УДК 517.95

Н. Є. Кінаш

НЕЛОКАЛЬНА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянуто обернену задачу визначення залежного від часу старшого коефіцієнта у двовимірному рівнянні теплопровідності з нелокальною умовою перевизначення. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку такої задачі.

Вступ і формулювання задачі. Параболічні рівняння з нелокальними крайовими умовами дозволяють змоделювати низку процесів, що мають практичне застосування, а тому мають досить довгу історію дослідження [9]. Нелокальні умови можуть, наприклад, відповідати за будову поверхні, де протікає певний процес, як це відбувається при моделюванні магнітного утримання плазми у токамаку [13]. Нелокальні умови також використовують при формулюванні задач вологопереносу у капілярно-пористих середовищах, задач із лінійної термопружності та інших теорій континуальної механіки [12], багатьох біологічних процесів [7].

Одновимірні обернені задачі про визначення старшого коефіцієнта, що залежить від часу, у рівнянні теплопровідності з нелокальними умовами перевизначення у різних постановках досліджувались М. І. Іванчовим. Зокрема, у [2] встановлено умови існування і єдиності розв'язків обернених задач теплопровідності з нелокальними умовами. Згодом І. Б Березницька встановила умови існування і єдиності розв'язку аналогічних задач для повного параболічного рівняння у випадку умов Неймана [1] та неповного параболічного рівняння у випадку умов Діріхле.

У працях [10, 11] розглянуто двовимірні обернені задачі визначення коефіцієнта дифузії, що залежить від просторових змінних, і доведено збіжність алгоритмів для обчислення розв'язків. Роботи, де були би розглянуті двовимірні обернені задачі для параболічних рівнянь з нелокальними умовами, автору невідомі.

Розглянемо двовимірну обернену задачу визначення пари невідомих функцій $(a(t), u(x,y,t))$, які задовольняють рівняння теплопровідності

$$u_t = a(t)\Delta u + f(x,y,t),$$

$$(x,y,t) \in Q_T := \{(x,y,t) : 0 < x < h, 0 < y < \ell, 0 < t < T\}, \qquad (1)$$

початкову умову

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \qquad (x,y) \in [0,h] \times [0,\ell], \qquad (2)$$

крайові умови Діріхле

$$u(0,y,t) = \mu_{11}(y,t), \qquad u(h,y,t) = \mu_{12}(y,t), \qquad (y,t) \in [0,\ell] \times [0,T], \qquad (3)$$

$$u(x,0,t) = \mu_{21}(x,t), \qquad u(x,\ell,t) = \mu_{22}(x,t), \qquad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \qquad (4)$$

та нелокальну умову перевизначення

$$\nu_1(t)u_x(0,y_0,t) + \nu_2(t)u_x(h,y_0,t) = \mu_3(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (5)$$

де y_0 – фіксоване значення з інтервалу $(0,\ell)$.

Умова (5) задана на проміжку $[0,T]$, оскільки невідома функція a залежить лише від t, як і в одновимірному випадку [2]. Однак дослідити задачу за методикою, запропонованою у [2, с. 18] неможливо.

Тимчасово припускаючи, що $a(t) > 0$ – відома функція, введемо функцію Ґріна задачі (1)–(4) аналогічно до того, як це зроблено у [3].

Наведемо функцію Ґріна одновимірної задачі [14, с. 12]:

$$G_k(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]n}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),\quad k=1,\ldots,4\,,$$

$$(x,t)\in[0,h]\times[0,T],\quad(\xi,\tau)\in[0,h]\times[0,t)\,,$$

$$\theta(t)=\int_0^t a(\tau)\,d\tau,\quad t\in[0,T]\,.$$

Легко переконатись, що $G_k(x,t,\xi,\tau)$ є функцією Ґріна задачі для рівняння $u_t=a(t)u_{xx}$ із крайовими умовами першого роду при $k=1$, другого роду при $k=2$, умовами вигляду $u(0,t)=\mu_1(t)$, $u_x(h,t)=\mu_4(t)$, $t\in[0,T]$ при $k=3$ та умовами $u_x(0,t)=\mu_2(t)$, $u(h,t)=\mu_3(t)$, $t\in[0,T]$ при $k=4$.

Аналогічно означимо $G_m(y,t,\eta,\tau)$ і позначимо

$$G_{km}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=G_k(x,t,\xi,\tau)G_m(y,t,\eta,\tau)\,. \tag{6}$$

Тоді $G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ є функцією Ґріна задачі (1)–(4).

1. Отримання із задачі (1)–(5) рівняння стосовно $a(t)$. Зробимо заміну

$$u(x,y,t)=\hat{u}(x,y,t)+\varphi(x,y)+\psi(x,y,t)\,, \tag{7}$$

де

$$\psi(x,y,t):=\mu_{11}(y,t)-\mu_{11}(y,0)+\frac{x}{h}(\mu_{12}(y,t)-\mu_{12}(y,0)-\mu_{11}(y,t)+$$

$$+\mu_{11}(y,0))+\mu_{21}(x,t)-\mu_{21}(x,0)-[\mu_{11}(0,t)-\mu_{11}(0,0)+$$

$$+\frac{x}{h}(\mu_{12}(0,t)-\mu_{12}(0,0)-\mu_{11}(0,t)+\mu_{11}(0,0))]+$$

$$+\frac{y}{\ell}[\mu_{22}(x,t)-\mu_{22}(x,0)-\mu_{11}(\ell,t)+\mu_{11}(\ell,0)-$$

$$-\frac{x}{h}(\mu_{12}(\ell,t)-\mu_{12}(\ell,0)-\mu_{11}(\ell,t)+\mu_{11}(\ell,0))-$$

$$-\mu_{21}(x,t)+\mu_{21}(x,0)+\mu_{11}(0,t)-$$

$$-\mu_{11}(0,0)+\frac{x}{h}(\mu_{12}(0,t)-\mu_{12}(0,0)-\mu_{11}(0,t)+\mu_{11}(0,0))]. \tag{8}$$

Позначимо також

$$\tilde{\mu}_3(t)=\mu_3(t)-\nu_1(t)(\varphi_x(0,y_0)+\psi_x(0,y_0,t))-\nu_2(t)(\varphi_x(h,y_0)+\psi_x(h,y_0,t))\,,$$

$$t\in[0,T].$$

Нехай $\alpha\in(0,1)$. Із урахуванням нових позначень накладаємо умови на вихідні дані задачі:

(A1): $f\in C(\bar{Q}_T)$, $\varphi\in C^2([0,h]\times[0,\ell])$, $\psi\in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, $\tilde{\mu}_3,\nu_1,\nu_2\in C^1([0,T])$, функції f, $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, ψ_t задовольняють умову Гельдера з показником α за просторовими змінними;

(A2): $-\nu_1(t)(\Delta\varphi(0,y_0)+\Delta\psi(0,y_0,t))+\nu_2(t)(\Delta\varphi(h,y_0)+\Delta\psi(h,y_0,t))>0$,

$-\nu_2(t)(f(h,y_0,t)-\psi_t(h,y_0,t))+\nu_1(t)(f(0,y_0,t)-\psi_t(0,y_0,t))>0,\ t\in[0,T];$

(A3): $\nu_1(0)\varphi'(0,y_0)+\nu_2(0)\varphi'(h,y_0)=\tilde{\mu}_3(0)$,

а також умови узгодження нульового порядку для задачі (1)–(4):

$$\varphi(0,y)=\mu_{11}(y,0),\varphi(h,y)=\mu_{12}(y,0),\varphi(x,0)=$$
$$=\mu_{21}(x,0),\varphi(x,\ell)=\mu_{22}(x,0),$$
$$\mu_{11}(0,t)=\mu_{21}(0,t),\mu_{11}(\ell,t)=\mu_{22}(0,t),\mu_{12}(0,t)=$$
$$=\mu_{21}(h,t),\mu_{12}(\ell,t)=\mu_{22}(h,t).$$

Підставивши (7), (8) в (1)–(4), отримаємо задачу

$$\hat{u}_t=a(t)\Delta\hat{u}+a(t)\Delta\varphi(x,y)+a(t)\Delta\psi(x,y,t)+f(x,y,t)-\psi_t(x,y,t),$$
$$(x,y,t)\in Q_T, \tag{9}$$
$$\hat{u}(x,y,0)=0,\qquad (x,y)\in[0,h]\times[0,\ell], \tag{10}$$
$$\hat{u}(0,y,t)=0,\qquad \hat{u}(h,y,t)=0,\qquad (y,t)\in[0,\ell]\times[0,T], \tag{11}$$
$$\hat{u}(x,0,t)=0,\qquad \hat{u}(x,\ell,t)=0,\qquad (x,t)\in[0,h]\times[0,T]. \tag{12}$$

За умови, що $a(t)>0$ – відома функція, визначаємо $\hat{u}$ як розв'язок крайової задачі (9)–(12):

$$\hat{u}(x,y,t)=\int_0^t\int_0^\ell\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\big(a(\tau)\Delta\varphi(\xi,\eta)+a(\tau)\Delta\psi(\xi,\eta,\tau)+f(\xi,\eta,\tau)-$$
$$-\psi_t(\xi,\eta,\tau)\big)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,\qquad (x,y,t)\in\bar{Q}_T.$$

Звідси отримуємо

$$\hat{u}_{yy}(x,y_0,t)=\int_0^t d\tau\int_0^\ell\int_0^h G_{11yy}(x,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\big(a(\tau)\Delta\varphi(\xi,\eta)+a(\tau)\Delta\psi(\xi,\eta,\tau)+$$
$$+f(\xi,\eta,\tau)-\psi_t(\xi,\eta,\tau)\big)\,d\xi\,d\eta,\qquad (x,t)\in[0,h]\times[0,T]. \tag{13}$$

Оскільки $\varphi\in C^{2+\alpha}([0,h]\times[0,\ell])$, $\psi\in C^{2+\alpha,1}(\bar{Q}_T)$, $f\in C^{\alpha,0}(\bar{Q}_T)$, то згідно з [6, с. 364]

$$\hat{u}_{yy}(x,y_0,t)\in C^{\alpha,0}([0,h]\times[0,T]).$$

Покладаючи $y=y_0$ у співвідношеннях (9)–(12) і приєднуючи умову перевизначення (5), отримуємо одновимірну обернену задачу пошуку пари невідомих функцій $(a(t),v(x,t))$, де $v(x,t):=\hat{u}(x,y_0,t)$:

$$v_t=a(t)v_{xx}+a(t)\hat{u}_{yy}(x,y_0,t)+a(t)\Delta\varphi(x,y_0)+a(t)\Delta\psi(x,y_0,t)+$$
$$+f(x,y_0,t)-\psi_t(x,y_0,t),\qquad (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \tag{14}$$
$$v(x,0)=0,\qquad x\in[0,h], \tag{15}$$
$$v(0,t)=0,\qquad v(h,t)=0,\qquad t\in[0,T], \tag{16}$$
$$\nu_1(t)v_x(0,t)+\nu_2(t)v_x(h,t)=\tilde{\mu}_3(t),\qquad t\in[0,T]. \tag{17}$$

Припущення, що $a(t)>0$ є відомою функцією, дозволяє записати v за допомогою відповідної одновимірної функції Ґріна:

$$v(x,t)=\int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi_1,\tau_1)\big(a(\tau_1)\Delta\varphi(\xi_1,y_0)+a(\tau_1)\Delta\psi(\xi_1,y_0,\tau_1)+$$
$$+f(\xi_1,y_0,\tau_1)-\psi_t(\xi_1,y_0,\tau_1)+a(\tau_1)\hat{u}_{yy}(\xi_1,y_0,\tau_1)\big)d\xi_1\,d\tau_1.$$

Тоді

$$v_x(x,t) = \int_0^t\int_0^h G_{1x}(x,t,\xi_1,\tau_1)\big(a(\tau_1)\Delta\varphi(\xi_1,y_0) + a(\tau_1)\Delta\psi(\xi_1,y_0,\tau_1) +$$
$$+ f(\xi_1,y_0,\tau_1) - \psi_t(\xi_1,y_0,\tau_1) + a(\tau_1)\hat{u}_{yy}(\xi_1,y_0,\tau_1)\big)d\xi_1\,d\tau_1\,. \quad (18)$$

Підставляємо (18) у (17). Щоб отримати рівняння стосовно $a(t)$, замінимо у (17) t на σ, домножимо цю рівність на $a(\sigma)G_4(0,t,0,\sigma)$, проінтегруємо від 0 до t за σ, та продиференціюємо отриману рівність за t.

Для реалізації цього перетворення використаємо формулу із [4] та аналогічну до неї формулу, встановлену за допомогою лем 2.1.2, 2.1.3 [14, с. 13]:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t a(\sigma)G_4(0,t,0,\sigma)\nu_1(\sigma)\,d\sigma\int_0^\sigma\int_0^h G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\right) =$$
$$= \nu_1(t)g(0,t) + a(t)\int_0^t\int_\tau^t\int_0^h(\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\times$$
$$\times G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\,d\xi\,d\sigma\,d\tau +$$
$$+ \nu_1(t)a(t)\int_0^t d\tau\int_0^h G_{4xx}(0,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\,d\xi\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t a(\sigma)G_4(0,t,0,\sigma)\nu_2(\sigma)\,d\sigma\int_0^\sigma\int_0^h G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\right) =$$
$$= -\nu_2(t)g(h,t) + a(t)\int_0^t\int_\tau^t\int_0^h(\nu_2(t)-\nu_2(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\times$$
$$\times G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\,d\xi\,d\sigma\,d\tau -$$
$$- \nu_2(t)a(t)\int_0^t d\tau\int_0^h G_{3xx}(h,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)\,d\xi\,, \quad (19)$$

де функція $g \in C([0,h]\times[0,T])$ і задовольняє умову Гельдера за просторовою змінною з показником α.

Зауважимо, що формули (19) можна застосувати у розглядуваному випадку, оскільки із припущень **(A1)–(A3)** на вихідні дані випливає, що

$$a(\tau_1)\Delta\varphi(\xi_1,y_0) + a(\tau_1)\Delta\psi(\xi_1,y_0,\tau_1) + f(\xi_1,y_0,\tau_1) - \psi_t(\xi_1,y_0,\tau_1) +$$
$$+a(\tau_1)\hat{u}_{yy}(\xi_1,y_0,\tau_1) \in C([0,h]\times[0,T])$$

і задовольняє умову Гельдера за просторовою змінною з показником α.

Враховуючи, що функція $\hat{u}_{yy}(\xi_1,y_0,\tau_1)$ визначається формулою (13), із (17) за допомогою описаного вище перетворення отримуємо рівняння стосовно a:

$$a = Pa, \qquad a \in C([0,T])\,,$$

де

$$(Pa)(t) = [-\nu_2(t)(f(h,y_0,t) - \psi_t(h,y_0,t)) + \nu_1(t)(f(0,y_0,t) -$$
$$- \psi_t(0,y_0,t))]\left[\int_0^t G_4(0,t,0,\sigma)\tilde{\mu}_3'(\sigma)\,d\sigma -\right.$$
$$- \nu_1(t)(\Delta\varphi(0,y_0) + \Delta\psi(0,y_0,t)) + \nu_2(t)(\Delta\varphi(h,y_0) +$$
$$+ \Delta\psi(h,y_0,t)) + \int_0^t d\tau_1\int_0^h(-\nu_1(t)G_{4xx}(0,t,\xi_1,\tau_1) +$$

$$+\nu_2(t)G_{3xx}(h,t,\xi_1,\tau_1))(a(\tau_1)\Delta\varphi(\xi_1,y_0)+$$

$$+a(\tau_1)\Delta\psi(\xi_1,y_0,\tau_1)+f(\xi_1,y_0,\tau_1)-\psi_t(\xi_1,y_0,\tau_1)+$$

$$+\int_0^{\tau_1}d\tau\int_0^{\ell}\int_0^{h}G_{11yy}(\xi_1,y_0,\tau_1,\xi,\eta,\tau)(a(\tau)\Delta\varphi(\xi,\eta)+$$

$$+a(\tau)\Delta\psi(\xi,\eta,\tau)+f(\xi,\eta,\tau)-\psi_t(\xi,\eta,\tau))\,d\xi\,d\eta)\,d\xi_1-$$

$$-\int_0^t\int_\tau^t\int_0^h G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)((\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_{1x}(0,\sigma,\xi_1,\tau_1)+$$

$$+(\nu_2(t)-\nu_2(\sigma))G_{1x}(h,\sigma,\xi_1,\tau_1))(a(\tau_1)\Delta\varphi(\xi_1,y_0)+$$

$$+a(\tau_1)\Delta\psi(\xi_1,y_0,\tau_1)+f(\xi_1,y_0,\tau_1)-\psi_t(\xi_1,y_0,\tau_1)+$$

$$+\int_0^{\tau_1}d\tau\int_0^{\ell}\int_0^{h}G_{11yy}(\xi_1,y_0,\tau_1,\xi,\eta,\tau)(a(\tau)\Delta\varphi(\xi,\eta)+a(\tau)\Delta\psi(\xi,\eta,\tau)+$$

$$\left.+f(\xi,\eta,\tau)-\psi_t(\xi,\eta,\tau))\,d\xi\,d\eta)\,d\xi_1\,d\sigma\,d\tau_1\right]^{-1},\quad t\in[0,T]. \qquad (20)$$

2. Існування розв'язку задачі (1)–(5).

Лема 1. *Нехай функція* $\rho\in C([0,h]\times[0,T^*])$ *задовольняє умову Гельдера за просторовою змінною з показником* α *і нехай*

$$\mathcal{N}^*:=\{a\in C([0,T^*]):A_0^*\le a(t)\le A_1^*\},$$

де $0<A_0^*\le A_1^*$. *Тоді оператор* $P^*:\mathcal{N}^*\to C([0,T^*])$ *такий, що*

$$(P^*a)(t)=\int_0^t d\tau_1\int_0^h G_{4xx}(0,t,\xi_1,\tau_1)\rho(\xi_1,\tau_1)\,d\xi_1,\qquad t\in[0,T^*],$$

є компактним.

Д о в е д е н н я. Оператор P^* – неперервний [8, с. 21]. Для того щоб довести компактність P^*, достатньо показати, що множина $P^*\mathcal{N}^*$ компактна в $C([0,T])$. За теоремою Арцела [5, с. 95] це еквівалентно рівномірній обмеженості та рівностепеневій неперервності сім'ї функцій $P^*\mathcal{N}^*$.

Доведемо, що множина $P^*\mathcal{N}^*$ рівностепенево неперервна. Виберемо довільне $\varepsilon>0$ і для довільного $a\in\mathcal{N}^*$, припускаючи, що $t_2>t_1$, розглянемо різницю

$$\left|(P^*a)(t_2)-(P^*a)(t_1)\right|\le\left|\int_0^{t_2}d\tau_1\int_0^h G_{4xx}(0,t_2,\xi_1,\tau_1)\rho(0,\tau_1)\,d\xi_1-\int_0^{t_1}d\tau_1\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^h G_{4xx}(0,t_1,\xi_1,\tau_1)\rho(0,\tau_1)\,d\xi_1\right|+$$

$$+\left|\int_{t_1}^{t_2}d\tau_1\int_0^h G_{4xx}(0,t_2,\xi_1,\tau_1)\big(\rho(\xi_1,\tau_1)-\rho(0,\tau_1)\big)\,d\xi_1\right|+$$

$$+\left|\int_0^{t_1}d\tau_1\int_0^h\big(G_{4xx}(0,t_2,\xi_1,\tau_1)-G_{4xx}(0,t_1,\xi_1,\tau_1)\big)\big(\rho(\xi_1,\tau_1)-\right.$$

$$\left.-\rho(0,\tau_1)\big)\,d\xi_1\right|:=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3.$$

Оскільки за властивостями функції Ґріна $G_{4\xi\xi}(x,t,\xi,\tau) = G_{4xx}(x,t,\xi,\tau)$, то, інтегруючи частинами вираз Δ_1 за ξ, отримуємо різницю, оцінка якої встановлена у лемі 2.3.1 з [14, с. 27]:

$$\Delta_1 = \left| \int_0^{t_2} G_{4\xi}(0,t_2,h,\tau_1)\rho(0,\tau_1)\,d\tau_1 - \int_0^{t_1} G_{4\xi}(0,t_1,h,\tau_1)\rho(0,\tau_1)\,d\tau_1 \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

якщо $|t_1 - t_2| < \delta_1$.

Розглянемо Δ_2. Оскільки функція ρ задовольняє умову Гельдера за просторовою змінною з показником α, то із явного вигляду $G_{4xx}(x,t,\xi,\tau)$ отримуємо оцінку

$$\int_0^h |G_{4xx}(x,t,\xi_1,\tau_1)||\rho(\xi_1,\tau_1) - \rho(x,\tau_1)|\,d\xi_1 \le \frac{C_1}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{1-\alpha/2}}.$$

Тут і далі C_i, $i = 1,\ldots,6$, − додатні сталі, значення яких залежать лише від максимуму $|\rho|$ і коефіцієнта Гельдера функції ρ, а також значень A_0^*, A_1^*.

Таким чином,

$$\Delta_2 = \left| \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_0^h G_{4xx}(0,t_2,\xi_1,\tau_1)\big(\rho(\xi_1,\tau_1) - \rho(0,\tau_1)\big)\,d\xi_1 \right| \le C_2(t_2-t_1)^{\alpha/2} < \frac{\varepsilon}{3},$$

як тільки $|t_1 - t_2| < \delta_2$.

Щоб оцінити Δ_3, використаємо рівність

$$G_{4\xi\xi}(0,t_2,\xi_1,\tau_1) - G_{4\xi\xi}(0,t_1,\xi_1,\tau_1) = \frac{1}{a(\tau_1)} \int_{t_1}^{t_2} G_{4\tau_1 t}(0,t,\xi_1,\tau_1)\,dt.$$

Оскільки

$$\int_0^h |G_{4\tau_1 t}(0,t,\xi_1,\tau_1)||\rho(\xi_1,\tau_1) - \rho(x,\tau_1)|\,d\xi_1 \le \frac{C_3}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{2-\alpha/2}},$$

то маємо оцінку

$$\Delta_3 = \left| \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^h \big(G_{4xx}(0,t_2,\xi_1,\tau_1) - G_{4xx}(0,t_1,\xi_1,\tau_1)\big)\big(\rho(\xi_1,\tau_1) - \right.$$

$$\left. - \rho(0,\tau_1)\big)\,d\xi_1 \right| \le \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_{t_1}^{t_2} \frac{C_3\,dt}{(\theta(t)-\theta(\tau_1))^{2-\alpha/2}} \le$$

$$\le C_4 \int_0^{t_1} \big((t_2-\tau_1)^{\alpha/2-1} - (t_1-\tau_1)^{\alpha/2-1}\big)\,d\tau_1 =$$

$$= \frac{2C_5}{\alpha}\big((t_2-t_1)^{\alpha/2} - t_2^{\alpha/2} + t_1^{\alpha/2}\big) \le C_5(t_2-t_1)^{\alpha/2} < \frac{\varepsilon}{3},$$

коли $|t_1 - t_2| < \delta_3$.

Отже, фіксуючи $|t_1 - t_2| < \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, отримуємо

$$|(P^*a)(t_2) - (P^*a)(t_1)| < \varepsilon,$$

тобто множина $P^*\mathcal{N}^*$ рівностепенево неперервна.

Крім того, множина $P^*\mathcal{N}^*$ рівномірно обмежена, оскільки для довільної функції $a \in \mathcal{N}^*$ виконується

$$\left|(P^*a)(t)\right| \le \left|\int_0^t d\tau_1 \int_0^h G_{4\xi_1\xi_1}(0,t,\xi_1,\tau_1)\rho(0,\tau_1)\,d\xi_1\right| +$$

$$+\left|\int_0^t d\tau_1 \int_0^h G_{4xx}(0,t,\xi_1,\tau_1)\big(\rho(\xi_1,\tau_1)-\rho(0,\tau_1)\big)\,d\xi_1\right| \le$$

$$\le \frac{C_6}{A_0^*} + \frac{C_1 T^{*\alpha/2}}{(A_0^*)^{1-\alpha/2}\,\alpha/2}, \qquad t \in [0,T^*]. \qquad \blacklozenge$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **(A1)–(A3)**. *Тоді задача* (1)–(5) *має принаймні один розв'язок* $(a,u) \in C([0,t^*]) \times C^{2,1}(\bar{Q}_{t^*})$, *де число* t^*, $t^* \in (0,T]$, *визначається з вихідних даних.*

Д о в е д е н н я. За допомогою теореми Шаудера встановимо існування функції $a(t)$ як розв'язку рівняння (20).

Позначимо

$$m_0 := \min_{t\in[0,T]}\big(-\nu_1(t)(\Delta\varphi(0,y_0)+\Delta\psi(0,y_0,t)) +$$

$$+\nu_2(t)\big(\Delta\varphi(h,y_0)+\Delta\psi(h,y_0,t)\big)\big).$$

Оскільки рівняння (20) містить збіжні невластиві інтеграли [8], то вони прямують до нуля при $t \to 0$. Отже, існує таке значення $t^* \in (0,T]$, що на проміжку $[0,t^*]$ сума цих інтегралів не перевищує значення $\frac{1}{2}m_0$. Тому

$$Pa(t) \le \left(\frac{1}{2}m_0\right)^{-1}\big\{\max_{t\in[0,T]}\big[-\nu_2(t)\big(f(h,y_0,t)-\psi_t(h,y_0,t)\big) +$$

$$+\nu_1(t)\big(f(0,y_0,t)-\psi_t(0,y_0,t)\big)\big]\big\} := A_1, \quad t \in [0,t^*]. \tag{21}$$

Тепер позначимо

$$M_0 := \max_{t\in[0,T]}\big(-\nu_1(t)(\Delta\varphi(0,y_0)+\Delta\psi(0,y_0,t)) +$$

$$+\nu_2(t)\big(\Delta\varphi(h,y_0)+\Delta\psi(h,y_0,t)\big)\big),$$

та оцінимо $Pa(t)$ знизу:

$$Pa(t) \ge \left(M_0+\frac{1}{2}m_0\right)^{-1}\big\{\min_{t\in[0,T]}\big[-\nu_2(t)\big(f(h,y_0,t)-\psi_t(h,y_0,t)\big) +$$

$$+\nu_1(t)\big(f(0,y_0,t)-\psi_t(0,y_0,t)\big)\big]\big\} := A_0 > 0, \quad t \in [0,t^*]. \tag{22}$$

Рівняння (20) запишемо у вигляді

$$a = Pa, \qquad a \in \mathcal{N} := \big\{a \in C([0,t^*]) : A_0 \le a(t) \le A_1\big\}. \tag{23}$$

Згідно з отриманими оцінками (21) і (22) оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ саму в себе. Із леми 1 та леми 2.3.1 з [14] випливає, що оператор P компактний.

Застосовуючи до (23) теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, отримуємо існування розв'язку $a \in C([0,t^*])$ рівняння (23). Звідси випливає існування $u \in C^{2,1}(Q_{t^*})$ як розв'язку крайової задачі (1)–(4). $\blacklozenge$

3. Єдиність розв'язку.

Теорема 2. *Нехай виконується умова* **(A1)**, *а також умова*

$$\nu_2(t)\big(\Delta\varphi(h,y_0)+\Delta\psi(h,y_0,t)\big)-\nu_1(t)\big(\Delta\varphi(0,y_0)+\Delta\psi(0,y_0,t)\big)\neq 0\,,$$
$$t\in[0,T].$$

Тоді розв'язок $(a(t),u(x,y,t))$ *задачі* (1)–(5) *єдиний у* $C([0,T_0])\times C^{2,1}(\bar{Q}_{T_0})$, $a(t)>0$, Δu *задовольняє умову Гельдера за просторовими змінними з показником* α *і число* T_0, $T_0\in(0,T]$, *визначається з вихідних даних задачі.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що існують дві пари функцій $(a_1(t),u_1(x,y,t))$, $(a_2(t),u_2(x,y,t))$, які є розв'язками задачі (1)–(5). Позначимо $a_3(t)=a_1(t)-a_2(t)$ та $u_3(x,y,t)=u_1(x,y,t)-u_2(x,y,t)$. Тоді пара функцій $(a_3(t),u_3(x,y,t))$ є розв'язком задачі

$$u_{3t}=a_1(t)\Delta u_3+a_3(t)\Delta u_2(x,y,t),\qquad (x,y,t)\in Q_T\,, \tag{24}$$

$$u_3(x,y,0)=0,\qquad (x,y)\in[0,h]\times[0,\ell]\,, \tag{25}$$

$$u_3(0,y,t)=0,\qquad u_3(h,y,t)=0,\qquad (y,t)\in[0,\ell]\times[0,T]\,, \tag{26}$$

$$u_3(x,0,t)=0,\qquad u_3(x,\ell,t)=0,\qquad (x,t)\in[0,h]\times[0,T]\,, \tag{27}$$

$$\nu_1(t)u_{3x}(0,y_0,t)+\nu_2(t)u_{3x}(h,y_0,t)=0,\qquad t\in[0,T]. \tag{28}$$

Функцію Ґріна першої крайової задачі для рівняння $u_{3t}=a_1(t)\Delta u_3$ позначимо через $\hat{G}_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$. Оскільки коефіцієнт $a_1(t)$ залежить лише від t, то така функція є добутком пари відповідних одновимірних функцій Ґріна. Маючи функцію Ґріна, запишемо розв'язок задачі (24)–(27):

$$u_3(x,y,t)=\int_0^t\int_0^\ell\int_0^h \hat{G}_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)a_3(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\, d\eta\, d\tau\,,\qquad (x,y,t)\in\bar{Q}_T\,.$$

Знайдемо $u_{3yy}(x,y_0,t)$ і позначимо $w(x,t)=u_{3yy}(x,y_0,t)$, тоді

$$w(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^\ell\int_0^h \hat{G}_{11yy}(x,y_0,t,\xi,\eta,\tau)a_3(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\, d\eta\,,$$
$$(x,t)\in[0,h]\times[0,T]. \tag{29}$$

Фіксуючи значення $y=y_0$ у (24)–(26) і позначаючи $\hat{v}(x,t)=u_3(x,y_0,t)$, отримуємо таку одновимірну задачу:

$$\hat{v}_t=a(t)\hat{v}_{xx}+a_1(t)w(x,t)+a_3(t)\Delta u_2(x,y_0,t),\qquad (x,t)\in[0,h]\times[0,T]\,, \tag{30}$$

$$\hat{v}(x,0)=0,\qquad x\in[0,h]\,, \tag{31}$$

$$\hat{v}(0,t)=0,\qquad \hat{v}(h,t)=0,\qquad t\in[0,T]\,, \tag{32}$$

$$\nu_1(t)\hat{v}_x(0,t)+\nu_2(t)\hat{v}_x(h,t)=0,\qquad t\in[0,T]. \tag{33}$$

Підставляючи розв'язок задачі (30)–(32), записаний за допомогою відповідної функції Ґріна, у (33) та застосовуючи формули (19), отримаємо

$$a_3(t)=\frac{1}{\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)-\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)}\int_0^t d\tau\int_0^h\big(a_1(\tau)w(\xi,\tau)+a_3(\tau)\times$$
$$\times\Delta u_2(\xi,y_0,\tau)\big)\big(\nu_1(t)a_1(t)\hat{G}_{4xx}(0,t,\xi,\tau)-$$
$$-\nu_2(t)a_1(t)\hat{G}_{3xx}(h,t,\xi,\tau)+$$

$$+\int_{\tau}^{t} a_1(\sigma)\hat{G}_{4t}(0,t,0,\sigma)\big((\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))\times\hat{G}_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)+$$

$$+(\nu_2(t)-\nu_2(\sigma))\hat{G}_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau))\,d\sigma\big)\,d\xi\,. \qquad (34)$$

Покажемо, що $\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)-\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)\neq 0$ (згідно з умовами теореми). Оскільки (a_2,u_2) є розв'язком задачі (1)–(4), то, застосовуючи рівності (7) і (13), отримаємо

$$\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)-\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)=\nu_2(t)\big(\Delta\varphi(h,y_0)+\Delta\psi(h,y_0,t)\big)-$$

$$-\nu_1(t)\big(\Delta\varphi(0,y_0)+\Delta\psi(0,y_0,t)\big)+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\ell}\int_0^{h}\big(\nu_2(t)G^*_{11xx}(h,y_0,t,\xi,\eta,\tau)-$$

$$-\nu_1(t)G^*_{11xx}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\big)\big(a_2(\tau)\Delta\varphi(\xi,\eta)+$$

$$+a_2(\tau)\Delta\psi(\xi,\eta,\tau)+f(\xi,\eta,\tau)-\psi_t(\xi,\eta,\tau)\big)\,d\xi\,d\eta,\qquad t\in[0,T], \qquad (35)$$

де $G^*_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ – функція Ґріна рівняння $u^*_t=a_2(t)\Delta u^*$, що задовольняє відповідні крайові умови.

Подвійний інтеграл у рівності (35) є неперервною функцією за теоремою 4 [8, с. 21] і прямує до нуля при $t\to 0$. Без зменшення загальності умов теореми припустимо, що

$$\nu_2(t)\big(\Delta\varphi(h,y_0)+\Delta\psi(h,y_0,t)\big)-\nu_1(t)\big(\Delta\varphi(0,y_0)+\Delta\psi(0,y_0,t)\big)>0\,.$$

Тоді існує таке $T_0\in[0,T]$, що

$$\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)-\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)\geq\frac{1}{2}\big(\nu_2(t)\big(\Delta\varphi(h,y_0)+\Delta\psi(h,y_0,t)\big)-$$

$$-\nu_1(t)\big(\Delta\varphi(0,y_0)+\Delta\psi(0,y_0,t)\big)\big)>0,\qquad (x,t)\in Q_{T_0}\,.$$

Ця умова гарантує додатність знаменника (34).

Розглянемо систему інтегральних рівнянь Вольтерра II роду (29), (34). Оскільки Δu_2 задовольняє умову Гельдера за просторовими змінними з показником α, то і w також задовольняє цю умову Гельдера. Таким чином, рівності (29) і (34) задовольняють умови теореми 4 [8, с. 21], а отже, із властивостей інтегральних рівнянь Вольтерра II роду система (29), (34) має єдиний розв'язок $w(x,t)\equiv 0$, $(x,t)\in[0,h]\times[0,T_0]$, $a_3(t)=0$, $t\in[0,T_0]$. Звідси випливає, що $a_1(t)=a_2(t)$, $t\in[0,T_0]$, а отже, із єдиності розв'язку першої крайової задачі (1)–(4) маємо, що $u_1(x,y,t)=u_2(x,y,t)$, $(x,y,t)\in\bar{Q}_{T_0}$.

Теорему доведено. ♦

1. *Березницька І. Б.* Обернена задача для параболічного рівняння з нелокальною умовою перевизначення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44,** № 1. – С. 54–62.
2. *Іванчов М. І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. – Київ, 1995. – 84 с. – (Препр.: Ін-т системних досліджень освіти.)
3. *Іванчов М. І., Сагайдак Р. В.* Обернена задача визначення старшого коефіцієнта у двовимірному параболічному рівнянні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 1. – С. 7–16.

4. *Кінаш Н. Є.* Обернена задача для параболічного рівняння з нелокальною умовою перевизначення // Буков. мат. журн. – 2015. – **3,** № 1. – С. 64–73.
5. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ: Вища шк., 1974. – 456 с.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
   Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type.– Providence, RI: AMS, 1968. – xi+648 p. – Transl. Math. Monogr., vol 23.
7. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – Нальчик: Высш. шк., 1995. – 301 с.
8. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
   Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.
9. *Chabrowski J.* On nonlocal problems for parabolic equations // Nagoya Math. J. – 1984. – **93**. – P. 109–131.
10. *Coles C., Murio D. A.* Identification of parameters in the 2-D IHCP // Comput. Math. Appl. – 2000. – **40**, No. 8-9. – P. 939–956.
11. *Coles C., Murio D. A.* Simultaneous space diffusivity and source term reconstruction in 2D IHCP // Comput. Math. Appl. – 2001. – **42**, No. 12. – P. 1549–1564.
12. *Day W. A.* Extensions of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories // Quart. Appl. Math. – 1982. – **40**, No. 3. – P. 319–330.
13. *Diaz J. I., Rakotoson J.-M.* On a nonlocal stationary free-boundary problem arising in the confinement of a plasma in a Stellarator geometry // J. Arch. Rational Mech. Anal. – 1996. – **134**, No. 1. – P. 53–95.
14. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.).

НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрена обратная задача определения зависящего от времени старшего коэффициента в двумерном уравнении теплопроводности с нелокальным условием переопределения. Установлены условия существования и единственности классического решения поставленной задачи.

NONLOCAL INVERSE PROBLEM FOR A TWO-DIMENSIONAL HEAT EQUATION

An inverse problem of determining time-dependent leading coefficient in a two-dimensional heat equation with non-local overdetermination condition is considered. The conditions of existence and uniqueness of a classical solution to the problem are established.

Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів 24.09.15