

**ПРО ПОЄДНАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАГЕРРА І МЕТОДУ
ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ З ЯДРОМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ**

До залежного від часу граничного інтегрального рівняння, яке виникає при розв'язуванні просторових початково-крайових задач Діріхле для однорідного хвильового рівняння з однорідними початковими умовами за допомогою запізнюючого потенціалу простого шару, застосовується перетворення Лагерра за часовою змінною. Отримана система граничних інтегральних рівнянь зводиться до послідовності інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, які відрізняються лише рекурентно залежними правими частинами. Для знаходження їхнього чисельного розв'язку застосовується метод граничних елементів. Встановлено асимптотичну оцінку похибки чисельного розв'язку. Наведено результати обчислювального експерименту стосовно знаходження розв'язків інтегральних рівнянь з ядром із запізненням для модельних прикладів.

До інтегральних рівнянь з ядром із запізненням (ІРЯЗ) приходять при моделюванні акустичних та електромагнітних полів з використанням формули Кірхгофа чи одного з її компонентів – запізнюючого потенціалу простого або подвійного шару. Обидва потенціали є розв'язками однорідного хвильового рівняння і задовольняють однорідні початкові умови при довільних густинах, які відповідають достатньо простим вимогам [7, 18]. Конкретний вигляд рівняння, з якого знаходять невідому густину, залежить від граничних властивостей використаного потенціалу та крайової умови.

Для дослідження ІРЯЗ добре підходять енергетичні простори функцій, які залежать від часової змінної і набувають значення у потрібних гільбертових просторах (див., наприклад, [16, сар. XVIII]). Зокрема, в таких просторах у працях [10, 11] вперше було доведено існування єдиного розв'язку інтегральних рівнянь, еквівалентних задачам Діріхле та Неймана для хвильового рівняння, а також було обґрунтовано метод Гальоркіна для їх чисельного розв'язування. Разом з тим, у [20] відмічено складність реалізації цього методу у випадках нетривіальних граничних поверхонь через специфічну залежність густин потенціалів від так званого «запізнення» $t - |x|/c$, де t , x і c позначають час, точку в просторі та швидкість поширення коливань у середовищі, відповідно.

Одним із підходів до вирішення зазначеної проблеми є поєднання дискретизації за просторовими змінними (наприклад, за допомогою граничних елементів) з розв'язуванням деяких допоміжних задач для врахування залежності невідомих функцій від часу. Зокрема, це сім'я методів квадратури згортки [24], які базуються на використанні стійких методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь. Такі методи знайшли застосування у багатьох прикладних задачах, їх огляд наведено, наприклад, у [12, 19].

У цій роботі залежність розв'язку ІРЯЗ від часу визначатимемо за допомогою перетворення Лагерра. Властивості цього перетворення у зазначених вище функціональних просторах досліджено у [3], де, крім того, встановлено вимоги до даних крайової умови, які гарантують правомірність застосування перетворення Лагерра до ІРЯЗ, а також за його допомогою вихідне рівняння зведено до нескінченної послідовності граничних інтегральних рівнянь (ГІР). Отримані ГІР відрізняються між собою лише рекурентно залежними правими частинами. Ця обставина дає змогу побудувати ефективні алгоритми послідовного знаходження їхніх розв'язків методом граничних елементів (МГЕ). Обчислювальні аспекти такого комбінованого підходу розглянемо у цій роботі на прикладі рівняння, еквівалентного задачі Діріхле для хвильового рівняння.

Зазначимо, що підходи з перетворенням Лагерра за часом є застосовними (у певних класах функцій) до довільних лінійних за часом еволюційних задач, причому для розв'язування задач, отриманих в просторі зображень, можуть використовуватися різні методи. Наприклад, в [1, 9] та у бібліографічних посиланнях до них, де розглядаються складні задачі механіки, перетворення Лагерра за часом поєднується з іншими інтегральними перетвореннями за просторовими змінними. Для розв'язування таких задач треба виконувати обернене перетворення в області, де шукають невідомі величини. В обчислювальному плані, за винятком окремих випадків, це є складною процедурою. Тому в областях загального вигляду перетворення Лагерра поєднують з представниками сім'ї методів граничних елементів. Огляд таких комбінованих методів наведено в [4, 25], де також обґрунтовано отримані у просторі зображень крайові задачі і побудовано їхній розв'язок за допомогою потенціалів простого та подвійного шару.

Структура роботи є такою. У п. 1 спочатку введено потрібні функціональні простори і означено перетворення Лагерра стосовно їхніх елементів. Далі за допомогою цього перетворення ІРЯЗ, яке відповідає задачі Діріхле для хвильового рівняння, зведено до нескінченної трикутної системи ГІР. При цьому встановлено умови, при виконанні яких розв'язок ІРЯЗ можна знайти оберненим перетворенням Лагерра з розв'язку трикутної системи ГІР, а також показано, як отриману систему звести до послідовності рівнянь, що відрізняються лише рекурентно залежними правими частинами. У п. 2 виведено основні співвідношення МГЕ для розв'язування отриманої послідовності ГІР і встановлено асимптотичні оцінки для похибки чисельного розв'язку ІРЯЗ, яка залежить від параметра дискретизації граничної поверхні. У п. 3 наведено результати серії обчислювальних експериментів по розв'язуванню модельних ІРЯЗ.

1. Зведення інтегрального рівняння з ядром із запізненням до послідовності граничних інтегральних рівнянь. Нехай ліпшицева поверхня Γ обмежує деяку область $\Omega \in \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$ і $\Sigma := \Gamma \times \mathbb{R}_+$. Якщо розв'язок задачі Діріхле для хвильового рівняння шукати у вигляді запізнюючого потенціалу простого шару

$$(S\mu)(x, t) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(y, t - |x - y|)}{|x - y|} d\Gamma_y, \quad (x, t) \in \bar{Q},$$

з невідомою густиною $\mu : \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, то для її визначення отримаємо таке ІРЯЗ:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(y, t - |x - y|)}{|x - y|} d\Gamma_y = g(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (1)$$

де $g : \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – задана функція.

Введемо позначення потрібних надалі функціональних просторів. Нехай $L^2(\Omega)$ – простір Лебега інтегровних з квадратом функцій $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ зі скалярним добутком

$$(v, w)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} vw \, dx, \quad v, w \in L^2(\Omega),$$

і нормою $\|v\|_{L^2(\Omega)} := \sqrt{(v, v)_{L^2(\Omega)}}$, а $H^1(\Omega)$ – простір Соболева функцій $v \in L^2(\Omega)$, які мають узагальнені похідні $v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}$ з $L^2(\Omega)$, зі скалярним добутком

$$(v, w)_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} (\nabla v \nabla w + vw) \, dx, \quad v, w \in H^1(\Omega),$$

і нормою $\|v\|_{H^1(\Omega)} := \sqrt{(v, v)_{H^1(\Omega)}}$, $v \in H^1(\Omega)$. Позначимо через $H^{1/2}(\Gamma)$ і

$H^{-1/2}(\Gamma) := (H^{1/2}(\Gamma))'$ простір слідів елементів $H^1(\Omega)$ на поверхні Γ і спряжений до нього простір, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ – відношення двоїстості на $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

Нехай X – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_X$ і породженою ним нормою $\|\cdot\|_X$. Нехай $\sigma > 0$ – довільне число. Через $L_\sigma^2(\mathbb{R}_+; X)$ позначимо ваговий простір Лебега [16] з вагою $\rho_\sigma(t) = e^{-\sigma t}$, $t \in \mathbb{R}_+$, елементами якого є вимірні функції $v: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ такі, що $\int_{\mathbb{R}_+} \|v(t)\|_X^2 e^{-\sigma t} dt < \infty$, зі скалярним добутком

$$(v, w)_{L_\sigma^2(\mathbb{R}_+; X)} = \int_{\mathbb{R}_+} (v(t), w(t))_X e^{-\sigma t} dt, \quad v, w \in L_\sigma^2(\mathbb{R}_+; X),$$

і нормою

$$\|v\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}_+; X)} = \sqrt{(v, v)_{L_\sigma^2(\mathbb{R}_+; X)}}, \quad v \in L_\sigma^2(\mathbb{R}_+; X).$$

Зазначимо, що простір $L_\sigma^2(\mathbb{R}_+; X)$ є повним [8]. Вважатимемо, що елементи простору $L_\sigma^2(\mathbb{R}_+; X)$ продовжені нулем для недодатних значень аргументу.

Для довільного $m \in \mathbb{N}$ (де \mathbb{N} – множина натуральних чисел) означимо ваговий простір Соболева

$$H_\sigma^m(\mathbb{R}_+; X) := \{v \in L_\sigma^2(\mathbb{R}_+; X) \mid v^{(k)} \in L_\sigma^2(\mathbb{R}_+; X), k = 1, \dots, m\}$$

з нормою

$$\|v\|_{H_\sigma^m(\mathbb{R}_+; X)} = \left(\sum_{k=0}^m \|v^{(k)}\|_{L_\sigma^2(\mathbb{R}_+; X)}^2 \right)^{1/2}.$$

Тут похідні $v^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, розуміємо в сенсі простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+; X)$, елементами якого є розподіли зі значеннями у просторі X .

Дослідження ІРЯЗ (1) будемо проводити у вагових просторах Лебега і Соболева. Зазначимо, що існування і єдиність розв'язку таких рівнянь доведено для ширших просторів у [10], а в [3] встановлено додаткові умови на функцію g , щоб розв'язок рівняння (1) належав потрібному ваговому простору Соболева. Як наслідок з перелічених тверджень випливає таке

Твердження 1 [3]. *Нехай $g \in H_{\sigma_0}^{m+2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ для деяких $\sigma_0 > 0$ і $m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тоді існує єдиний розв'язок ІРЯЗ (1), він належить простору $H_{\sigma_0}^m(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ і для довільного $\sigma \geq \sigma_0$ справджується така його оцінка:*

$$\|\mu\|_{H_\sigma^m(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))} \leq C \|g\|_{H_{\sigma_0}^{m+2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))},$$

де $C > 0$ – стала, яка від g не залежить.

Надалі нескінченні послідовності елементів довільної множини X будемо подавати у вигляді вектора-стовпця $\mathbf{v} := (v_0, v_1, \dots)^\top$. Нехай X – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_X$ і породженою ним нормою $\|\cdot\|_X$. Будемо розглядати гільбертів простір

$$\ell^2(X) := \left\{ \mathbf{v} \in X^\infty \mid \sum_{j=0}^{\infty} \|v_j\|_X^2 < +\infty \right\}$$

зі скалярним добутком $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{j=0}^{\infty} (v_j, w_j)_X$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \ell^2(X)$, і нормою

$$\|\mathbf{v}\|_{\ell^2(X)} := \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|v_j\|_X^2 \right)^{1/2}, \quad \mathbf{v} \in \ell^2(X).$$

Якщо $X = \mathbb{R}$, то писатимемо $\ell^2 := \ell^2(\mathbb{R})$.

Розглянемо тепер детальніше зв'язок між просторами $L_{\sigma}^2(\mathbb{R}_+; X)$ і $\ell^2(X)$. У випадку $X = \mathbb{R}$ перший з них є простором $L_{\sigma}^2(\mathbb{R}_+)$, у якому поліноми Лагерра $\{L_k(\sigma \cdot)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ утворюють ортогональний базис [23], тобто довільна функція $f \in L_{\sigma}^2(\mathbb{R}_+)$ має розвинення

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k L_k(\sigma t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

де коефіцієнти $f_0, f_1, \dots, f_k, \dots$ виражаються єдиним чином за формулою

$$f_k := \sigma \int_{\mathbb{R}_+} f(t) L_k(\sigma t) e^{-\sigma t} dt, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (2)$$

Відображення $\mathcal{L} : L_{\sigma}^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow \ell^2$, яке ставить у відповідність функції f послідовність $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_k, \dots)^{\top}$, компоненти якої визначені за формулою (2), називають дискретним інтегральним перетворенням Лагерра [2, 23]. Перетворення Лагерра \mathcal{L} є біективним відображенням і обернене до нього $\mathcal{L}^{-1} : \ell^2 \rightarrow L_{\sigma}^2(\mathbb{R}_+)$ задається для довільного $\mathbf{h} \in \ell^2$ так:

$$(\mathcal{L}^{-1} \mathbf{h})(t) := \sum_{k=0}^{\infty} h_k L_k(\sigma t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3)$$

Очевидно, що для будь-якої функції $f \in L_{\sigma}^2(\mathbb{R}_+)$ виконується рівність

$$\mathcal{L}^{-1} \mathcal{L} f = f. \quad (4)$$

У праці [3] поняття перетворення Лагерра узагальнено на випадок векторнозначних функцій з $L_{\sigma}^2(\mathbb{R}_+; X)$: розглянуто відображення $\mathcal{L} : L_{\sigma}^2(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow X^{\infty}$, яке діє за правилом (2). Якщо X – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_X$ і породженою ним нормою $\|\cdot\|_X$, то справджується таке

Твердження 2 [3]. *Відображення $\mathcal{L} : L_{\sigma}^2(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow X^{\infty}$, яке довільній функції f ставить у відповідність послідовність $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_k, \dots)^{\top}$ за формулою (2), є ін'єктивним і його образом є простір $\ell^2(X)$, причому*

$$\|f\|_{L_{\sigma}^2(\mathbb{R}_+; X)}^2 = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_X^2. \quad (5)$$

Крім того, для довільної функції $f \in L_{\sigma}^2(\mathbb{R}_+; X)$ маємо рівність (4), де $\mathcal{L}^{-1} : \ell^2(X) \rightarrow L_{\sigma}^2(\mathbb{R}_+; X)$ – обернене до \mathcal{L} відображення, яке довільній послідовності $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_k, \dots)^{\top}$ ставить у відповідність функцію h за формулою (3).

Означення 1 [3]. Нехай $\sigma > 0$, X – гільбертів простір. Відображення

$$\mathcal{L} : L^2_{\sigma}(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow \ell^2(X) \quad \text{і} \quad \mathcal{L}^{-1} : \ell^2(X) \rightarrow L^2_{\sigma}(\mathbb{R}_+; X),$$

про які говориться у твердженні 2, будемо називати, відповідно, прямим і оберненим перетвореннями Лагерра, а формулу (5) – рівністю Парсеваля.

Розглянемо послідовність \mathbf{V} , компоненти якої задані формулою

$$(V_k \xi)(x) := \int_{\Gamma} \xi(y) e_k(x-y) d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma,$$

де ξ – довільна вимірна на Γ функція, а функції e_k при $z \in \mathbb{R}^3$ означені як

$$\begin{aligned} e_k(z) &:= (4\pi|z|)^{-1} \zeta_k(|z|), \quad k \in \mathbb{N}_0, \\ \zeta_0(z) &:= e^{-\sigma|z|}, \quad \zeta_k(z) := e^{-\sigma|z|} (L_k(\sigma|z|) - L_{k-1}(\sigma|z|)), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (6)$$

Зауважимо, що в точці $z = 0$ функція e_0 має інтегровну особливість, а для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція e_k (6) має усувну особливість. Це означає [14], що \mathbf{V} можемо трактувати як послідовність граничних операторів $V_k : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$, $k \in \mathbb{N}_0$, таких, що $(V_k \xi)(x) := \langle \xi, e_k(x - \cdot) \rangle_{\Gamma}$.

Нехай для довільної $\mu \in L^2_{\sigma_0}(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ при деякому $\sigma_0 > 0$ маємо $\boldsymbol{\mu} = \mathcal{L}\mu$. Побудуємо послідовність \mathbf{w} за правилом

$$w_k = \sum_{i=0}^k V_{k-i} \mu_i, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Операцію над послідовностями, означену в такий спосіб, називатимемо q -згорткою [4] і писатимемо $\mathbf{w} := \mathbf{V} \underset{H^{1/2}(\Gamma)}{\circ} \boldsymbol{\mu}$.

У [3] показано, що результатом застосування перетворення Лагерра до ІРЯЗ (1) є нескінченна трикутна система ГІР

$$\mathbf{V} \underset{H^{1/2}(\Gamma)}{\circ} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{g} \quad \text{в} \quad \ell^2(H^{1/2}(\Gamma)), \quad (7)$$

де $\mathbf{g} := \mathcal{L}g$.

Твердження 3 [3]. Нехай $g \in H^2_{\sigma_0}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ для деякого $\sigma_0 > 0$. Тоді існує єдиний розв'язок $\boldsymbol{\mu} \in \ell^2(H^{-1/2}(\Gamma))$ системи ГІР (7), а розв'язок ІРЯЗ (1) визначається оберненим перетворенням Лагерра $\boldsymbol{\mu} := \mathcal{L}^{-1}\boldsymbol{\mu}$.

Легко бачити, що систему (7) можна записати у вигляді послідовності рівнянь

$$\begin{aligned} (V_0 \mu_0)(x) &= g_0(x), \\ (V_0 \mu_1)(x) &= \tilde{g}_1(x), \\ \dots, \\ (V_0 \mu_k)(x) &= \tilde{g}_k(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \Gamma, \\ \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\tilde{g}_k(x) := g_k(x) - \sum_{i=0}^{k-1} (V_{k-i} \mu_i)(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Виберемо з певних міркувань значення параметра N і, розв'язуючи ГІР (8), послідовно знайдемо компоненти $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N$. Тоді, відповідно до [3, лема 1], частинну суму

$$\tilde{\mu}^N(y, t - |x - y|) = \sum_{k=0}^N \left(\sum_{i=0}^k \zeta_{k-i}(\sigma(x - y)) \mu_i(y) \right) L_k(\sigma t),$$

$$x, y \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (9)$$

можемо трактувати як наближений розв'язок ІРЯЗ (1).

2. Знаходження розв'язку системи ГІР методом граничних елементів.

Розглянемо тепер детальніше послідовність ГІР (8). Для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ ліва частина k -го рівняння задана граничним оператором V_0 , а права залежить від відповідного елемента послідовності \mathbf{g} і від розв'язків рівнянь з попередніми номерами $i = 0, \dots, k - 1$. Відомо [14, 22], що інтегральний оператор $V_0 : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ є еліптичним та обмеженим:

$$\langle V_0 \eta, \eta \rangle_\Gamma \geq c_1 \|\eta\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2,$$

$$\|V_0 \eta\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c_2 \|\eta\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall \eta \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

На цих властивостях ґрунтується не лише доведення існування і єдиності розв'язку ГІР

$$V_0 \eta = f \quad \text{в} \quad H^{1/2}(\Gamma), \quad (10)$$

а й знаходження його наближеного розв'язку методом Бубнова – Гальоркіна чи його конкретною реалізацією – методом граничних елементів [21]. Виведемо основні співвідношення цього методу стосовно досліджуваних ГІР.

Нехай $X^M \subset H^{-1/2}(\Gamma)$, $M \in \mathbb{N}$, – послідовність скінченновимірних підпросторів, які є лінійними оболонками функцій $\{\phi_i\}_{i=1}^M$, що утворюють базис у X^M . У кожному з цих просторів розв'язок рівняння (10) наближуємо за допомогою лінійної комбінації

$$\eta^M := \sum_{i=1}^M \eta_i \phi_i \in X^M,$$

яку шукаємо як розв'язок такої варіаційної задачі:

$$\langle V_0 \eta^M, \eta \rangle_\Gamma = \langle f, \eta \rangle_\Gamma \quad \forall \eta \in X^M. \quad (11)$$

Тоді, вибираючи базисні функції ϕ_j як тестові, для знаходження невідомих коефіцієнтів $\boldsymbol{\eta}^{[M]} := \{\eta_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{R}^M$ матимемо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)

$$\mathbf{V}_0^{[M]} \mathbf{h}^{[M]} = \mathbf{f}^{[M]}, \quad (12)$$

де $V_0^{[M]}[j, i] := \langle V_0 \phi_i, \phi_j \rangle_\Gamma$, $f_j^{[M]} := \langle f, \phi_j \rangle_\Gamma$, $i, j = 1, \dots, M$.

Зазначимо, що внаслідок $H^{-1/2}(\Gamma)$ -еліптичності оператора V_0 матриця отриманої системи є додатно визначеною. Тому при довільній правій частині система (12) матиме єдиний розв'язок, тобто $\forall M \in \mathbb{N}$ отримуватимемо наближений розв'язок рівняння (10). За лемою Сеа (див., наприклад, [27]), він задовольняє нерівність $\|\eta^M\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c_1 \|f\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ і для величини його похибки існує оцінка

$$\|\eta - \eta^M\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \frac{c_2}{c_1} \inf_{\xi \in X^M} \|\eta - \xi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Звідси випливає збіжність в $H^{-1/2}(\Gamma)$ наближеного розв'язку $\eta^M \rightarrow \eta \in H^{-1/2}(\Gamma)$ при $M \rightarrow \infty$, де η – розв'язок відповідного ГІР у послідовності (8).

Конкретизуємо СЛАР (12), дотримуючись позначень [15, 27]. Нехай $\Gamma_{\tilde{M}} = \bigcup_{\ell=1}^{\tilde{M}} \bar{\tau}_\ell$ – деяке наближення поверхні Γ , утворене з \tilde{M} трикутних граничних елементів $\{\tau_\ell\}_{\ell=1}^{\tilde{M}}$ з вершинами $\{x^{[\ell_1]}, x^{[\ell_2]}, x^{[\ell_3]}\}$. Величину $h := \max_{\ell=1, \dots, \tilde{M}} \left\{ \int_{\tau_\ell} ds \right\}^{1/2}$ розглядаємо як параметр апроксимації.

Побудуємо множину лінійно незалежних на $\Gamma_{\tilde{M}}$ кусково-сталих функцій $\{\phi_\ell^0\}_{\ell=1}^M$, $M = \tilde{M}$:

$$\phi_\ell^0(x) = \begin{cases} 1, & x \in \tau_\ell, \\ 0, & x \notin \tau_\ell, \end{cases}$$

і розглянемо у скінченновимірних функціональних просторах $X^M = S_h^0(\Gamma) := \text{span} \{\phi_\ell^0\}_{\ell=1}^M$ рівняння (10), вважаючи, що воно відповідає k -му рівнянню послідовності (8). Його чисельний розв'язок μ_k^h будемо шукати у вигляді лінійної комбінації кусково-сталих функцій:

$$\mu_k^h = \sum_{\ell=1}^M \mu_{k,\ell}^h \phi_\ell^0 \in S_h^0(\Gamma), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (13)$$

Тут $\mathbb{R}^M \ni \{\mu_{k,\ell}^h\}_{\ell=1}^M =: \mathbf{\mu}_k^h$ – вектор невідомих коефіцієнтів, для знаходження якого маємо СЛАР

$$\mathbf{V}_0^h \mathbf{\mu}_k^h = \tilde{\mathbf{g}}_k^h, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (14)$$

Матриця \mathbf{V}_0^h є конкретною реалізацією матриці системи (12), її елементами є такі інтеграли:

$$V_0^h[i, \ell] = \int_{\tau_i} \int_{\tau_\ell} e_0(x-y) ds_y ds_x, \quad i, \ell = 1, \dots, M.$$

Компоненти вектора правої частини у системі (14) мають вигляд

$$\tilde{g}_k^h[i] = \int_{\tau_i} \left\{ g_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} (V_{k-j} \mu_j^h)(x) \right\} ds_x, \quad j = 1, \dots, M.$$

Отож, якщо задати значення параметра N , то, розв'язуючи для послідовних значень $k = 0, \dots, N$ систему (14) і визначаючи вектори μ_k^h , за формулою (13) можемо знаходити наближення густин μ_k^h на циліндрі Σ . Послідовність $\mathbf{\mu}^{N,h} := (\mu_0^h, \mu_1^h, \dots, \mu_N^h, 0, 0, \dots)^\top$ є наближеним розв'язком системи ГІР (7), а суму

$$\tilde{\mu}^{N,h}(y, t - |x - y|) = \sum_{k=0}^N \left(\sum_{i=0}^k \zeta_{k-i}(\sigma |x - y|) \mu_i^h(y) \right) L_k(\sigma t), \quad x, y \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (15)$$

тракуємо як наближений (чисельний) розв'язок ІРЯЗ (1).

Виведемо апріорну оцінку похибки чисельного розв'язку $\tilde{u}^{N,h}$ відносно наближеного розв'язку \tilde{u}^N , заданого формулою (9). Нехай поверхню Γ можна подати як об'єднання $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\tilde{N}} \bar{\Gamma}_i$ поверхонь Γ_i (таких, що $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$), кожна з яких має достатньо гладку параметризацію:

$$\Gamma_i := \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \tilde{\chi}_i(\xi), \xi \in \tilde{\tau}_i \subset \mathbb{R}^2\}.$$

Використовуючи множину невід'ємних функцій $\phi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ таких, що

$$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \phi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Gamma, \quad \phi_i(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma \setminus \Gamma_i,$$

довільну задану на поверхні Γ функцію v подамо у вигляді

$$v(x) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \phi_i(x)v(x) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} v_i(x) \quad \forall x \in \Gamma,$$

де $v_i(x) := \phi_i(x)v(x) \quad \forall x \in \Gamma_i$. Будемо розглядати при $s \in (0, 1]$ простори кусково-гладких функцій [27]

$$H_{\text{pw}}^s(\Gamma) := \{v \in L^2(\Gamma) : v|_{\Gamma_i} \in H^s(\Gamma_i), i = 1, \dots, \tilde{N}\}$$

з нормою і півнормою

$$\|v\|_{H_{\text{pw}}^s(\Gamma)} := (\|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 + |v|_{H_{\text{pw}}^s(\Gamma)}^2)^{1/2}, \quad |v|_{H_{\text{pw}}^s(\Gamma)} := \left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}} |v|_{H^s(\Gamma_i)}^2 \right)^{1/2},$$

де півнорми на частинах Γ задані з урахуванням параметризації $v_i(\tilde{\chi}_i(\xi)) =: \tilde{v}_i(\xi)$ при $\xi \in \tilde{\tau}_i$:

$$|\tilde{v}_i|_{H^1(\tilde{\tau}_i)} := \left(\int_{\tilde{\tau}_i} |\nabla_{\xi} \tilde{v}_i(\xi)|^2 ds_{\xi} \right)^{1/2},$$

$$|\tilde{v}_i|_{H^s(\tilde{\tau}_i)} := \left(\int_{\tilde{\tau}_i} \int_{\tilde{\tau}_i} \frac{(\tilde{v}_i(\xi) - \tilde{v}_i(\eta))^2}{|\xi - \eta|^{2+2s}} ds_{\xi} ds_{\eta} \right)^{1/2}, \quad s \in (0, 1).$$

Лема 1. Нехай $\mu \in (H_{\text{pw}}^s(\Gamma))^{\infty}$ – розв’язок системи ГІР (7) при деякому $s \in (0, 1]$, який задовольняє нерівність

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\mu_j|_{H_{\text{pw}}^s(\Gamma)} < +\infty. \quad (16)$$

Тоді при довільному значенні параметра $N \in \mathbb{N}_0$ для чисельного розв’язку $\tilde{\mu}^{N,h}$ ІРЯЗ (1) виконується асимптотична оцінка

$$\|\tilde{\mu}^N(\cdot, t) - \tilde{\mu}^{N,h}(\cdot, t)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \tilde{C}_{N,T} h^{s+1/2} \sum_{k=0}^N |\mu_k|_{H_{\text{pw}}^s(\Gamma)}, \quad t \in (0, T), \quad (17)$$

де $T \in \mathbb{R}_+$ – довільне фіксоване число, $C_{N,T}$ і \tilde{C}_k – величини, які не залежать від параметра h .

Д о в е д е н н я. При довільних фіксованих значеннях $N \in \mathbb{N}_0$ та $T \in \mathbb{R}_+$ і довільному $t \in (0, T)$ розглянемо величину

$$\delta_{N,T} := \|\tilde{\mu}^N(\cdot, t) - \tilde{\mu}^{N,h}(\cdot, t)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \left\| \sum_{k=0}^N (\mu_k(\cdot) - \mu_k^h(\cdot)) L_k(\sigma t) \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Позначимо $C_{N,T} := \max_{t \in [0, T], k=0, \dots, N} |L_k(\sigma t)|$. Тоді можемо записати

$$\delta_{N,T} \leq C_{N,T} \sum_{k=0}^N \|\mu_k - \mu_k^h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (18)$$

Зазначимо, що у випадку, коли розв’язок системи ГІР (7) задовольняє нерівність (16), то справджується оцінка [27]

$$\|\mu_k - \mu_k^h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \tilde{C}_k h^{s+1/2} |\mu_k|_{H_{\text{pw}}^s(\Gamma)}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

де \tilde{C}_k – величини, які не залежать від параметра h . Врахувавши її у нерівності (18) і ввівши позначення $\tilde{C}_{N,T} := C_{N,T} \max_{k=0, \dots, N} \{\tilde{C}_k\}$, отримаємо (17). \blacklozenge

3. Результати обчислювального експерименту. Продемонструємо чисельне розв'язування ІРЯЗ (1) розглянутим комбінованим методом. Вважатимемо, що Γ є поверхнею куба $\Omega := (-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1)$, а права частина рівняння (1) має вигляд $g(x, t) := \frac{f_3(t - |x| + 1)}{|x|}$, $(x, t) \in \Sigma$, де f_3 – так званий кубічний бета-сплайн [6]. За значення параметра перетворення Лагерра візьмемо $\sigma = 2$.

Спочатку подамо результати, які стосуються компонентів чисельного розв'язку $\mu^{N, h}$ системи ГІР (7) при різних значеннях параметра N . Для порівняння також розглядатимемо чисельний розв'язок $\hat{\mu}^{N, h} := (\hat{\mu}_0^h, \hat{\mu}_1^h, \dots, \hat{\mu}_N^h, 0, 0, \dots)^T$ цієї ж системи, знайдений іншим методом, а саме – методом колокації [5, 21, 26]. Незважаючи на те, що для такого класу інтегральних рівнянь цей метод не має відповідного обґрунтування (на противагу МГЕ, побудованому на основі методу Бубнова – Гальоркіна), він здавна використовується на практиці. Зазначимо, що у випадку використання в методі колокації тих самих скінченновимірних функціональних просторів $S_h^0(\Gamma)$ з кусково-сталими базисними функціями $\{\varphi_\ell^0\}_{\ell=1}^M$ елементи матриць \mathbf{V}_k^h і вектора правої частини в СЛАР (14) матимуть вигляд

$$V_k^h[i, \ell] = \int_{\tau_\ell} e_k(x_i - y) ds_y,$$

$$\tilde{g}_k^h[i] = g_k(x_i) - \sum_{j=0}^{k-1} (V_{k-j} \mu_j^h)(x_i), \quad i, \ell = 1, \dots, M,$$

де кожному точку колокації x_i вибирають у центрі ваги відповідного трикутника τ_i .

Застосуємо обидва згадані методи до першого з ГІР у послідовності (8). Оскільки на цьому етапі основним параметром є параметр дискретизації h , то розглядатимемо різні розбиття $\Gamma_{\tilde{M}}$ граничної поверхні, зменшуючи величину h . У табл. 1 подано значення чисельних розв'язків $\mu_0^h(x)$ і $\hat{\mu}_0^h(x)$ (верхній і нижній рядки, відповідно) ГІР (8) при $k = 0$ і $\sigma = 2$ на послідовності розбиттів $\Gamma_{\tilde{M}}$ у точці $x = (1, x_2, 0)$ на одній з бічних граней куба. Як бачимо, значення розв'язків, отримані різними чисельними методами, є близькі між собою для усіх точок спостереження з різним положенням на грані куба.

Таблиця 1

x_2	\tilde{M}				
	300	588	972	1452	2700
0	$3.09064 \cdot 10^{-1}$	$3.05025 \cdot 10^{-1}$	$3.02762 \cdot 10^{-1}$	$3.01466 \cdot 10^{-1}$	$3.00211 \cdot 10^{-1}$
	$2.96648 \cdot 10^{-1}$	$2.98582 \cdot 10^{-1}$	$2.98911 \cdot 10^{-1}$	$2.98932 \cdot 10^{-1}$	$2.98837 \cdot 10^{-1}$
0.2	$3.09064 \cdot 10^{-1}$	$2.69065 \cdot 10^{-1}$	$2.80764 \cdot 10^{-1}$	$2.70912 \cdot 10^{-1}$	$2.83511 \cdot 10^{-1}$
	$2.96648 \cdot 10^{-1}$	$2.64675 \cdot 10^{-1}$	$2.77803 \cdot 10^{-1}$	$2.68793 \cdot 10^{-1}$	$2.82207 \cdot 10^{-1}$
0.5	$1.83769 \cdot 10^{-1}$	$1.62174 \cdot 10^{-1}$	$1.75864 \cdot 10^{-1}$	$1.64615 \cdot 10^{-1}$	$1.65704 \cdot 10^{-1}$
	$1.79747 \cdot 10^{-1}$	$1.61857 \cdot 10^{-1}$	$1.74803 \cdot 10^{-1}$	$1.64473 \cdot 10^{-1}$	$1.65664 \cdot 10^{-1}$

Значення чисельних розв'язків $\mu_k^h(x)$ і $\hat{\mu}_0^h(x)$ (верхній і нижній рядки відповідно) ГІР (8) у фіксованій точці спостереження $x = (1, 0, 0)$ для різних значень параметра k і при $\sigma = 2$ на тій самій послідовності розбиттів $\Gamma_{\tilde{M}}$

наведено у табл. 2. Як бачимо, отримані різними методами значення розв'язків мало відрізняються між собою поточною і мають однакову поведінку при зменшенні значення параметра h для різних номерів k .

Таблиця 2

$k \backslash$	\tilde{M}				
	300	588	972	1452	2700
0	$3.09064 \cdot 10^{-1}$	$3.05025 \cdot 10^{-1}$	$3.02762 \cdot 10^{-1}$	$3.01466 \cdot 10^{-1}$	$3.00211 \cdot 10^{-1}$
	$2.96648 \cdot 10^{-1}$	$2.98582 \cdot 10^{-1}$	$2.98911 \cdot 10^{-1}$	$2.98932 \cdot 10^{-1}$	$2.98837 \cdot 10^{-1}$
10	$-7.27805 \cdot 10^{-2}$	$-7.12230 \cdot 10^{-2}$	$-7.04907 \cdot 10^{-2}$	$-7.02050 \cdot 10^{-2}$	$-6.98376 \cdot 10^{-2}$
	$-6.93435 \cdot 10^{-2}$	$-6.94413 \cdot 10^{-2}$	$-6.94286 \cdot 10^{-2}$	$-6.94037 \cdot 10^{-2}$	$-6.93674 \cdot 10^{-2}$
15	$3.41835 \cdot 10^{-2}$	$3.28953 \cdot 10^{-2}$	$3.24581 \cdot 10^{-2}$	$3.21571 \cdot 10^{-2}$	$3.21783 \cdot 10^{-2}$
	$3.20066 \cdot 10^{-2}$	$3.19480 \cdot 10^{-2}$	$3.18885 \cdot 10^{-2}$	$3.18604 \cdot 10^{-2}$	$3.18375 \cdot 10^{-2}$
20	$-1.23603 \cdot 10^{-2}$	$-1.22948 \cdot 10^{-2}$	$-1.22314 \cdot 10^{-2}$	$-1.19848 \cdot 10^{-2}$	$-1.21693 \cdot 10^{-2}$
	$-1.22545 \cdot 10^{-2}$	$-1.21227 \cdot 10^{-2}$	$-1.21263 \cdot 10^{-2}$	$-1.21325 \cdot 10^{-2}$	$-1.21354 \cdot 10^{-2}$

Разом з тим зауважимо, що результати обох методів чутливі до похибок обчислення елементів матриць \mathbf{V}_k^h , $k = 0, \dots, N$, при формуванні СЛАР (14), які є дво- (метод колокації) або чотирикратними (МГЕ) інтегралами. Особливо це стосується матриці \mathbf{V}_0^h , оскільки (як було згадано вище) функція $e_0(x - y)$ має інтегровну особливість при співпадінні точок x та y . При знаходженні чисельних розв'язків розглянутих модельних задач було використано адитивне виділення таких особливостей, яке стосовно подібних задач описано в [5]. З метою спрощення алгоритмів реалізації ця методика була застосована лише для випадків, коли точки x та y належали тому самому граничному елементові, тобто лише на головній діагоналі матриці. При надто дрібних граничних елементах спеціальну методику інтегрування слід використовувати і для випадків, коли згадані точки знаходяться на сусідніх граничних елементах [5, 13, 17]. Інакше може появлятися деяка нестійкість у поведінці чисельних розв'язків, що можна спостерігати для деяких значень розв'язків при $\tilde{M} = 2700$ у наведених вище таблицях.

Маючи набір компонентів μ_k^h , $k = 0, \dots, N$, можна обчислювати значення чисельного розв'язку (15) ІРЯЗ (1) на Σ . Графіки розв'язків $\tilde{\mu}^{h,N}$ у точці спостереження $x = (1, 0, 0)$ при $y = (1, y_2, 0)$ для $N = 40$ і $\tilde{M} = 972$ подано на рис. 1. Розглядаючи $\tilde{\mu}^{h,N}(y, t - |x - y|)$ на послідовності значень параметра N , можна спостерігати його поточною за часом збіжність на деякому інтервалі $[0, T]$, який розширюється при збільшенні N . Відмітимо чітке відтворення ефекту «запізнення»: значення розв'язку $\tilde{\mu}^{h,N}(y, t - |x - y|)$, яке характеризує вплив джерела, розміщеного в точці y , на збурення у точці x , є близьким до нуля для $t \in [0, |x - y|]$. Зазначимо, що графіки чисельного розв'язку рівняння (1), обчисленого шляхом підстановки у розвинення (15) коефіцієнтів $\hat{\mu}_k^h(x)$, $k = 0, \dots, N$, отриманих за допомогою методу колокації, на рис. 1 візуально не відрізнятимуться від попередніх.

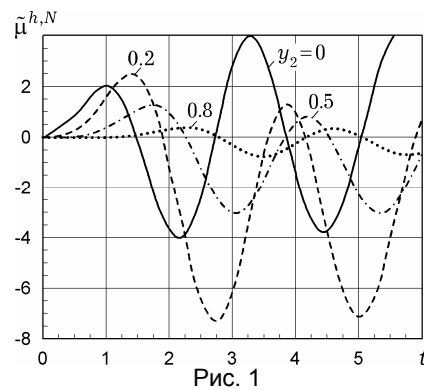


Рис. 1

Розглянемо тепер послідовність

$$\mathbf{v} := (v_0, v_1, \dots, v_k, \dots)^\top, \quad v_k(x) = \frac{e^{\sigma} \zeta_k(x)}{|x|}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (19)$$

З точністю до множників вона співпадає з фундаментальним розв'язком нескінченної трикутної системи еліптичних рівнянь, яку отримують в результаті застосування перетворення Лагерра до хвильового рівняння [3]. Тому можемо розглядати послідовність (19) як аналітичний розв'язок задачі Діріхле для такої нескінченної системи з граничним значенням $g_k = v_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ на Γ . Крім того, відомо [25], що послідовність ГІР (8) є еквівалентною у певному сенсі зазначеній крайовій задачі. Зокрема це означає, що послідовність $\mathbf{u}^h := \mathbf{V} \circ_{H^{1/2}(\Gamma)} \boldsymbol{\mu}^h$, яка побудована на основі чисельного розв'язку

ГІР (8) $\boldsymbol{\mu}^h := (\mu_0^h, \mu_1^h, \dots, \mu_k^h, \dots)^\top$, є розв'язком такої крайової задачі, якщо його слід співпадає з послідовністю $\mathbf{v} := (v_0, v_1, \dots, v_k, \dots)^\top$ на Γ . Цей факт використаємо для оцінки похибки чисельного розв'язку послідовності ГІР (8), оскільки її аналітичний розв'язок нам невідомий.

Отже, вважаємо, що в послідовності ГІР (8) права частина задана з використанням послідовності \mathbf{v} (19). Знайдемо (як і раніше – двома методами) по N компонентів чисельних розв'язків μ_k^h і $\hat{\mu}_k^h(x)$, $k = 0, \dots, N$, і обчислимо за ними значення відповідних розв'язків $u_k^h(x)$ і $\hat{u}_k^h(x)$, $k = 0, \dots, N$, зазначеної вище крайової задачі Діріхле на множині точок x зовні куба. Результати обчислень розв'язків $u_k^h(x)$, $\hat{u}_k^h(x)$ і $v_k(x)$ подано у табл. 3.

Таблиця 3

$x_1 \backslash k$		0	10	20
1.5	$u_k^h(x)$	$2.45961 \cdot 10^{-1}$	$8.91296 \cdot 10^{-2}$	$-7.76775 \cdot 10^{-2}$
	$\hat{u}_k^h(x)$	$2.45157 \cdot 10^{-1}$	$8.88135 \cdot 10^{-2}$	$-7.65805 \cdot 10^{-2}$
	$v_k(x)$	$2.45253 \cdot 10^{-1}$	$8.85703 \cdot 10^{-2}$	$-7.66715 \cdot 10^{-2}$
2.0	$u_k^h(x)$	$6.78263 \cdot 10^{-2}$	$5.70383 \cdot 10^{-2}$	$4.13326 \cdot 10^{-2}$
	$\hat{u}_k^h(x)$	$6.76731 \cdot 10^{-2}$	$5.65699 \cdot 10^{-2}$	$4.09090 \cdot 10^{-2}$
	$v_k(x)$	$6.76676 \cdot 10^{-2}$	$5.65019 \cdot 10^{-2}$	$4.07837 \cdot 10^{-2}$
2.5	$u_k^h(x)$	$1.99574 \cdot 10^{-2}$	$-1.86551 \cdot 10^{-2}$	$-3.81745 \cdot 10^{-3}$
	$\hat{u}_k^h(x)$	$1.99229 \cdot 10^{-2}$	$-1.86508 \cdot 10^{-2}$	$-3.84610 \cdot 10^{-3}$
	$v_k(x)$	$1.99148 \cdot 10^{-2}$	$-1.86297 \cdot 10^{-2}$	$-3.80306 \cdot 10^{-3}$
3.0	$u_k^h(x)$	$6.11747 \cdot 10^{-3}$	$-1.97795 \cdot 10^{-2}$	$-1.06752 \cdot 10^{-2}$
	$\hat{u}_k^h(x)$	$6.10901 \cdot 10^{-3}$	$-1.97095 \cdot 10^{-2}$	$-1.05927 \cdot 10^{-2}$
	$v_k(x)$	$6.10521 \cdot 10^{-3}$	$-1.96762 \cdot 10^{-2}$	$-1.05491 \cdot 10^{-2}$
3.5	$u_k^h(x)$	$1.92886 \cdot 10^{-3}$	$-2.61027 \cdot 10^{-3}$	$3.34234 \cdot 10^{-3}$
	$\hat{u}_k^h(x)$	$1.92660 \cdot 10^{-3}$	$-2.59210 \cdot 10^{-3}$	$3.33455 \cdot 10^{-3}$
	$v_k(x)$	$1.92513 \cdot 10^{-3}$	$-2.57739 \cdot 10^{-3}$	$3.33181 \cdot 10^{-3}$

Як бачимо, компоненти обох чисельних розв'язків поточною є близькими до відповідних компонентів аналітичного. Для розглянутого модельного

прикладу це є непрямим свідченням того, що при заданій кількості граничних елементів ($\tilde{M} = 1452$) чисельні розв'язки ГІР також були знайдені із задовільною точністю.

Висновки. Поєднання перетворення Лагерра з методом граничних елементів дає змогу ефективно знаходити чисельні розв'язки інтегральних рівнянь з ядром із запізненням. Очевидно, що цей підхід можна поширити і на інші залежні від часу інтегральні рівняння, до яких приходять при розв'язуванні початково-крайових задач з іншими крайовими умовами, а також у випадку представлення розв'язку запізнюючим потенціалом подвійного шару чи формулою Кірхгофа.

1. *Галазюк В. А.* Метод поліномів Чебишева–Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3–7.
2. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. – Москва: Высш. шк., 1970. – 712 с.
3. *Літинський С. В., Муzychук А. О.* Розв'язування мішаних задач для хвильового рівняння з використанням запізнюючих поверхневих потенціалів та перетворення Лагерра // Мат. студії. – 2015. – 44, No. 2. – P. 185–203.
4. *Літинський С., Муzychук Ю., Муzychук А.* Про слабкі розв'язки крайових задач для нескінченної трикутної системи еліптичних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2009. – Вип. 15. – С. 52–70.
5. *Людкевич И. В., Муzychук А. Е.* Численное решение краевых задач для волнового уравнения. – Львов: Львов. гос. ун-т, 1990. – 80 с.
6. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. – Москва: Наука, 1981. – 416 с.
7. *Положий Г. М.* Рівняння математичної фізики. – Київ: Рад. шк., 1959. – 478 с.
8. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4 т. – Т. 1: Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1977. – 357 с.
Те саме: *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. – Vol. 1. Functional analysis. – New York: Acad. Press, 1972. – xvii+325 p.
9. *Суллим Г. Т., Опанасович В. К., Турчин І. М., Хома В. В.* Перехідний термонапружений стан у півсмугі з покриттям, зумовлений нагрівом її бічної поверхні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 1. – С. 132–142.
Те саме: *Sulym H. T., Opanasovych V. K., Turchyn I. M., Khoma V. V.* Transient thermal stressed state in a half strip with coating caused by heating of its lateral surface // J. Math. Sci. – 2017. – 222, No. 2. – P. 167–180.
10. *Bamberger A., Ha Duong T., Nedelec J. C.* Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la diffraction d'une onde acoustique (I) // Math. Methods Appl. Sci. – 1986. – 8, No. 1. – P. 405–435.
11. *Bamberger A., Ha Duong T., Nedelec J. C.* Formulation variationnelle pour le calcul de la diffraction d'une onde acoustique par une surface rigide // Math. Methods Appl. Sci. – 1986. – 8, No. 1. – P. 598–608. DOI: 10.1002/mma.1670080139.
12. *Banjai L., Lubich C., Sayas F.-J.* Stable numerical coupling of exterior and interior problems for the wave equation // Numer. Math. – 2015. – 129, No. 4. – P. 611–646.
13. *Bruno O. P., Kunyansky L. A.* A fast, high-order algorithm for the solution of surface scattering problems: Basic implementation, tests, and applications // J. Comput. Phys. – 2001 – 169, No. 1. – P. 80–110.
14. *Costabel M.* Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results // SIAM J. Math. Anal. – 1988. – 19, No. 3. – P. 613–626.
15. *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 4: Integral Equations and Numerical Methods. – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – x+465 p.
16. *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 5: Evolution problems I. – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – xiv+709 p.
17. *Davies P. J.* Numerical stability and convergence of approximations of retarded potential integral equations // SIAM J. Numer. Anal. – 1994. – 31, No. 3. – P. 856–875.
18. *Domínguez V., Sayas F.-J.* Some properties of layer potentials and boundary integral operators for the wave equation // J. Integral Equat. Appl. – 2013. – 25, No. 2. – P. 253–294.

19. Hackbusch W., Kress W., Sauter S. A. Sparse convolution quadrature for time domain boundary integral formulations of the wave equation // IMA. J. Numer. Anal. – 2009. – **29**, No. 1. – P. 158–179.
20. Ha-Duong T. On retarded potential boundary integral equations and their discretisation // In: Topics in Computational Wave Propagation—Direct and Inverse Problems. – Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – **31**. – Berlin, etc.: Springer, 2003. – P. 301–336. – https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-55483-4_8#page-1.
21. Hsiao G. C., Wendland W. L. Boundary element methods: foundation and error analysis // In: Encyclopedia of Computational Mechanics / Eds. E. Stein, R. de Borst, T. J. R. Hughes. – Vol. 1: Fundamentals. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd. – 2004. – P. 339–374.
22. Hsiao G. C., Wendland W. L. Boundary integral equations. – Berlin, etc.: Springer-Verlag, 2008. – xix+620 p.
23. Keilson J., Nunn W., Sumita U. The Laguerre transform. – Alexandria, VA: Center for Naval Analyses. Operations Evaluation Group Corporation, 1980. – Professional paper 284 / May 1980. – Accession Number: ADA085100. – 125 p.
24. Lubich Ch. On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations // Numer. Math. – 1994. – **67**, No. 3. – P. 365–389.
25. Muzychuk Yu. A., Chapko R. S. On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind // Mat. studii. – 2012. – **38**, № 1. – С. 12–34.
26. Sloan I. H. Error analysis of boundary integral methods // Acta Numerica. – 1992. – **1**. – P. 287–339. – <https://doi.org/10.1017/S0962492900002294>.
27. Steinbach O. Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems. Finite and boundary elements. – New York: Springer-Verlag, 2008. – xii+386 p.

О СОЧЕТАНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАГЕРРА И МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ ЯДРОМ

К зависящему от времени граничному интегральному уравнению, возникающему при решении пространственных начально-краевых задач Дирихле для однородного волнового уравнения с однородными начальными условиями при помощи запаздывающего потенциала простого слоя, применяется преобразование Лагерра по времени. Полученная система граничных интегральных уравнений сводится к последовательности интегральных уравнений Фредгольма первого рода, отличающихся между собой лишь рекуррентно зависящими правыми частями. Для нахождения их численного решения применяется метод граничных элементов. Установлена асимптотическая оценка погрешности численного решения. Приведены результаты вычислительного эксперимента относительно нахождения решений интегральных уравнений с ядром из запаздыванием для модельных примеров.

COMBINATION OF LAGUERRE TRANSFORM AND BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR SOLVING INTEGRAL EQUATIONS WITH RETARDED KERNEL

Laguerre transform with respect to time is applied for time-dependent boundary integral equation that arises in process of solving the spatial initial-boundary Dirichlet problems for the homogeneous wave equation with homogeneous initial conditions using retarded potential of a simple layer. The obtained system of boundary integral equations is reduced to a sequence of Fredholm integral equations of the first kind, which differ only by recursively dependent right-hand sides. The boundary element method is used to find the numerical solution of the equations. An asymptotic error estimation of the numerical solution is determined. Results of computational experiment with respect to finding solutions of integral equations with retarded kernel are presented for model examples.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
17.06.16