УДК 517.946+511.37

В. С. Ільків, Н. І. Страп

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ У ПРОСТОРАХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ – ТЕЙЛОРА З ФІКСОВАНИМ СПЕКТРОМ

Досліджено нелокальну крайову задачу для диференціально-операторного рівняння з нелінійною правою частиною та оператором $B = (B_1, \ldots, B_p)$, де компоненти $B_j \equiv z_j\, \partial/\partial z_j$, $j = 1, \ldots, p$, − оператори узагальненого диференціювання за комплексною змінною z_j. За допомогою ітераційної схеми Неша − Мозера встановлено умови розв'язності цієї задачі у шкалі просторів функцій багатьох комплексних змінних, які є рядами Діріхле − Тейлора з фіксованим спектром.

Вступ. Задачі з нелокальними умовами для диференціальних рівнянь з частинними похідними посідають важливе місце в сучасній теорії диференціальних рівнянь. В основному такі задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку (див. [1] і бібліографію там).

У статті розглянуто нелокальну крайову задачу для диференціально-операторного рівняння з нелінійною (слабко нелінійною) правою частиною. Особливістю роботи є встановлення умов розв'язності задачі у класі функцій багатьох комплексних змінних, які є рядами Діріхле − Тейлора з фіксованим спектром. Доведення проводяться за допомогою ітераційної схеми Неша − Мозера [2, 3]. Зроблено акцент на метричному підході до оборотності лінеаризованих операторів, які використовуються у схемі, що дозволяє оцінити норму розв'язку і міру множини коефіцієнтів рівняння, для яких ці оператори існують.

1. Основні позначення та постановка задачі. Нехай S − однозв'язна область проколотої у нулі комплексної площини, D^p − циліндрична область $[0,T] \times S^p$, де $T > 0$, $p \ge 2$.

Введемо множину $\mathcal{N} = \{\nu_k = (\nu_{1k}, \ldots, \nu_{pk}) \in \mathbb{R}^p : k \in \mathbb{Z}^p\}$, а також вектор $\nu_{\bar{k}}$, де $\bar{k} = (k_0, k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^{p+1}$, як елемент множини $\mathbb{Z} \times \mathcal{N}$, а саме $\nu_{\bar{k}} = (k_0, \nu_{1k}, \ldots, \nu_{pk}) = (k_0, \nu_k)$, і його «норму» $\tilde{\nu}_{\bar{k}} = \sqrt{1 + k_0^2 + \nu_{1k}^2 + \ldots + \nu_{pk}^2}$. Множину $\mathcal{N}$ будемо називати спектром функцій, які є рядами Діріхле − Тейлора, якщо вона підпорядкована таким умовам:

- відображення $k \leftrightarrow \nu_k$ є бієктивним відображенням $\mathbb{Z}^p$ на $\mathcal{N}$;
- $\nu_{1k}^2 + \ldots + \nu_{pk}^2 \to \infty$ при $|k| \to \infty$, де $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$;
- для деякого $\theta \in \mathbb{R}$ виконується $\xi_{\mathcal{N}}(\theta) < \infty$, де функція $\xi_{\mathcal{N}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задається формулою $\xi_{\mathcal{N}}(x) = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}} \tilde{\nu}_{\bar{k}}^{-x}$.

Очевидно, що функція $\xi_{\mathcal{N}}$ не існує для $x \le 0$, тому $\theta > 0$, і $\xi_{\mathcal{N}}(x) < \xi_{\mathcal{N}}(\theta) < \infty$ для всіх $x > \theta$, тобто функція існує на $[\theta, \infty)$. Число θ є характеристикою спектра $\mathcal{N}$, яка задає асимптотику спектра, власне швидкість зростання послідовності ν_k при $|k| \to \infty$.

Введемо оператор $B = (B_1, \ldots, B_p)$, де B_j − оператор узагальненого диференціювання $B_j \equiv z_j\partial/\partial z_j$. Очевидно, що $B_j(z^{\nu_k}) = \nu_{jk} z^{\nu_k}$ і $B^s z^{\nu_k} = (B_1^{s_1} \dots B_p^{s_p})(z_1^{\nu_{1k}} \dots z_p^{\nu_{pk}}) = \nu^s z^{\nu_k}$ для $z = (z_1, \dots, z_p)$ і $s = (s_1, \dots, s_p)$.

В області D^p розглянемо задачу з нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння з нелінійною правою частиною

$$Lu \equiv L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z}\right)u \equiv \sum_{|\bar{s}| \le n} a_{\bar{s}} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = \varepsilon f(u), \tag{1}$$

$$M_m u \equiv \mu \left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{t=T} = 0, \qquad m = 0, 1, \dots, n-1, \tag{2}$$

де $\bar{s} = (s_0, s)$, $|\bar{s}| = s_0 + s_1 + \dots + s_p$, $a_{s_0,s}$ − комплексні коефіцієнти ($a_{n,0} = 1$); μ, ε − комплексні параметри; $u = u(t,z)$ − шукана функція.

Розглянемо задачу на власні значення для оператора, породженого диференціальним виразом $L(\partial/\partial t, \partial/\partial z)$ і крайовими умовами (2):

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z}\right)u = \lambda u, \qquad M_m u = 0, \qquad m = 0, 1, \dots, n-1. \tag{3}$$

Відомо [1], що власними значеннями задачі (3) є числа $\lambda_{\bar{k}} = L(\tau(k_0), \nu_{\bar{k}})$, де $\tau(k_0) = \dfrac{\ln \mu}{T} + \dfrac{i2\pi k_0}{T}$. Власними функціями, що відповідають власному значенню $\lambda_{\bar{k}}$, є функції $\varphi_{\bar{k}^*} = e^{\tau(k_0^*)t} z^{\nu_{\bar{k}^*}}$, $\nu_{k^*} = (\nu_{1k^*}, \dots, \nu_{pk^*}) \in \mathcal{N}$, а k_0^*, ν_{1k^*}, …, ν_{pk^*} − розв'язки рівняння $L(\tau(k_0^*), \nu_{k^*}) = L(\tau(k_0), \nu_{\bar{k}})$ з множини $\mathbb{Z} \times \mathcal{N}$.

Задачу (1), (2) розглядаємо у шкалі просторів $\{\mathbf{H}\mathcal{N}_q\}_{q \in \mathbb{R}}$, де

$$\mathbf{H}\mathcal{N}_q = \left\{ u(t,z) = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}} u_{\bar{k}} e^{\tau(k_0)t} z^{\nu_{\bar{k}}} : \|u\|_q^2 = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}} |u_{\bar{k}}|^2 \tilde{\nu}_{\bar{k}}^{2q} < +\infty \right\}.$$

Зауваження 1. *У шкалі просторів* $\{\mathbf{H}\mathcal{N}_q\}_{q \in \mathbb{R}}$ *виконуються умови* (2) *і визначено диференціальні оператори* $S(\partial/\partial t, B)$ *за формулою* $Su = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}} S(\tau(k_0), \nu_{\bar{k}}) u_{\bar{k}}$, *якщо* $\{S(\tau(k_0), \nu_{\bar{k}})\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}}$ − *комплексна послідовність.*

Розв'язок задачі (1), (2) шукатимемо з використанням ітераційної схеми Неша − Мозера [2, 3] у вигляді границі послідовності гладких функцій.

Для кожного натурального N розіб'ємо простір $\mathbf{H}\mathcal{N}_q$ у пряму суму

$$\mathbf{H}\mathcal{N}_q = P_N \mathbf{H}\mathcal{N}_q \oplus P_N^{\perp} \mathbf{H}\mathcal{N}_q,$$

де

$$P_N u = \sum_{\bar{k} : \tilde{\nu}_{\bar{k}} \le N} u_{\bar{k}} e^{\tau(k_0)t} z^{\nu_{\bar{k}}}, \qquad P_N^{\perp} u = \sum_{\bar{k} : \tilde{\nu}_{\bar{k}} > N} u_{\bar{k}} e^{\tau(k_0)t} z^{\nu_{\bar{k}}}. \tag{4}$$

Введемо позначення $W\mathcal{N}^{(N)} = P_N \mathbf{H}\mathcal{N}_q$ і $W\mathcal{N}^{(N)\perp} = P_N^{\perp} \mathbf{H}\mathcal{N}_q$.

З означень простору $\mathbf{H}\mathcal{N}_q$ і проектора P_N випливає, що для будь-яких $N \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$ і $r \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\|P_N u\|_{q+r} \le N^r \|u\|_q \qquad \text{для} \qquad u \in \mathbf{H}\mathcal{N}_q,$$

$$\|P_N^{\perp} u\|_q \le N^{-r} \|u\|_{q+r} \qquad \text{для} \qquad u \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{q+r}.$$

Існування розв'язку задачі (1), (2) базується на деяких властивостях коефіцієнтів $a_{\bar{s}}$ рівняння (1) та функції f, яка за припущенням відображає простір $\mathbf{H}\mathcal{N}_d$ в себе для деякого $d > (p+1)/2$.

Отже, нехай числа $\ell \geq d+2$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ такі, що виконуються умови **(P1)–(P4)**:

(P1) $f \in C^2(\mathbf{H}\mathcal{N}_d; \mathbf{H}\mathcal{N}_d)$, зокрема f, $D_u f$, $D_u^2 f$ обмежені на кулі $K_1 = \{u \in \mathbf{H}\mathcal{N}_d : \|u\|_d \leq 1\}$.

(P2) Для будь-якого $d \leq d' \leq \ell$ та функції $u \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{d'}$ виконується нерівність $\|f(u)\|_{d'} \leq c_0(1 + \|u\|_{d'})$.

(P3) Для довільних функцій $u, h \in \mathbf{H}\mathcal{N}_d$ існує таке $\bar{\bar{d}} > d + \eta$, що $D_u f(u) \in C^1(H\mathcal{N}_d; H\mathcal{N}_{\bar{\bar{d}}})$ і $\|D_u f(u)[h]\|_{\bar{\bar{d}}} \leq c_1 \|h\|_d$, де $\eta = \theta/2 - n$.

(P4) Для будь-якого $d \leq d' \leq \ell - 2$ та функцій u і h з простору $\mathbf{H}\mathcal{N}_{d'}$ виконується $\|f(u+h) - f(u) - D_u f(u)h\|_{d'} \leq c_2(\|u\|_{d'} \|h\|_d^2 + \|h\|_d \|h\|_{d'})$.

З властивості **(P4)** випливає, що $\|f(u+h) - f(u) - D_u f(u)h\|_d \leq 2c_2 \|h\|_d^2$.

Множина функцій, які задовольняють умови **(P1)–(P4),** є непорожньою і містить, зокрема, гладкі функції.

Для формулювання властивості **(P5)** введемо такі позначення. Нехай коефіцієнти рівняння (1) належать кругу $\mathcal{O}_A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < A\}$. Позначимо $\boldsymbol{\varepsilon} = (\operatorname{Re}\varepsilon, \operatorname{Im}\varepsilon)$ і $\mathbf{a} = (\operatorname{Re} a_{\bar{s}(j)}, \operatorname{Im} a_{\bar{s}(j)})_{j=0,1,\ldots,p}$ для $\bar{s}(j) = (\underbrace{0,\ldots,0}_{j}, n, 0, \ldots, 0)$ та зауважимо, що $a_{\bar{s}(j)} = y_{2j+1} + i y_{2j+2}$, де y_{2j+1}, y_{2j+2} – дійсні числа.

Виберемо послідовність натуральних чисел N_q, $q \in \mathbb{N}$, так, що $N_q = N_0^{2^q}$ з $N_0 \geq 2$. Зауважимо, що $N_{q+k} = N_q^{2^k}$, де $k \in \mathbb{N}$.

Оператор L розглядатимемо за умови $\eta > 0$, тобто $\theta/2 > n$, на множині параметрів $\mathbf{a} \in \mathcal{O}_A^{p+1}$ (всі інші $a_{\bar{s}}$ вважатимемо фіксованими). Для $\gamma > 0$ побудуємо послідовність множин $A\mathcal{N}_0$, $A\mathcal{N}_1$, …, де $A\mathcal{N}_q$ – множина тих коефіцієнтів $\mathbf{a}$ рівняння (1), для яких виконується оцінка

$$|L(\tau(k_0), \nu_{\bar{k}})| \geq \gamma \tilde{\nu}_{\bar{k}}^{-\eta} \qquad \text{при} \qquad \tilde{\nu}_{\bar{k}} \leq N_q, \quad q = 0, 1, \ldots.$$

Введемо відповідні множинам $A\mathcal{N}_q$, $q = 0,1,\ldots$, декартові добутки $\mathcal{A}\mathcal{N}_q = \mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times A\mathcal{N}_q$, де $\varepsilon_0 = \min\{3\gamma/16c_3, \gamma/2c_0 N_0^{\eta}, y_1, y_2, y_3\}$, $c_3 = \max\{c_0, c_1, 2c_2\}$, y_1, y_2, y_3 – додатні розв'язки рівнянь

$$48 c_0 c_3^2 N_0^{7\eta} y^3 + 24 c_3^2 \gamma y^2 - \gamma^3 = 0,$$

$$8 c_0 c_3 N_0^{3\eta} y^2 + (8 c_3 \gamma + 4 c_3 \gamma N_0^{-4\eta}) y - 3\gamma^2 = 0,$$

$$8 c_0 c_3 N_0^{-\eta} y^2 + (8 c_3 \gamma + 4 c_3 \gamma N_0^{-8\eta}) y - 3\gamma^2 = 0,$$

відповідно. Тоді очевидними є вкладення $\ldots \subseteq \mathcal{A}\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{A}\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times \mathcal{O}_A^{p+1}$.

Для функцій $u, h \in W\mathcal{N}^{(N)}$, $N \in \mathbb{N}$, та параметра $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^2$ позначимо

$$\mathcal{L}_N[h] \equiv \mathcal{L}_N(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}, u)[h] = Lh - \varepsilon P_N D_u f(u) h,$$

де L – оператор лівої частини рівняння (1), проектор P_N задає формула (4).

(P5) Для довільних функцій $u \in W\mathcal{N}^{(N_q)} \bigcap K_1$, $h \in W\mathcal{N}^{(N_q)}$, числа $\gamma > 0$ та векторів $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}) \in \mathcal{AN}_q$ оператор $\mathcal{L}_{N_q}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}, u) : W\mathcal{N}^{(N_q)} \to W\mathcal{N}^{(N_q)}$ є оборотним, зокрема для $\overline{d} \in [d, \overline{\overline{d}} - \eta]$ виконується оцінка

$$\left\| \mathcal{L}_{N_q}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}, u)[h] \right\|_{\overline{d}} \le \frac{2}{\gamma} N_q^{\eta} \|h\|_{\overline{d}} .$$

Д о в е д е н н я **властивості (P5)**. Для $q \ge 0$ подамо оператор $\mathcal{L}_{N_q}$ у вигляді

$$\mathcal{L}_{N_q} = \mathcal{D} - \mathcal{F}_q = |\mathcal{D}|^{1/2} \mathcal{U} |\mathcal{D}|^{1/2} - \mathcal{F}_q = |\mathcal{D}|^{1/2} (\mathcal{U} - \mathcal{R}_1) |\mathcal{D}|^{1/2} =$$

$$= |\mathcal{D}|^{1/2} \mathcal{U}(I - \mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_1) |\mathcal{D}|^{1/2},$$

де $\mathcal{D} = L$, $\mathcal{F}_q = \varepsilon P_N D_u f(u)$, $\mathcal{U} = |\mathcal{D}|^{-1/2} \mathcal{D} |\mathcal{D}|^{-1/2}$, $\mathcal{R}_1 = |\mathcal{D}|^{-1/2} \mathcal{F}_q |\mathcal{D}|^{-1/2}$.

Для оператора $\mathcal{L}_{N_q}^{-1}$ маємо зображення, подібне до зображення $\mathcal{L}_{N_q}$:

$$\mathcal{L}_{N_q}^{-1} = |\mathcal{D}|^{-1/2} (I - \mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_1)^{-1} \mathcal{U}^{-1} |\mathcal{D}|^{-1/2} = |\mathcal{D}|^{-1/2} (I - \mathcal{R})^{-1} \mathcal{U}^{-1} |\mathcal{D}|^{-1/2},$$

де $\mathcal{R} = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_1$, за умови збіжності ряду $(I - \mathcal{R})^{-1} = I + \sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{R}^r$.

Лема 1. *Для* $\mathbf{a} \in A\mathcal{N}_q$ *оператор* $|\mathcal{D}|$ *є оборотним у* $W\mathcal{N}^{(N_q)}$ *і для* $\overline{d} \in \mathbb{R}$ *та* $h \in W\mathcal{N}^{(N_q)}$ *виконується оцінка* $\left\| |\mathcal{D}|^{-1/2} h \right\|_{\overline{d}} \le \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|h\|_{\overline{d}+\eta/2}$, $\eta = \theta/2 - n$.

Д о в е д е н н я. Для всіх векторів $\mathbf{a} \in A\mathcal{N}_q$ оператор $|\mathcal{D}|^{-1/2}$ існує, оскільки не має нульового власного значення. Згідно із зауваженням 1 $|\mathcal{D}|^{-1/2} h = \sum_{\overline{k}:\, \tilde{\nu}_{\overline{k}} \le N_q} \frac{h_{\overline{k}} \varphi_{\overline{k}}}{\sqrt{|L(\tau(k_0), \nu_{\overline{k}})|}}$ для довільного $h = \sum_{\overline{k}:\, \tilde{\nu}_{\overline{k}} \le N_q} \varphi_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \in W\mathcal{N}^{(N_q)}$. Тоді

$$\left\| |\mathcal{D}|^{-1/2} h \right\|_{\overline{d}}^2 \le \sum_{\overline{k}:\, \tilde{\nu}_{\overline{k}} \le N_q} \tilde{\nu}_{\overline{k}}^{2\overline{d}} \frac{|h_{\overline{k}}|^2}{|L(\tau(k_0), \nu_{\overline{k}})|} \le$$

$$\le \sum_{\overline{k}:\, \tilde{\nu}_{\overline{k}} \le N_q} \frac{1}{\gamma} \tilde{\nu}_{\overline{k}}^{2\overline{d}+\eta} |h_{\overline{k}}|^2 = \frac{1}{\gamma} \|h\|_{\overline{d}+\eta/2}^2 .$$

Лему доведено. ♦

Лема 2. *Нехай точковий спектр оператора* L *не містить нуля. Тоді для будь-якого* $\overline{d} \in \mathbb{R}$ *оператор* $\mathcal{U}$ *є ізометричним у просторі* $\mathbf{H}\mathcal{N}_{\overline{d}}$.

Д о в е д е н н я. Оскільки дія оператора $\mathcal{U}$ на функцію $h \in \mathbf{H}\mathcal{N}_{\overline{d}}$ задається формулою $\mathcal{U}h = \sum_{\overline{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}} \frac{\lambda_{\overline{k}}}{|\lambda_{\overline{k}}|} h_{\overline{k}} \varphi_{\overline{k}}$, то безпосереднім обчисленням отримаємо $\left\| \mathcal{U}^{-1} h \right\|_{\overline{d}} = \|h\|_{\overline{d}}$.

Лему доведено. ♦

Лема 3. *Для оператора* $\mathcal{R}_1 : W\mathcal{N}^{(N_q)} \to W\mathcal{N}^{(N_q)}$ *для всіх* $\bar{d} \in [d, \bar{\bar{d}} - \eta]$ *і* $u \in W\mathcal{N}^{(N_q)}$ *справджується оцінка* $\|\mathcal{R}_1 h\|_{\bar{d}} \le c_1 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} \|h\|_{\bar{d}}$.

Д о в е д е н н я леми 3 випливає з ланцюжка оцінок

$$\|\mathcal{R}_1 h\|_{\bar{d}} \le \frac{|\varepsilon|}{\gamma} \left\| P_{N_q} D_u f \, |\mathcal{D}|^{-1/2} h \right\|_{\bar{d}+\eta/2} \le \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N_q^{-\eta/2} \left\| D_u f \, |\mathcal{D}|^{-1/2} h \right\|_{\bar{d}+\eta} \le$$

$$\le \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N_q^{-\eta/2} c_1 \left\| |\mathcal{D}|^{-1/2} h \right\|_{\bar{d}} \le c_1 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} \|h\|_{\bar{d}} . \qquad \blacklozenge$$

З формули $\mathcal{R} = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{R}_1$ та лем 2 і 3 для всіх $\bar{d} \in [d, \bar{\bar{d}} - \eta]$ маємо оцінку $\|\mathcal{R} h\|_{\bar{d}} = \|\mathcal{R}_1 h\|_{\bar{d}} \le c_1 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} \|h\|_{\bar{d}}$. З нерівності $\left\|(I - \mathcal{R})^{-1} h\right\|_{\bar{d}} \le \|h\|_{\bar{d}} + \sum_{r \in \mathbb{N}} \left\|\mathcal{R}^r h\right\|_{\bar{d}}$, де $\left\|\mathcal{R}^r h\right\|_{\bar{d}} \le \left(c_1 \frac{|\varepsilon|}{\gamma}\right)^r \|h\|_{\bar{d}}$, маємо $\left\|(I - \mathcal{R})^{-1} h\right\|_{\bar{d}} \le \|h\|_{\bar{d}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{c_1 |\varepsilon|}{\gamma}\right)^r < \frac{\gamma}{\gamma - c_1 \varepsilon_0} \|h\|_{\bar{d}}$.

Повертаючись до оцінки норми оператора $\mathcal{L}_{N_q}^{-1}$, для всіх $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}) \in \mathcal{AN}_q$ виводимо, що

$$\left\|\mathcal{L}_{N_q}^{-1} h\right\|_{\bar{d}} \le \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma - c_1 \varepsilon_0} \left\| |\mathcal{D}|^{-1/2} h \right\|_{\bar{d}+\eta/2} \le$$

$$\le \frac{N_q^{\eta}}{\gamma/2 - c_1 \varepsilon_0 + \gamma/2} \|h\|_{\bar{d}} \le \frac{2}{\gamma} N_q^{\eta} \|h\|_{\bar{d}} .$$

Властивість **(P5)** доведено. $\blacklozenge$

2. Встановлення умов розв'язності задачі (1), (2). Задамо рекурентно послідовність $\{u_q\}_{q \ge 0}$ функцій $u_q \in W\mathcal{N}^{(N_q)}$, визначених відповідно на множинах $\mathcal{AN}_q$, збіжну до розв'язку задачі (1), (2) на множині $\mathcal{AN}_\infty = \lim_{q \to \infty} \mathcal{AN}_q$, та знайдемо оцінку знизу міри множини $\mathcal{AN}_\infty$.

Теорема 1. *Нехай виконуються властивості* **(P1)–(P5)** *і* $\beta = 6\eta = 3(\theta - 2n)$. *Тоді існує послідовність* $\{u_q\}_{q \ge 0}$, *де функція* $u_q = \sum_{i=0}^{q} h_i$, *визначена для* $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}) \in \mathcal{AN}_q$ *і належить до простору* $W\mathcal{N}^{(N_q)}$, *є розв'язком рівняння*

$$L u_q - \varepsilon P_{N_q} f(u_q) = 0 , \tag{5}$$

причому $\|h_i\|_d \le 4 c_3 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N_i^{-\eta}$, $1 \le i \le q$, *а* $B_q \equiv 1 + \left\|u_q\right\|_{d+\beta} \le B_0 N_{q+1}^{\eta}$ *для* $q \in \mathbb{N}$, *де* $B_0 \equiv 1 + \|u_0\|_{d+\beta} \le 1 + \frac{|\varepsilon|}{\gamma} 2 c_0 N_0^{7\eta}$.

Д о в е д е н н я. Використаємо метод математичної індукції. Спочатку для векторів $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}) \in \mathcal{AN}_0$ знайдемо розв'язок рівняння

$$L u - \varepsilon P_{N_0} f(u) = 0 . \tag{6}$$

Із умови $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}) \in \mathcal{AN}_0$ випливає існування оператора $L^{-1} : W\mathcal{N}^{(N_0)} \to W\mathcal{N}^{(N_0)}$, причому $\left\|L^{-1} w\right\|_d \le \frac{1}{\gamma} \|w\|_{d+\eta} \le \frac{1}{\gamma} N_0^{\eta} \|w\|_d$. Тому рівняння (6) зводимо до вигляду $u = \varepsilon L^{-1} P_{N_0} f(u)$. Через $H^0 : W\mathcal{N}^{(N_0)} \to W\mathcal{N}^{(N_0)}$ позначимо оператор зі значенням $H^0(u) = \varepsilon L^{-1} P_{N_0} f(u)$ на елементі $u \in W\mathcal{N}^{(N_0)}$. Тоді знаходження розв'язку рівняння (6) зводиться до відшукання нерухомої точки цього оператора.

Можна показати, що для кожного вектора $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}) \in \mathcal{A}\mathcal{N}_0$ оператор H^0 є стиском у кулі $G^0 = \left\{ u \in W\mathcal{N}^{(N_0)} : \|u\|_d \le \frac{|\varepsilon|}{\gamma} 2c_0 N_0^{\eta} \right\}$, тобто існує єдиний розв'язок $u = u_0 \in G^0$ рівняння (6) і $B_0 \le 1 + N_0^{\beta} \frac{|\varepsilon|}{\gamma} 2c_0 N_0^{\eta} = 1 + \frac{|\varepsilon|}{\gamma} 2c_0 N_0^{7\eta}$.

Базу індукції встановлено.

Далі за індукцією будуємо елементи послідовності $\{u_q\}_{q \ge 0}$ вигляду $u_q = \sum_{i=0}^{q} h_i$, для оцінки норм яких у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_{d+\beta}$ використовуємо наступну лему, доведення якої є модифікацією доведення леми 4.1 з [3].

Лема 4. *Для елементів послідовності* $\{u_q\}_{q \ge 0}$ *виконується нерівність*

$$B_{q+1} \le \left(1 + N_{q+1}^{\eta}\right) B_q . \tag{7}$$

Із умови (7) за індукцією можемо встановити, що

$$B_q \le B_0 \prod_{i=1}^{q} \left(1 + N_i^{\eta}\right) \le B_0 N_{q+1}^{\eta} .$$

Вважаючи відомими функції u_0, u_1, ..., u_q, побудуємо функцію $u_{q+1} \in W\mathcal{N}^{(N_{q+1})}$ як розв'язок рівняння

$$L u_{q+1} - \varepsilon P_{N_{q+1}} f(u_{q+1}) = 0 . \tag{8}$$

Оскільки $u_{q+1} = u_q + h_{q+1}$, то $h_{q+1} \in W\mathcal{N}^{(N_{q+1})}$. Після процедури лінеаризації отримаємо, що $h = h_{q+1}$ є розв'язком у просторі $W\mathcal{N}^{(N_{q+1})}$ рівняння

$$r_q + \mathcal{L}_{N_{q+1}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}, u_q) h + R_q(h) = 0 ,$$

де

$$r_q = L u_q - \varepsilon P_{N_{q+1}} f(u_q) , \; R_q(h) = -\varepsilon P_{N_{q+1}} \left(f(u_q + h) - f(u_q) - D_u f(u_q) h \right).$$

За властивістю **(P5)** оператор $\mathcal{L}_{N_{q+1}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}, u_q)$ є оборотним для всіх векторів $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}) \in \mathcal{A}_{q+1}$. Позначимо через $H_{q+1} : W\mathcal{N}^{(N_{q+1})} \to W\mathcal{N}^{(N_{q+1})}$ оператор зі значенням $H_{q+1}(h) = -\mathcal{L}_{N_{q+1}}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}, u_q)\left(r_q + R_q(h)\right)$ на елементі $h \in W\mathcal{N}^{(N_{q+1})}$. Тоді розв'язування рівняння (8) є еквівалентним до знаходження нерухомої точки $h_{q+1} = h \in W\mathcal{N}^{(N_{q+1})}$ рівняння $h = H_{q+1}(h)$.

Лема 5. *Для кожного вектора* $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}) \in \mathcal{A}_{q+1}$ *оператор* H_{q+1}, *де* $q \ge 0$, *є стиском у кулі*

$$G_{q+1} = \left\{ h \in W\mathcal{N}^{(N_{q+1})} : \|h\|_d \le 4 c_3 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N_{q+1}^{-\eta} \right\}.$$

Д о в е д е н н я леми є модифікацією доведення леми 4.2 з [3]. ♦

Із леми 5 випливає існування для $(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{a})\in\mathcal{A}_{q+1}$ єдиного розв'язку $h_{q+1}\in W\mathcal{N}^{(N_{q+1})}$ рівняння $h=H_{q+1}(h)$, який задовольняє нерівність $\left\|h_{q+1}\right\|_d\le 4c_3B_0\dfrac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{-\eta}$. Отже, функція $u_{q+1}=u_q+h_{q+1}$, визначена для $(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{a})\in\mathcal{A}_{q+1}$, є розв'язком рівняння (8) у $W\mathcal{N}^{(N_{q+1})}$, і $u_{q+1}=\sum\limits_{i=0}^{q+1}h_i$, де $h_i\in W\mathcal{N}^{(N_i)}$, та для $i=0,1,\ldots,q+1$ виконується оцінка $\left\|h_i\right\|_d\le 4c_3B_0\dfrac{|\varepsilon|}{\gamma}N_i^{-\eta}$.

Теорему доведено. ♦

Теорема 2. *Множина* $\mathcal{AN}_\infty$ *визначається формулою* $\mathcal{AN}_\infty=\bigcap\limits_{q\ge0}\mathcal{AN}_q$, *і для її міри* $\operatorname{meas}\mathcal{AN}_\infty$ *справджується оцінка*

$$\operatorname{meas}\mathcal{AN}_\infty\ge\varepsilon_0A^{2p+2}\pi^{p+2}\left(1-\gamma^2\frac{4^{p+1}(p+1)\xi_{\mathcal{N}}(\theta)}{A^2\pi^{p+1}}\right).$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $\mathcal{AN}_q=\bigcap\limits_{\ell=0}^{q}\mathcal{AN}_\ell$, то $\mathcal{AN}_\infty=\lim\limits_{q\to\infty}\mathcal{AN}_q=$ $=\bigcap\limits_{q=0}^{\infty}\mathcal{AN}_q$.

Для оцінки міри множини $\mathcal{AN}_\infty$ многочлен $L(\tau(k_0),\nu_{\bar k})$ запишемо у вигляді суми

$$L(\tau(k_0),\nu_{\bar k})=L_1(\tau(k_0),\nu_{\bar k})+L_2(\tau(k_0),\nu_{\bar k}),$$

де

$$L_1\big(\tau(k_0),\nu_{\bar k}\big)=a_{n,0,\ldots,0}\big(\tau(k_0)\big)^n+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}a_{\underbrace{0,\ldots,0}_{j},n,0,\ldots,0}\nu_{kj}^n=\sum_{j=1}^{2p+2}y_j\big(\varphi_j(\nu_{\bar k})+i\zeta_j(\nu_{\bar k})\big),$$

зокрема,

$$\operatorname{Re}L_1\big(\tau(k_0),\nu_{\bar k}\big)=\sum_{j=1}^{2p+2}y_j\varphi_j(\nu_{\bar k}),\qquad \operatorname{Im}L_1\big(\tau(k_0),\nu_{\bar k}\big)=\sum_{j=1}^{2p+2}y_j\zeta_j(\nu_{\bar k}).$$

Зазначимо, що виконується рівність

$$\operatorname{meas}\mathcal{AN}_\infty=\varepsilon_0A^{2p+2}\pi^{p+2}-\operatorname{meas}\overline{\mathcal{AN}_\infty},$$

де $\overline{\mathcal{AN}}_\infty=\bigcup\limits_{q=0}^{\infty}\overline{\mathcal{AN}_q}=\lim\limits_{q\to\infty}\overline{\mathcal{AN}_q}$, $\overline{\mathcal{AN}_q}=\mathcal{O}_{\varepsilon_0}\times\overline{A\mathcal{N}_q}$, а горизонтальна риска над множиною означає операцію доповнення множини у множинах $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}\times$ $\times\mathcal{O}_A^{p+1}$ або $\mathcal{O}_A^{p+1}$. Встановимо оцінку міри множини $\overline{\mathcal{AN}}_\infty$. Для цього оцінимо міру множини $\overline{A\mathcal{N}_q}=\bigcup\limits_{\bar k:\tilde\nu_{\bar k}\le N_q}\overline{A\mathcal{N}_q(\bar k)}$, де $\overline{A\mathcal{N}_q(\bar k)}$ – множина векторів $\mathbf{a}$, для яких при фіксованому $\bar k$ з умовою $\tilde\nu_{\bar k}\le N_q$ виконується оцінка $\left|L(\tau(k_0),\nu_{\bar k})\right|<\gamma\tilde\nu_{\bar k}^{-\eta}$.

Очевидно, що $\overline{A\mathcal{N}_q(\bar{k})} \subset \overline{A\mathcal{N}'_q(\bar{k})}$, де $\overline{A\mathcal{N}'_q(\bar{k})}$ – множина векторів $\mathbf{a}$. для яких при фіксованому $\bar{k}$ такому, що $\tilde{\nu}_{\bar{k}} \le N_q$, виконуються оцінки

$$\left|\operatorname{Re} L(\tau(k_0), \nu_{\bar{k}})\right| < \gamma \tilde{\nu}_{\bar{k}}^{-\eta}, \qquad \left|\operatorname{Im} L(\tau(k_0), \nu_{\bar{k}})\right| < \gamma \tilde{\nu}_{\bar{k}}^{-\eta}.$$

Оцінку для міри множини $\overline{A\mathcal{N}'_q(\bar{k})}$ отримано в роботі [1]:

$$\operatorname{meas} \overline{A\mathcal{N}'_q(\bar{k})} \le 4^{p+1} A^{2p} (p+1) \gamma^2 \tilde{\nu}_{\bar{k}}^{-2\eta} / \left(k_0^2 + \left|\nu_{\bar{k}}\right|^2\right)^n.$$

Тоді для міри множини $\overline{A\mathcal{N}_q}$ запишемо таку нерівність:

$$\operatorname{meas} \overline{A\mathcal{N}_q} \le \sum_{\bar{k}:\tilde{\nu}_{\bar{k}} \le N_q} \operatorname{meas} \overline{A\mathcal{N}_q(\bar{k})} \le \sum_{\bar{k}:\tilde{\nu}_{\bar{k}} \le N_q} \operatorname{meas} \overline{A\mathcal{N}'_q(\bar{k})} \le$$

$$\le 4^{p+1} A^{2p} (p+1) \gamma^2 \sum_{\bar{k}:\tilde{\nu}_{\bar{k}} \le N_q} \tilde{\nu}_{\bar{k}}^{-2\eta-2n} \le$$

$$\le 4^{p+1} A^{2p} (p+1) \gamma^2 \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}} \tilde{\nu}_{\bar{k}}^{-\theta} = 4 d^{2p} (p+1) \gamma^2 \xi_{\mathcal{N}}(\theta).$$

Отже, $\operatorname{meas} \overline{\mathcal{A}\mathcal{N}_q} \le \pi \varepsilon_0^2 4^{p+1} A^{2p} (p+1) \gamma^2 \xi_{\mathcal{N}}(\theta)$. Тому, перейшовши до границі при $q \to \infty$, отримуємо оцінку $\operatorname{meas} \overline{\mathcal{A}\mathcal{N}_\infty} \le \pi \varepsilon_0^2 4^{p+1} A^{2p} (p+1) \xi_{\mathcal{N}}(\theta) \gamma^2$, з якої випливає нерівність $\operatorname{meas} \mathcal{A}\mathcal{N}_\infty \ge \varepsilon_0^2 A^{2p+2} \pi^{p+2} \left(1 - \gamma^2 \dfrac{4^{p+1}(p+1)\xi_{\mathcal{N}}(\theta)}{A^2 \pi^{p+1}}\right)$.

Теорему доведено. ♦

Встановимо умови існування розв'язку задачі (1), (2) у шкалі $\{\mathbf{H}\mathcal{N}_q\}_{q \in \mathbb{R}}$.

Теорема 3. *Для векторів* $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}) \in \mathcal{A}\mathcal{N}_\infty$ *та* $\gamma > 0$ *і* $N_0 \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ *ряд* $\sum_{i \ge 0} h_i$ *збігається у* $\mathbf{H}\mathcal{N}_d$ *до розв'язку* u *задачі* (1), (2) *з нормою* $\|u\|_d \le \dfrac{8 c_3 B_0}{N_0^\eta} \dfrac{|\varepsilon|}{\gamma}$.

Д о в е д е н н я. За теоремою 1 для всіх векторів $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a}) \in \mathcal{A}\mathcal{N}_\infty$ для мажорантного ряду $\sum_{i \ge 0} \|h_i\|_d$ виконується оцінка $\sum_{i \ge 0} \|h_i\|_d \le \sum_{i \ge 0} 4 c_3 B_0 \dfrac{|\varepsilon|}{\gamma} N_i^{-\eta}$. Тому ряд $\sum_{i \ge 0} h_i$ збігається у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_d$ до функції $u \in \mathbf{H}\mathcal{N}_d$, оскільки

$$\|u\|_d \le \sum_{i \ge 0} \|h_i\|_d \le \sum_{i \ge 0} 4 c_3 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N_i^{-\eta} \le 4 c_3 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} \frac{2}{N_0^\eta} = \frac{8 c_3 B_0}{N_0^\eta} \frac{|\varepsilon|}{\gamma}.$$

Функція u_q є розв'язком рівняння (5), звідки маємо

$$L u_q = \varepsilon P_{N_q} f(u_q) = \varepsilon f(u_q) - \varepsilon P_{N_q}^{\perp} f(u_q). \tag{9}$$

Із властивостей проектора $P_{N_q}^{\perp}$ у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_d$, властивості **(P2)** та оцінки для B_q знайдемо

$$\left\| P_{N_q}^{\perp} f(u_q) \right\|_d \le c_0 N_q^{-\beta} B_q \le c_0 B_0 N_q^{-4\eta} = c_0 B_0 N_0^{-4\eta 2^q}.$$

Звідси випливає, що $P_{N_q}^{\perp} f(u_q) \to 0$ при $q \to \infty$.

Із властивості **(P1)** отримуємо, що права частина (9) є збіжною до $\varepsilon f(u)$ у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_d$, а з неперервності оператора L маємо, що ліва частина рівняння (9) Lu_q при $q \to \infty$ збігається до Lu у сенсі розподілів.

Теорему доведено. ♦

Висновки. У роботі досліджено нелокальну крайову задачу для диференціально-операторного рівняння з нелінійною правою частиною у просторах функцій, що є рядами Діріхле – Тейлора із фіксованим спектром $\mathcal{N}$, асимптотику яких задає деяке додатнє число θ. Для знаходження розв'язку задачі (1), (2) використано схему Неша – Мозера. Доведено оборотність лінеаризованих операторів, які отримуються на кожному кроці ітераційної схеми. Знайдено оцінку міри множини $\mathcal{AN}_\infty$ тих параметрів $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{a})$ задачі (1), (2), для яких розв'язок u існує у просторі $\mathbf{H}\mathcal{N}_d$.

1. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624–1650.
   Те саме: *Il'kiv V. S., Ptashnyk B. I.* Problems for partial differential equations with nonlocal conditions. Metric approach to the problem of small denominators // Ukr. Math. J. – 2006. – **58, No.** 12. – P. 1847–1875.
2. *Berti M., Bolle P.* Cantor families of periodic solutions of wave equations with C^k nonlinearities // Nonlinear Differ. Equat. Appl. – 2008. – **15**, No. 1-2. – P. 247–276.
3. *Berti M., Bolle P.* Sobolev periodic solutions of nonlinear wave equations in higher spatial dimensions // Arch. Ration. Mech. Anal. – 2010. – **195**, No. 2. – P. 609–642.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВАХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ – ТЕЙЛОРА С ФИКСИРОВАННЫМ СПЕКТРОМ

Исследована нелокальная краевая задача для дифференцильно-операторного уравнения с нелинейной правой частью и оператором $B = (B_1, \ldots, B_p)$, где компоненты $B_j \equiv z_j\, \partial/\partial z_j$, $j = 1, \ldots, p$, – операторы обобщенного дифференцирования по комплексной переменной z_j. С помощью итерационной схемы Неша – Мозера установлены условия разрешимости этой задачи в шкале пространств функций многих комплексных переменных, являющихся рядами Дирихле – Тейлора с фиксированным спектром.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATION WITH WEAK NONLINEARITY IN THE SPACES OF DIRICHLET – TAYLOR SERIES WITH FIXED SPECTRUM

The nonlocal boundary value problem for a differential-operator equation with nonlinear right part and with the operator $B = (B_1, \ldots, B_p)$, where the components $B_j \equiv$ $\equiv z_j\, \partial/\partial z_j$, $j = 1, \ldots, p$, are the operators of the generalized differentiation with respect to complex variable z_j is investigated. By using of the Nash – Moser iteration scheme the conditions of solvability of the problem in the scale of spaces of functions of several complex variables, that are Dirichlet – Taylor series with fixed spectrum are established.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано 13.11.15