - x_1')|^2]\} \le$$
$$\le E_c^1(\beta-\tau, \lambda_1 - \xi_1) E_{-c}^1(t-\beta, x_1 - \lambda_1) \times$$
$$\times E_{c/2}^2(t-\tau, X_2(t-\tau) - \xi_2). \tag{23}$$

При $\ell = 1$ за допомогою (22) отримаємо

$$|Z_2^{(1)}(t-\beta) - (\beta-\tau)\lambda_1' - \xi_2|^2 =$$
$$= |(x_2 + (t-\beta)z_1' + (\beta-\tau)x_1' - \xi_2) + (\beta-\tau)(\lambda_1' - x_1')|^2 \ge$$
$$\ge 2^{-1}|(x_2 + (t-\beta)z_1' + (\beta-\tau)x_1' - \xi_2)|^2 - (\beta-\tau)^2|x_1 - \lambda_1|^2 \ge$$
$$\ge 4^{-1}|X_2(t-\tau) - \xi_2|^2 - 2^{-1}(\beta-\tau)^2|z_1 - x_1|^2 -$$
$$- (\beta-\tau)^2|x_1 - \lambda_1|^2. \tag{24}$$

Аналогічно поступаємо у випадку $\ell = 2$:

$$|Z_2^{(2)}(t-\beta) - (\beta-\tau)\lambda_1' - \xi_2|^2 =$$
$$= |(z_2 + (t-\beta)x_1' + (\beta-\tau)x_1' - \xi_2) + (\beta-\tau)(\lambda_1' - x_1')|^2 \ge$$
$$\ge 2^{-1}|(x_2 + (t-\tau)x_1' - \xi_2) + (z_2 - x_2)|^2 - (\beta-\tau)^2|x_1 - \lambda_1|^2 \ge$$
$$\ge 4^{-1}|X_2(t-\tau) - \xi_2|^2 - 2^{-1}(\beta-\tau)^2|z_2 - x_2|^2 -$$
$$- (\beta-\tau)^2|x_1 - \lambda_1|^2. \tag{25}$$

З нерівностей (23)–(25) випливають оцінки (18).

Перша частина нерівності з (19) безпосередньо випливає з (16), а другу частину нерівності при $s = 0$ доведено в [2].

Доведення нерівностей (20) проводимо за допомогою рівностей (6) і (14), а також нерівностей (15), (16) і (18) з $c = c_0/3$, де c_0 – стала з оцінки (16). Для випадку $r = 1$, $s \in \mathbb{Z}_2$ маємо

$$I_0^{s1}(z^{(1)}, \xi) \le C((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}^1(t-\beta,\, x_1 - \lambda_1) E_{-c_0/3}^1(t-\beta,\, x_1 - \lambda_1) \times$$
$$\times E_{c_0}^2(t-\beta, X_2(t-\beta) - \lambda_2) E_{c_0/3}^1(\beta-\tau,\, \lambda_1 - \xi_1)\, d\lambda \times$$
$$\times E_{c_0/6}^2(t-\tau,\, X_2(t-\tau) - \xi_2) \le C(t-\tau)^{-M}(t-\beta)^{-M} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0/3}^1(t-\beta,\, x_1 - \lambda_1) \times E_{c_0}^2(t-\beta,\, X(t-\beta) - \lambda_2) \times$$
$$\times E_{c_0/3}^1(t-\beta,\, x_1 - \lambda_1) E_{c_0/3}^1(\beta-\tau,\, \lambda_1 - \xi_1)\, d\lambda \le$$
$$\le C \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0/3}(t-\beta,\, x,\, \lambda)\, d\lambda (t-\beta)^{-M}(t-\tau)^{-M} \times$$
$$\times E_{c_0/6}(t-\tau, x, \xi) = C(t-\tau)^{-M} E_{c_0/6}(t-\tau, x, \xi). \tag{26}$$

Доведення оцінок (21) проводимо аналогічно до обґрунтування (26), тільки замість рівності (14) застосовуємо рівність (13). ♦

На першому етапі будуємо ФРЗК для рівняння

$$L_1 u(t,x) := (S - A(t,(x_1,y_2),\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{27}$$

у вигляді

$$Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2) = Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2) + W_1(t,x;\tau,\xi;y_2), \tag{28}$$

де

$$W_1(t,x;\tau,\xi;y_2) := \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\beta,\lambda;y_2) Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)\,d\lambda, \tag{29}$$

Z_0 – параметрикс, а Q_1 – невідома функція.

За параметрикс виберемо функцію

$$Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2) := G_0(t,x;\tau,\xi;(\xi_1,y_2)),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}. \tag{30}$$

Властивості $Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)$ наведемо у наступній лемі (доведення див. в [1]).

Лема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (27) *виконуються умови* (***i***), (***ii***). *Тоді є правильними такі твердження:*

$$\left|D_x^{\ell k} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_{\ell k}} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{31}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} D_x^{\ell k} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)\right| \le C\left|x_s - z_s\right|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M-M_{\ell k}-m_s\alpha_s^0} \times$$

$$\times (E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)), \tag{32}$$

$$\left|\Delta_{y_2}^{z_2} D_x^{\ell k} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)\right| \le$$

$$\le C(h^{m_2\alpha_2} + \left|Y_2(h) - z_2\right|^{\alpha_2} (t-\tau)^{-M-M_{\ell k}} E_c(t-\tau,x,\xi)), \tag{33}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)\,d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-M_{\ell k}+m_1\alpha_1}, \tag{34}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)\,d\xi\right| \le C\left|x_s - z_s\right|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M_{\ell k}+m_1\alpha_1-m_s\alpha_s^0}, \tag{35}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)\,d\xi_2 = 0, \tag{36}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2) = (-\partial_{\xi_2})^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2). \tag{37}$$

Тут $\ell \in \mathbb{N}_2$, $k = (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}_+^n$, $D_x^{1k} := \partial_x^k$ *і* $D_x^{2k} := S$, $M_{1k} := m_1|k_1| + m_2|k_2|$ *і* $M_{2k} := 1$, $0 \le \tau < t \le T$, $h \in [0,T]$, $\{x,\xi,z^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{N}_2$, $\{y_2,z_2\} \subset \mathbb{R}^{n_2}$. *При цьому* $k \ne 0$ *в оцінках* (34), (35) *і* $k_2 \ne 0$ *в* (36), (37), α_1^0 *і* α_2^0 – *довільні числа з проміжку* $(0,1]$, α_1 *і* α_2 – *числа з умов* (3) *і* (4).

Для функції Q_1 справджуються оцінки

$$\left|\partial_{x_2}^{k_2} Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)\right| \le C_{k0}(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2|k_2|} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{38}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_2}^{k_2} Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)\right| \le C\left|x_s - z_s\right|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2|k_2|-m_s\alpha_s^0} \times$$

$$\times \left(E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), \tag{39}$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{y_s,z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_2$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$, $\alpha_1^0 \in (0,\alpha_1]$, $\alpha_2^0 \in (0,1]$, числа α_1 і α_2 – такі, як вище.

Основні результати першого етапу побудови класичного ФРЗК Z_1 для рівняння (27) і його оцінки наведено у [1].

На другому етапі побудови ФРЗК Z для рівняння (1), відповідно до методу Леві, шукаємо у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi) = Z_2(t,x;\tau,\xi) + W_2(t,x;\tau,\xi), \qquad (40)$$

де функція

$$Z_2(t,x;\tau,\xi) := Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2), \qquad 0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (41)$$

є параметриксом, побудованим за ФРЗК Z_1. Об'ємний потенціал W_2 задається формулою

$$W_2(t,x;\tau,\xi;y_2) := \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} Z_2(t,x;\beta,\lambda) Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi)\, d\lambda, \qquad (42)$$

де Q_2 – неперервна функція, для якої справджуються такі оцінки:

$$|Q_2(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2} E_c(t-\tau,x,\xi), \qquad (43)$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} Q_2(t,x;\tau,\xi)\right| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2-m_s\alpha_s^0} \times$$

$$\times \left(E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right). \qquad (44)$$

Тут $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{y_s, z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}$, $\alpha_s^0 \in (0,\alpha_s]$, числа α_s, $s \in \mathbb{N}_2$, – такі, як вище.

У наступній лемі сформулюємо властивості параметриксу Z_2.

Лема 3. *За умов* (***i***), (***ii***) *для* Z_2 *справджуються такі оцінки*:

$$\left|D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_{\ell k}} E_c(t-\tau,x,\xi), \qquad (45)$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\tau,\xi)\right| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M-M_{\ell k}-m_s\alpha_s^0} \times$$

$$\times \left(E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), \qquad (46)$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\tau,\xi)\, d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-M_{\ell k}+m_{\ell k}}, \qquad (47)$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\tau,\xi)\, d\xi\right| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M_{k\ell}+m_{\ell k}-m_s\alpha_s^0}, \qquad (48)$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{n_2}} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_2\right| \le C(t-\tau)^{-m_1 n_1 - M_{\ell k} + \theta(|k_2|-1)m_2\alpha_2} \times$$

$$\times E_c^1(t-\tau, x_1-\xi_1), \qquad (49)$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_2\right| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-m_1 n_1 - M_{\ell k} + \theta(|k_2|-1)m_2\alpha_2 - m_s\alpha_s^0} \times$$

$$\times \left(E_c^1(t-\tau, x_1-\xi_1) + E_c^1(t-\tau, z_1-\xi_1)\right), \qquad (50)$$

де $m_{\ell k} = \begin{cases} m_1\alpha_1, & \ell \in \mathbb{N}_2, \quad k_2 = 0, \\ m_2\alpha_2, & \ell = 1, \quad k_2 \ne 0, \end{cases}$ $\quad 0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_2$, $\alpha_1^0 \in (0,\alpha_1]$, $\alpha_2^0 \in (0,1]$ *в* (45) *і* $\alpha_2^0 \in (0,\alpha_2)$ *в* (46), (48), α_1, α_2 – *числа з умови* (***ii***), $k = (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}_+^n$. *При цьому* $|k_1| \le 2$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$ *у* (45), (46), *а в* (47), (48) $k_1 \ne 0$ *і* $k_2 \ne 0$ *в* (49), (50), θ – *характеристична функція множини* $[0,\infty)$.

Д о в е д е н н я. Оцінки (45)–(47) та (48) для $k_2 = 0$ доведено в [1] і випливають з означення (41) та теореми 2 з [1]. Потрібно довести (48), (49) і (50) при $k_2 \neq 0$. Оцінки (49), (50) при $k_2 = 0$ випливають з відповідних оцінок (45), (46) і нерівності (13). У випадку $k_2 \neq 0$ оцінки (49), (50) можна покращити. Спочатку розглянемо прирости за змінною x_1. Для цього запишемо таке зображення:

$$\Delta_{x_1}^{z_1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2)\, d\xi_2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_1} \int\limits_{z_{1j}}^{x_{1j}} \left(- \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \Delta_{y_2}^{\xi_2} \partial_{\zeta_1}^{k_1} Z_1(t,\zeta_1^{(j)};\tau,\xi;y_2)\Big|_{y_2 = X_2(t-\tau)} d\xi_2 \right) d\zeta_{1j}\,, \quad (51)$$

де $\zeta_1^{(j)} := \big((z_{11},\ldots,z_{1(j-1)},\zeta_{1j},x_{1(j+1)},\ldots,x_{1n_1}),x_2\big)$, $j \in \mathbb{N}_{n_1}$.

Доданки з (51) оцінюємо за допомогою оцінок (98) з [1], нерівностей (12), (11) і (16):

$$\left| \Delta_{x_1}^{z_1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2)\, d\xi_2 \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n_1} \left| \int\limits_{z_{1j}}^{x_{1j}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} |X_2(t-\tau) - \xi_2|^{\alpha_2}\, E_c(t-\tau,\zeta_1^{(j)},\xi)\, d\xi_2 \right) \right| d\zeta_{1j} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-M-m_2} \le C\,|x_1 - z_1|^{\alpha_1^0}\, (t-\tau)^{-m_1\alpha_1 - m_1\alpha_1^0 + m_2\alpha_2} \times$$

$$\times \big(E_{c_1}^1(t-\tau,\, x_1 - \xi_1) + E_{c_1}^1(t-\tau,\, z_1 - \xi_1)\big). \quad (52)$$

Оцінимо прирости за змінною x_2. За допомогою (28), (29) і (37), врахувавши властивості функції Q_1, запишемо

$$\Delta_{x_2}^{z_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2)\, d\xi_2 =: Z_{11} + Z_{12} + Z_{13}\,, \quad (53)$$

де

$$Z_{11} := \Delta_{x_2}^{z_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;\xi_2)\, d\xi_2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_2} \int\limits_{z_{2j}}^{x_{2j}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{\zeta_2}^{k_2'} Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\tau,\xi;\xi_2)\, d\xi_2 \right) d\zeta_{2j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_2} \int\limits_{z_{2j}}^{x_{2j}} \left(- \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \Delta_{y_2}^{\xi_2} \partial_{\zeta_2}^{k_2'} Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\tau,\xi;y_2)\Big|_{y_2 = X_2^{(j)}(t-\tau)} d\xi_2 \right) d\zeta_{2j}\,, \quad (54)$$

$$Z_{12} := \Delta_{x_2}^{z_2} \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \partial_{x_2}^{z_2} Z_0(t,x;\tau,\lambda;\lambda_2) \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;\xi_2)\, d\xi_2\, d\lambda =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\Delta_{x_2}^{z_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{z_2} Z_0(t,x;\tau,\lambda;\lambda_2)\, d\lambda_2 \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;\xi_2)\, d\xi_2 \right) d\lambda_1\,, \quad (55)$$

$$Z_{13} := \Delta_{x_2}^{z_2} \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\tau,\lambda;\lambda_2) \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;\xi_2)\, d\xi_2\, d\lambda =$$

$$= \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big(\Delta_{x_2}^{z_2} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} Z_0(t,x;\tau,\lambda;\lambda_2)\, d\lambda_2 \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;\xi_2)\, d\xi_2 \Big) d\lambda_1 . \qquad (56)$$

Тут $\zeta_2^{(j)} := (x_1, (z_{21},\ldots,z_{2(j-1)},\zeta_{2j},x_{2(j+1)},\ldots,x_{2n_2}))$, $X_2^{(j)}(t) := X_2(t)\big|_{x=\zeta_2^{(j)}}$, $\partial_{\zeta_2}^{k_2'} := \partial_{\xi_{2j}} \partial_{\xi_2}^{k_2}$, $j \in \mathbb{N}_{n_2}$, а число t_1 – таке, як вище.

Оцінимо Z_{11} за допомогою (32), (12), (23) та (16):

$$|Z_{11}| \le C \sum_{j=1}^{n_2} \left| \int_{x_2}^{z_2} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} (t-\tau)^{-M-m_2(|k_2'|-\alpha_2)} E_{c_0}(t-\tau,\zeta_2^{(j)},\xi)\, d\xi_2 \Big) d\zeta_{2j} \right| \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{\alpha_2^0} (t-\tau)^{-m_1\alpha_1 - m_2(|k_2|-\alpha_2+\alpha_2^0)} E_{c_0}^1(t-\tau, x_1-\xi_1) . \qquad (57)$$

Використовуючи оцінки (38) і (57) та нерівності (9), (10) і (12), маємо

$$|Z_{12}| \le \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left| \Delta_{x_2}^{z_2} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\beta,\lambda;\lambda_2)\, d\lambda_2 \right| \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{n_2}} |Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;\xi_2)|\, d\xi_2\, d\lambda_1 \le C|x_2 - z_2|^{\alpha_2^0} \times$$

$$\times \int_{\tau}^{t_1} (t-\beta)^{-m_1\alpha_1 - m_2(|k_2|-\alpha_2+\alpha_2^0)} (\beta-\tau)^{-1-m_1(n_1-\alpha_1)}\, d\beta \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{n_1}} E_{c_0}^1(t-\beta, x_1-\lambda_1) E_{c_0}^1(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)\, d\lambda_1 \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{\alpha_2^0} (t-\tau)^{-m_1(n_1-\alpha_1) - m_2(|k_2|-\alpha_2+\alpha_2^0)} \times$$

$$\times E_{c_0}^1(t-\tau, x_1-\xi_1) . \qquad (58)$$

Перш ніж перейти до оцінювання доданка Z_{13} з (53), наведемо потрібну для цього властивість функції Q_1. На підставі (106) з [1] запишемо таке зображення:

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)\, d\xi_2 = - \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \Delta_{y_2}^{\xi_2} \partial_{x_2}^{k_2} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)\Big|_{y_2=\Lambda_2(t-\beta)} d\xi_2 .$$

Звідси за допомогою оцінок (39), (11) і (12) отримаємо нерівність

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;\xi_2)\, d\xi_2 \right| \le C(\beta-\tau)^{-1-m_1 n_1 - m_2(|k_2|-\alpha_2)} E_{c_0}^1(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1) .$$

Застосуємо цю нерівність разом з оцінкою (57) та нерівностями (13) і (15) для оцінювання доданка Z_{13}:

$$|Z_{13}| \le \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left| \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \Delta_{x_2}^{z_2} Z_0(t,x;\beta,\lambda;\lambda_2)\, d\lambda_2 \right| \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left| \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;\xi_2) \right| d\xi_2\, d\lambda_1 \le C|x_2 - z_2|^{\alpha_2^0} \times$$

$$\times \int_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-m_1 n_1 + m_2(\alpha_2 - \alpha_2^0)} (\beta - \tau)^{-1 - m_1 n_1 - m_2(|k_2| - \alpha_2)}\, d\beta \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{n_1}} E^1_{c_0}(t-\beta, x_1 - \lambda_1) E^1_{c_0}(\beta - \tau, \lambda_1 - \xi_1)\, d\lambda_1 \le C |x_2 - z_2|^{\alpha_2^0} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-m_1 n_1 - m_2(|k_2| - 2\alpha_2 + \alpha_2^0)} E^1_{c_0}(t-\tau, x_1 - \xi_1)\,. \qquad (59)$$

З отриманих оцінок (52), (57)–(59), зображення (53) і співвідношень (54)–(56) випливають оцінки (50) при $k_2 \ne 0$. Оцінки (48) є безпосереднім наслідком (50) і (13). ♦

2. Основним результатом статті є наступна

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (***i***), (***ii***). *Тоді для рівняння* (1) *існує класичний ФРЗК* Z*, для якого справджуються оцінки*

$$\left| D_x^{\ell k} Z(t, x; \tau, \xi) \right| \le C (t-\tau)^{-M - M_{\ell k}} E_c(t-\tau, x, \xi)\,, \qquad (60)$$

$$\left| \Delta_{x_s}^{z_s} D_x^{\ell k} Z(t, x; \tau, \xi) \right| \le C |x_s - z_s|^{\alpha_s^{\ell k}} (t-\tau)^{-M - M_{\ell k} - m_s \alpha_s^{\ell k}} \times$$

$$\times \left(E_c(t-\tau, x, \xi) + E_c(t-\tau, z^{(s)}, \xi) \right), \qquad (61)$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_2$, $\alpha_s^{\ell k} \in (0, m_{\ell k s}^{-1} m_1 \alpha_1)$, *якщо* $m_1 \alpha_1 < m_2 \alpha_2 - m_1$, *і* $\alpha_s^{\ell k} \in (0, m_{\ell k s}^{-1}(m_2 \alpha_2 - m_1))$, *якщо* $m_1 \alpha_1 > m_2 \alpha_2 - m_1$, $m_{\ell k s} = \begin{cases} m_1, & \ell \in \mathbb{N}_2,\ k_2 = 0, \\ m_s, & \ell = 1, \quad k_2 \ne 0, \end{cases}$ $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^n$, *причому* $m_1 |k_1| + |k_2| \le 1$, *і* α_1, α_2 – *числа з умови* (***ii***).

Д о в е д е н н я. Існування Z та оцінки $D_x^{\ell k} Z$, $\ell \in \mathbb{N}_2$, $m_1 |k_1| + |k_2| \le \le 1$, доведено в [1]. Встановимо оцінки (61). Зауважимо, що зважаючи на означення (40) і оцінку (46), для цього потрібно оцінити прирости функції (42). Достатньо отримати оцінки W_2 за умови $|x_s - z_s|^{1/m_s} \le (t-\tau)/4$, тому що при $|x_s - z_s|^{1/m_s} \ge (t-\tau)/4$ потрібні оцінки безпосередньо випливають з (60). Оскільки функція Q_2 задовольняє умови **3** і **4** леми 3 з [1] та умови леми 7 з [1], то існують похідні $D_x^{\ell k} W_2$, $\ell \in \mathbb{N}_2$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_1 |k_1| + |k_2| \le 1$, які визначаються формулою

$$D_x^{\ell k} W_2(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_2(t, x; \tau, \lambda) Q_2(\beta, \lambda; \tau, \xi)\, d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_2(t, x; \tau, \lambda) \Delta^{X(t-\beta)}_{(\lambda_1, X_2(t-\tau))} \times$$

$$\times Q_2(\beta, (\lambda_1, X_2(t-\tau)); \tau, \xi)\, d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_2(t, x; \tau, \lambda) \Delta_{\lambda}^{(\lambda_1, X_2(t-\tau))} Q_2(\beta, \lambda; \tau, \xi)\, d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_2(t, x; \tau, \lambda)\, d\lambda\, Q_2(\beta, X(t-\tau); \tau, \xi)\, d\beta +$$

$$+ Q_2(t, x; \tau, \xi) \theta(\ell - 2), \qquad \ell \in \mathbb{N}_2\,,$$

де θ − функція Гевісайда. За допомогою цієї формули запишемо таке зображення:

$$\Delta_{x_s}^{z_s} D_x^{\ell k} W_2(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda) Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi)\, d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{\eta_{\ell ks}} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda)\, d\lambda_2 \right) \times$$

$$\times \Delta_{(\lambda_1, X_2(t-\beta))}^{X(t-\beta)} Q_2(\beta,(\lambda_1, X_2(t-\beta));\tau,\xi)\, d\lambda_1 +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{\eta_{\ell ks}} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda) \Delta_{\lambda}^{(\lambda_1, X_2(t-\beta))} Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi)\, d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{\eta_{\ell ks}} \left(\Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda)\, d\lambda \right) Q_2(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi)\, d\beta +$$

$$+ \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda)\, d\lambda_2 \times$$

$$\times \Delta_{(\lambda_1, X_2(t-\beta))}^{X(t-\beta)} Q_2(\beta,(\lambda_1, X_2(t-\beta));\tau,\xi)\, d\lambda_1 -$$

$$- \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} D_x^{\ell k} Z_2(t,z^{(s)};\beta,\lambda)\, d\lambda_2 \times$$

$$\times \Delta_{(\lambda_1, Z_2^{(s)}(t-\beta))}^{Z^{(s)}(t-\beta)} Q_2(\beta,(\lambda_1, Z_2^{(s)}(t-\beta));\tau,\xi)\, d\lambda_1 +$$

$$+ \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda) \Delta_{\lambda}^{(\lambda_1, X_2(t-\beta))} Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi)\, d\lambda -$$

$$- \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_2(t,z^{(s)};\beta,\lambda) \Delta_{\lambda}^{(\lambda_1, Z_2^{(s)}(t-\beta))} Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi)\, d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda)\, d\lambda \right) Q_2(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi)\, d\beta -$$

$$- \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_2(t,z^{(s)};\beta,\lambda)\, d\lambda \right) Q_2(\beta, Z(t-\beta);\tau,\xi)\, d\beta +$$

$$+ \theta(\ell-2) \Delta_{x_s}^{z_s} Q_2(t,x;\tau,\xi) =: \sum_{j=1}^{11} W_{2j}^{\ell ks}, \tag{62}$$

де $\eta_{\ell ks} := t - |x_s - z_s|^{1/m_{\ell ks}}$, $s \in \mathbb{N}_2$, а числа t_1 і ℓ − такі, як вище.

Щоб оцінити $W_{21}^{\ell ks}$, використаємо оцінки (46), (43) і нерівності (19):

$$\left| W_{21}^{\ell ks} \right| \le \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \Delta_{x_s}^{z_s} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda) \right| Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi) \left| \right| d\lambda \le$$

$$\le C \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x_s - z_s|^{\alpha_s^{\ell k}} (t-\beta)^{-M - M_{\ell k} - m_s \alpha_s^{\ell k}} \times$$

$$\times \left(E_c(t-\beta, x, \lambda) + E_c(t-\beta, z^{(s)} x, \lambda) \right) \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2} E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^{\ell k}} (t-t_1)^{-M_{\ell k}-m_s\alpha_s^{\ell k}} \times$$

$$\times \int_\tau^{t_1} (\beta-\tau)^{-1+m_2\alpha_2}\, d\beta \big(I_0^{s2}(x,\xi) + I_0^{s2}(z^{(s)},\xi)\big) \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^{\ell k}} (t-\tau)^{-M-M_{\ell k}+m_2\alpha_2-m_s\alpha_s^{\ell k}} \times$$

$$\times \big(E_{c_0}(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)}x,\xi)\big),$$

де

$$\alpha_1^{\ell k} \in (0,\alpha_1], \quad \alpha_2^{\ell k} \in (0,1), \quad m_1|k_1| + |k_2| = 1, \quad \ell \in \mathbb{N}_2,$$

$$\{x, z^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^n, \quad s \in \mathbb{N}_2.$$

Нерівність

$$J(\gamma) := \int_{t_1}^{\eta_{\ell ks}} (t-\beta)^{-1+\gamma}\, d\beta \le C(t-\tau)^\gamma \theta(\gamma) + C|x_s - z_s|^{\gamma/m_{\eta_{\ell ks}}} \theta(-\gamma),$$

яка справджується для довільного $\gamma \ne 0$, використаємо для оцінки доданків $W_{2j}^{\ell ks}$, $j \in \mathbb{N}_4 \setminus \{1\}$, $\{\ell, s\} \subset \mathbb{N}_2$, $m_1|k_1| + |k_2| \le 1$. За допомогою оцінок (44), (49) і нерівностей (21) одержимо

$$\big|W_{22}^{\ell ks}\big| \le \int_{t_1}^{\eta_{\ell ks}} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left|\Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda)\, d\lambda_2\right| \times$$

$$\times \left|\Delta_{(\lambda_1, X_2(t-\beta))}^{X(t-\beta)} Q_2(\beta,(\lambda_1, X_2(t-\beta));\tau,\xi)\right| d\lambda_1 \le$$

$$\le \int_{t_1}^{\eta_{\ell ks}} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1}} |x_s - z_s|^{\alpha_s} (t-\beta)^{-m_1 n_1 - M_{\ell k} - m_s\alpha_s + \theta(|k_2|-1)m_2\alpha_2} \times$$

$$\times \big(E_c^1(t-\beta, x_1-\lambda_1) + E_c^1(t-\beta, z_1-\lambda_1)\big) \times$$

$$\times |x_1 - \lambda_1|^{\alpha_1^0} (\beta-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2-m_1\alpha_1^0} \times$$

$$\times (E_c(\beta-\tau,(\lambda_1, X_2(t-\beta)),\xi) + E_c(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi))\, d\lambda_1 \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\alpha_s} J(\gamma_{22}^{\ell ks})(t_1-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2-m_1\alpha_1^0} \times$$

$$\times \big(I_1^{00}(x_1,\xi) + I_1^{00}(z_1,\xi) + I_1^{10}(x_1,\xi) + I_1^{10}(z_1,\xi)\big),$$

де $\gamma_{22}^{\ell ks} = 1 - M_{\ell k} + m_1\alpha_1^0 - m_s\alpha_s + \theta(|k_2|-1)m_2\alpha_2$, $\{\ell, s\} \subset \mathbb{N}_2$, $m_1|k_1| + |k_2| \le 1$.

Врахувавши нерівності (21), а також те, що $\gamma_{22}^{\ell ks} < 0$, коли $\alpha_1^0 < \alpha_1$, $\ell \in \mathbb{N}_2$ і $M_{\ell k} \ge 1$, та $\gamma_{22}^{\ell ks} > 0$, якщо $\alpha_1^0 = \alpha_1$ і $M_{\ell k} < 1$, одержимо

$$\big|W_{22}^{\ell ks}\big| \le C|x_s - z_s|^{m_{\ell ks}^{-1}\gamma_{22}^{\ell ks}} (t-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2-m_1\alpha_1^0} \times$$

$$\times \big(E_{c_0}(t-\tau,x,\xi) + E_{c_0}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\big),$$

$$\{\ell, s\} \subset \mathbb{N}_2, \quad m_1|k_1| + |k_2| \le 1.$$

Оцінимо $W_{23}^{\ell ks}$ за допомогою оцінок (46) з $\alpha_s^{\ell k} = \alpha_s$ і (44) з $\alpha_2^0 = \alpha_2$:

$$\left|W_{23}^{\ell ks}\right| \le \int_{t_1}^{\eta_{\ell ks}} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \left|\Delta_{x_s}^{z_s} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda) d\lambda_2\right| \left|\Delta_{\lambda}^{(\lambda_1, X_2(t-\beta))} Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi)\right| d\lambda \le$$

$$\le \int_{t_1}^{\eta_{\ell ks}} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |x_s - z_s|^{\alpha_s} (t-\beta)^{-M-M_{\ell k}-m_s\alpha_s} \times$$

$$\times \left(E_c(t-\beta,x,\lambda) + E_c(t-\beta,z^{(s)},\lambda)\right) \times$$

$$\times |X_2(t-\beta) - \lambda_2|^{\alpha_2} (\beta-\tau)^{-M-1} (E_c(\beta-\tau,(\lambda_1, X_2(t-\beta)),\xi) +$$

$$+ E_c(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi))\, d\lambda \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\alpha_s} J(\gamma_{23}^{\ell ks})(t_1-\tau)^{-1} \left(I_0^{00}(x,\xi) + I_0^{00}(z^{(s)},\xi) +\right.$$

$$\left. + I_0^{01}(x,\xi) + I_0^{01}(z^{(s)},\xi)\right),$$

де

$$\gamma_{23}^{\ell ks} = 1 - M_{k\ell} + m_2\alpha_2 - m_s\alpha_s, \quad \{\ell, s\} \in \mathbb{N}_2, \quad m_1|k_1| + |k_2| \le 1.$$

Врахувавши нерівності (20) і те, що $\gamma_{23}^{\ell ks} > 0$, якщо $k_2 = 0$, та $\gamma_{23}^{\ell ks} < 0$, якщо $k_2 \ne 0$, отримаємо

$$\left|W_{23}^{\ell ks}\right| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s} (t-\tau)^{-M-M_{\ell k}+m_2\alpha_2-m_s\alpha_s} \left(E_{c_0}(t-\tau,x,\xi) +\right.$$

$$\left. + E_{c_0}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), \quad \{\ell,s\} \subset \mathbb{N}_2, \quad k_2 = 0,$$

$$\left|W_{23}^{\ell ks}\right| \le C|x_s - z_s|^{m_{\ell ks}^{-1}(m_2\alpha_2 - m_1)} (t-\tau)^{-M-1} \left(E_{c_0}(t-\tau,x,\xi) +\right.$$

$$\left. + E_{c_0}(t-\tau,z^{(s)},\xi)\right), \quad \{\ell,s\} \subset \mathbb{N}_2, \quad k_2 \ne 0.$$

За допомогою оцінок (48), (43) і (17) аналогічно дістанемо

$$\left|W_{24}^{\ell ks}\right| \le \int_{t_1}^{\eta_{\ell ks}} \left|\Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda)\, d\lambda\right| |Q_2(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi)|\, d\beta \le$$

$$\le C \int_{t_1}^{\eta_{\ell ks}} |x_s - z_s|^{\alpha_s} (t-\beta)^{-M_{\ell k}+m_{\ell k}-m_s\alpha_s} (\beta-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2} \times$$

$$\times E_c(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi) d\beta \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{m_{\ell ks}^{-1}\gamma_{24}^{\ell ks}} (t-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2} E_c(t-\tau,x,\xi),$$

$$\gamma_{24}^{\ell ks} := 1 - M_{\ell k} + m_{\ell k}.$$

Доданки $W_{25}^{\ell ks}$ і $W_{26}^{\ell ks}$, $W_{27}^{\ell ks}$ і $W_{28}^{\ell ks}$, $W_{29}^{\ell ks}$ і $W_{210}^{\ell ks}$, $\{\ell,s\} \subset \mathbb{N}_2$, $m_1|k_1| + |k_2| \le 1$ оцінюються однаково. Оцінимо перші з них. Для цього скористаємось відповідно оцінками (50) і (44), (46) і (44) та (47) і (43) з $\alpha_s^0 = \alpha_s$, $s \in \mathbb{N}_2$, разом з нерівностями (10) і (21). Врахувавши те, що $\eta_s - \tau > t_1 - \tau = (t-\tau)/2$, отримаємо

$$\left|W_{25}^{\ell ks}\right| \le \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda)\, d\lambda_2 \right| \times$$

$$\times \left| \Delta_{(\lambda_1, X_2(t-\beta))}^{X(t-\beta)} Q_2(\beta,(\lambda_1, X_2(t-\beta));\tau,\xi) \right| d\lambda \le$$

$$\le C \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} (t-\beta)^{-m_1 n_1 - M_{\ell k} + \theta(|k_2|-1) m_2 n_2} \times$$

$$\times E_c^1(t-\beta, x_1-\lambda_1) \left| x_1 - \lambda_1 \right|^{\alpha_1} (\beta-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2 - m_1\alpha_1} \times$$

$$\times \left(E_c(\beta-\tau,(\lambda_1, X_2(t-\beta)),\xi) + E_c(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi) \right) d\lambda_1 \le$$

$$\le C \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} (t-\beta)^{-M_{k\ell} + m_1\alpha_1 + \theta(|k_2|-1) m_2 n_2}\, d\beta \times$$

$$\times (t-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2 - m_1\alpha_1} \left(I_1^{01}(x_1,\xi) + I_1^{00}(x_1,\xi) \right) \le$$

$$\le C \left| x_s - z_s \right|^{m_{\ell ks}^{-1} \gamma_{25}^{\ell ks}} (t-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2 - m_1\alpha_1} E_c(t-\tau, x, \xi)\,,$$

де

$$\gamma_{25}^{\ell ks} := 1 - M_{\ell k} + m_1\alpha_1 + \theta(|k_2|-1) m_2\alpha_2\,,\ \{\ell, s\} \in \mathbb{N}_2\,,\ m_1 |k_1| + |k_2| \le 1\,,$$

$$\left|W_{27}^{\ell ks}\right| \le \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \left| D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda) \right| \left| \Delta_{\lambda}^{(\lambda_1, X_2(t-\beta))} Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi) \right| d\lambda \le$$

$$\le C \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} (t-\beta)^{-M-M_{\ell k}} E_c(t-\beta, x, \lambda) \times$$

$$\times \left| X_2(t-\beta) - \lambda_2 \right|^{\alpha_2} (\beta-\tau)^{-M-1} (E_c(\beta-\tau,(\lambda_1, X_2(t-\beta)),\xi) +$$

$$+ E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)) d\lambda \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-1} \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} (t-\beta)^{-M_{\ell k} + m_2 n_2}\, d\beta \cdot \left(I_0^{02}(x,\xi) + I_0^{01}(x,\xi) \right) \le$$

$$\le C \left| x_s - z_s \right|^{m_{\ell ks}^{-1}(1 - M_{\ell k} + m_2\alpha_2)} (t-\tau)^{-M-1} \times$$

$$\times \left(E_c(t-\tau, x, \xi) + E_c(t-\tau, z^{(s)}, \xi) \right),$$

$$\left|W_{29}^{\ell ks}\right| \le \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} D_x^{\ell k} Z_2(t,x;\beta,\lambda)\, d\lambda \right| \left| Q_2(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi) \right| d\beta \le$$

$$\le C \int\limits_{\eta_{\ell ks}}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} (t-\beta)^{-M_{\ell k} + m_{\ell k}} (\beta-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2} \times$$

$$\times E_c(\beta-\tau, X(t-\beta), \xi) \le$$

$$\le C \left| x_s - z_s \right|^{m_{\ell ks}^{-1}(1 - M_{\ell k} + m_{\ell k})} (t-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2} E_c(t-\tau, x, \xi)\,.$$

З огляду на нерівності (44) доданок $W_{211}^{\ell ks}$ з (62) має потрібну оцінку.

З отриманих оцінок доданків $W_{2j}^{\ell ks}$, $j \in \mathbb{N}_{11}$, $\{\ell, s\} \subset \mathbb{N}_2$, $m_1|k_1| + |k_2| \le 1$, і зображення (62) випливають оцінки

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} D_x^{\ell k} W_2(t, x; \tau, \xi)\right| \le C|x_s - z_s|^{\alpha_s^{\ell k}} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-M-1}\left(E_c(t-\tau, x, \xi) + E_c(t-\tau, z^{(s)}, \xi)\right). \tag{63}$$

Тут $0 \le \tau < t \le T$, $\{x, \xi, z^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x_s, z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha_s^{\ell k} \in$ $\in (0, m_{\ell ks}^{-1} m_1 \alpha_1)$, якщо $m_1\alpha_1 < m_2\alpha_2 - m_1$, і $\alpha_s^{\ell k} \in (0, m_{\ell ks}^{-1}(m_2\alpha_2 - m_1))$, якщо $m_1\alpha_1 > m_2\alpha_2 - m_1$, $m_1|k_1| + |k_2| \le 1$.

З оцінок (46) і (63) випливає оцінка (61). Теорему доведено. ♦

Зауважимо, що показник Гельдера $\alpha_2^{\ell k}$ для приросту похідної класичного ФРЗК за другою просторовою змінною є на $m_2^{-1} m_1 = 1/3$ менший від α_2 – показника Гельдера коефіцієнтів рівняння (1). Цей результат раніше був отриманий у [4] для модельного рівняння.

Висновки. Отримані оцінки приростів похідних від класичного ФРЗК знайдуть застосування при знаходженні точних класів коректної розв'язності задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних, при дослідженні локальної розв'язності задачі Коші для відповідного квазілінійного рівняння і при побудові класичних ФРЗК для таких рівнянь з більшою кількістю груп просторових змінних.

1. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. В. А. Михайлець. – 2016. – **13**, № 1. – С. 108–155.
2. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння типу Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буков. мат. журн. – 2014. – **2**, № 2-3. – С. 94–106.
3. *Івасишен С., Мединський І.* Про класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова // Сучасні проблеми механіки та математики. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1. – С. 36–38.
4. *Шатыро Я. И.* О гладкости решений некоторых вырожденных уравнений второго порядка // Мат. заметки. – 1971. – **10,** № 1. – С. 101–111.
   Те саме: *Shatyro Ya. I.* Smoothness of solutions of certain singular second-order equations // Math. Notes Acad. Sci. USSR. . – 1971. – **10,** No. 1. – P. 484–489.
5. *Citti G., Pascucci A., Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equations arising in mathematical finance // Differ. Integral Equat. – 2001. – **14**, No. 6. – P. 701–738.
6. *Di Francesco M., Pascucci A.* A continuous dependence result for ultraparabolic equations in option pricing // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **336,** No. 2. – P. 1026–1041.
7. *Di Francesco M., Pascucci A.* On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // Appl. Math. Res. Express. – 2005. – **2005,** No. 3. – P. 77–116.
8. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.)
9. *Foschi P., Pascucci A.* Kolmogorov equations arising in finance: direct and inverse problems // Lect. Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. Universita degli Studi della Basilicata. – 2007. – **VI.** – P. 145–156.
10. *Ivasishen S. D., Medynsky I. P.* The Fokker–Planck–Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes // Theory Stoch. Process. – 2010. – **16(32),** No. 1. – C. 57–66.

11. *Lanconelli E., Polidoro S.* On a class of hypoelliptic evolution operators // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. Partial Diff. Eqs. – 1994. – **52**, No. 1. – P. 29–63.
12. *Pascucci A.* Kolmogorov equations in physics and in finance // In: Elliptic and Parabolic Problems / Ed. H. Brezis. – Basel: Birkhauser, 2005. – Ser. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. – Vol. 63. – P. 313–324.
13. *Polidoro S.* On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov – Fokker – Planck type // Le Matematiche. – 1994. – **49**, No. 1. – P. 53–105.

О КЛАССИЧЕСКИХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОЛМОГОРОВА С ДВУМЯ ГРУППАМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для ультрапараболического уравнения типа Колмогорова с двумя группами пространственных переменных установлены оценки приращений по пространственным переменным классического фундаментального решения задачи Коши и его производных.

ON CLASSICAL FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC EQUATIONS OF KOLMOGOROV TYPE WITH TWO GROUPS OF SPATIAL VARIABLES

For an ultraparabolic equation of Kolmogorov type with two groups of spatial variables the estimates of increments with respect to spatial variables for the classical fundamental solution of the Cauchy problem and its derivatives are established.

[1] Нац. техн. ун-т України
«Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського», Київ,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[3] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
20.02.16