

ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ ІЗ НИЗЬКОЮ ЗСУВНОЮ ЖОРСТКІСТЮ ЗА ДІЇ ЛОКАЛЬНИХ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА

Розглядається квазістатична задача термопружності для циліндричної оболонки скінченної довжини у змінному полі температур. Поверхня оболонки віддає тепло у навколишнє середовище сталої температури за законом Ньютона. Задачу розв'язано з урахуванням деформацій зсуву. Докладно розглянуто асимптотичний стан оболонки, за якого розрахункові величини досягають максимальних рівнів. Здійснено порівняльний аналіз термопружного стану оболонки скінченної довжини з відповідним станом нескінченно довгої оболонки.

Виробництво, монтаж та експлуатація сучасних енергетичних і теплокомунікаційних систем, одним із основних елементів яких є тонкостінні полімерні труби, часто здійснюються у складних умовах, де помітний вплив мають нерівномірні температурні процеси. Термопружний стан ряду конструктивних елементів, у тому числі термостійких оболонок, виготовлених із податливого до зсуву полімеру (композита), розглядався у роботах [6–8]. Результати досліджень свідчать про суттєвий вплив зсувної компоненти деформації на несучу здатність елемента конструкції. Прикладами таких новітніх елементів є *сотова* циліндрична оболонка, експлуатаційна здатність якої суттєво покращується завдяки намотаним на неї тонким полімерним трубкам, а також оболонка з періодично розміщеними на її поверхні ребрами жорсткості, що спаяні з основою методом екструзивного зварювання [4]. В обох конструкціях як при їх монтажі, так і при експлуатації виникають термопружні стани, важливою складовою яких є ефект пружного взаємозсуву волокон оболонки. Цей ефект, що описується зсувною моделлю С. П. Тимошенка, у випадку нескінченної оболонки розглянуто в роботі [5]. У цій роботі здійснено порівняльний аналіз проявів пружного взаємозсуву волокон на оболонці скінченної довжини для двох практично важливих випадків розміщення теплових джерел.

1. Постановка задачі. Нехай циліндрична оболонка з радіусом серединної поверхні R , товщиною стінки $2h$ і віднесеної до R довжини ℓ нагрівається джерелами тепла, що описуються осесиметричною функцією розподілу $Q(x, \tau)$ і діють з моменту часу $t = 0$ у деякій обмеженій області, яка належить до проміжку $[0, \ell]$. Функція температури $T(x, \tau)$ як різниця температур оболонки і зовнішнього середовища визначається з рівняння [2]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} - \beta^2 T(x, \tau) = -\frac{R^2}{\alpha_t} Q(x, \tau), \quad (1)$$

де $x = \xi/R$, $x \in [0, \ell]$, ξ – осьова координата; $\tau = t/(\alpha R^2)$ і t – безрозмірний параметр часу та реальний час; $\alpha = C_v \rho / \alpha_t$, C_v – питома теплоємність матеріалу за незмінного його об'єму V , ρ – густина матеріалу, α_t – коефіцієнт теплопровідності, $\beta^2 = xR^2/(\alpha_t h)$ – коефіцієнт тепловіддачі поверхні оболонки у зовнішнє середовище.

Розв'язок рівняння (1) будемо за початковою умовою

$$T(x, \tau)|_{\tau=0} = 0 \quad (2)$$

і двома типами крайових умов:

$$\text{А):} \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \quad (3)$$

$$\text{Б):} \quad T(x, \tau)|_{x=0} = T(x, \tau)|_{x=\ell} = 0. \quad (4)$$

Умова (3) означає відсутність втрат тепла на торцях, тобто відсутність там теплового потоку, а умова (4) – обмеження температури на кінцях оболонки нульовим її значенням.

За відомою функцією температури $T(x, \tau)$ нормальні прогини оболонки $W(x, \tau)$ з урахуванням податливості матеріалу до зсуву описуються звичайним диференціальним рівнянням четвертого порядку [7]:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - 2g^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + 4k^4 W(x, \tau) = 4k^4 R \beta_t \left(T(x, \tau) - \varepsilon \frac{d^2 T}{dx^2} \right), \quad (5)$$

де $2g^2 = E/(k'G')$, E – модуль Юнга, k' та G' – коефіцієнт і модуль зсуву матеріалу, $4k^4 = 3(1 - \nu^2)(R/h)^2$, ν – коефіцієнт Пуассона, $\varepsilon = g^2/(2k^4)$ – параметр зсуву, β_t – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу оболонки.

Крайові умови, що накладаються на нормальні прогини оболонки подібно, як крайові умови (3), (4), можуть бути двох типів:

$$\text{А):} \quad \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=\ell} = 0, \quad \left. \frac{d^3 W}{dx^3} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^3 W}{dx^3} \right|_{x=\ell} = 0, \quad (6)$$

$$\text{Б):} \quad W(x, \tau)|_{x=0} = W(x, \tau)|_{x=\ell} = 0, \quad \left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=\ell} = 0. \quad (7)$$

Умови (6) означають відсутність на торцях оболонки кутів повороту та перерізуючих сил, а умови (7) – відсутність прогинів і згинних моментів.

Вирази кільцевих зусиль і осьових моментів, викликані градієнтами температурного поля, подаємо залежностями

$$N(x, \tau) = \frac{2Eh}{1 - \nu} \alpha_t T(x, \tau), \quad (8)$$

$$M(x, \tau) = \frac{D}{R^2} \left[2g^2 (W(x, \tau) - \beta_t R T(x, \tau)) - \frac{d^2 W}{dx^2} \right], \quad (9)$$

де $D = 2Eh^3/(3(1 - \nu^2))$ – згинна жорсткість оболонки.

2. Метод розв'язування. Розв'язок задачі будемо послідовним застосуванням інтегрального перетворення Лапласа до рівняння (1) з початковою умовою (2) і методу рядів Фур'є для побудови виразів трансформанти температури $T(x, \tau)$ і функції прогинів $W(x, \tau)$ у вигляді тригонометричних сум за косинусами або за синусами залежно від типу крайових умов (3), (4) для $T(x, \tau)$ і (6), (7) для $W(x, \tau)$.

Зауважимо, що метод тригонометричних рядів Фур'є передбачає продовження функції джерел тепла $Q(x, \tau)$ на проміжок $[-\ell, 0]$ з наступним її періодичним повторенням з періодом 2ℓ на усій числовій осі $x \in (-\infty, \infty)$, що дає підстави розглядати сформульовані задачі термопружності (з крайовими умовами (3), (4) і (6), (7)) для оболонки довжини 2ℓ .

Щоб визначити температуру $T(x, \tau)$, до рівняння (1) з урахуванням початкової умови (2) застосуємо інтегральне перетворення Лапласа

$$\tilde{F}(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} F(x, \tau) d\tau,$$

де p – параметр перетворення Лапласа. В результаті отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку:

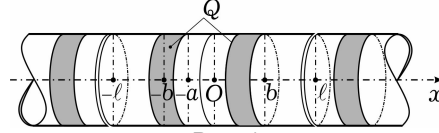
$$\frac{d^2 \tilde{T}(x, p)}{dx^2} - (p + \beta^2) \tilde{T}(x, p) = -\frac{R^2}{\alpha_t} \tilde{Q}(x, p), \quad (10)$$

де $\tilde{T}(x, p)$ і $\tilde{Q}(x, p)$ – зображення (трансформанти) функції температури і функції джерел тепла на комплексній площині (x, p) .

Розв'язок рівняння (10) у випадку довільної заданої на $[0, \ell]$ кусково-неперервної функції $Q(x, \tau)$ зручно будувати у вигляді ряду Фур'є

$$\tilde{T}(x, p) = \frac{1}{2} \tilde{a}_0(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n(p) \cos \frac{\pi n x}{\ell} + \tilde{b}_n(p) \sin \frac{\pi n x}{\ell}. \quad (11)$$

Підставивши вираз (11) у (10), розвинувши зображення заданої функції джерел $\tilde{Q}(x, p)$ в аналогічний тригонометричний ряд і прирівнявши коефіцієнти при однакових гармоніках розкладу, отримаємо рівняння для визначення коефіцієнтів $\tilde{a}_n(p)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, та $\tilde{b}_n(p)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, що і розв'язує у загальному задачу знаходження зображення $\tilde{T}(x, p)$. Однак зазначимо, що при виконанні оберненого перетворення (знаходженні оригіналу функції $T(x, \tau)$) при довільній функції розподілу джерел тепла $Q(x, \tau)$ у багатьох випадках виникають значні труднощі.



У зв'язку з цим розглянемо два важливі для прикладних застосувань випадки продовжених на проміжок $x \in [-\ell, 0]$ парних і непарних розподілів джерел тепла (див. рис. 1):

$$I: \quad Q(-x, \tau) = Q(x, \tau) = Q_0(\theta(x-b) - \theta(x-a))\theta(\tau), \quad 0 \leq b < a \leq \ell, \quad (12)$$

$$II: \quad -Q(-x, \tau) = Q(x, \tau) = Q_0(\theta(x-b) - \theta(x-a))\theta(\tau), \quad 0 \leq b < a \leq \ell, \quad (13)$$

де $Q_0 = \text{const}$, а $\theta(\delta)$ – функція одиничного стрибка Гевісайда.

Розподіл (12) описує процес рівномірного нагріву оболонки джерелами сталої потужності Q_0 , зосередженими в симетричних відносно початку відліку $x = 0$ кільцях однакової ширини $|a - b|$. Розподіл (13) описує процес такого ж нагріву кільцевими джерелами на проміжку $[b, a]$ одночасно із симетричним охолодженням оболонки джерелами від'ємної потужності на проміжку $[-a, -b]$.

У випадку *I* зображення за Лапласом парної функції джерел тепла (12) подаємо рядом Фур'є за косинусами:

$$\tilde{Q}(x, p) = \frac{Q_0}{p} \left(\frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} \right)$$

з коефіцієнтами розкладу

$$A_0 = \frac{2(a-b)}{\ell}, \quad A_n = \frac{2}{\pi n} \left(\sin \frac{\pi n a}{\ell} - \sin \frac{\pi n b}{\ell} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (14)$$

а зображення відповідної функції температури (11) – аналогічним рядом з невідомими коефіцієнтами, що залежать від параметра перетворення Лапласа p :

$$\tilde{T}(x, p) = \frac{1}{2} \tilde{a}_0(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n(p) \cos \frac{\pi n x}{\ell}. \quad (15)$$

У випадку *II* непарну функцію $\tilde{Q}(x, p)$ подаємо у вигляді ряду за синусами

$$\tilde{Q}(x, p) = \frac{Q_0}{p} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}$$

з коефіцієнтами

$$B_n = \frac{2}{\pi n} \left(\cos \frac{\pi n b}{\ell} - \cos \frac{\pi n a}{\ell} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (16)$$

а зображення температури – аналогічним рядом

$$\tilde{T}(x, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n(p) \sin \frac{\pi n x}{\ell}. \quad (17)$$

Підставивши вирази (15) і (17) для зображень $\tilde{T}(x, p)$, а також відповідні їм розклади $\tilde{Q}(x, p)$ у рівняння (10) і прирівнявши коефіцієнти при однакових гармоніках, визначаємо коефіцієнти $\tilde{a}_n(p)$, $\tilde{b}_n(p)$ і трансформанти температурних полів:

$$I: \quad \tilde{T}(x, p) = \frac{q_0}{\beta_t} \left[\frac{a-b}{\ell} \frac{1}{p(p+\beta^2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{p(p+\lambda_n^2+\beta^2)} \cos(\lambda_n x) \right],$$

$$II: \quad \tilde{T}(x, p) = \frac{q_0}{\beta_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{p(p+\lambda_n^2+\beta^2)} \sin(\lambda_n x),$$

де $q_0 = \beta_t R^2 Q_0 / \alpha_t$, $\lambda_n = \pi n / \ell$.

Розклавши дроби (як функції від p) у цих виразах на прості, оригінали функцій $T(x, \tau)$ отримуємо за таблицями інтегральних перетворень [1]:

$$I: \quad T(x, \tau) = \frac{q_0}{\beta_t} \left[\frac{a-b}{\beta^2 \ell} \mathfrak{G}_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n^2 + \beta^2} \mathfrak{G}_n(\tau) \cos(\lambda_n x) \right], \quad (18)$$

$$II: \quad T(x, \tau) = \frac{q_0}{\beta_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\lambda_n^2 + \beta^2} \mathfrak{G}_n(\tau) \sin(\lambda_n x), \quad (19)$$

де $\mathfrak{G}_n(\tau) = 1 - e^{-(\lambda_n^2 + \beta^2)\tau}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Розв'язки рівняння прогинів (5) подаємо аналогічними рядами Фур'є:

$$I: \quad W(x, \tau) = \frac{1}{2} a_0^*(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^*(\tau) \cos(\lambda_n x), \quad (20)$$

$$II: \quad W(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^*(\tau) \sin(\lambda_n x). \quad (21)$$

Такий вибір розв'язків задачі автоматично забезпечує відповідне виконання крайових умов (6) і (7), а після внесення (18), (19) і (20), (21) у рівняння (5) і прирівнювання виразів при однакових гармоніках отримуємо коефіцієнти

$$a_0^*(\tau) = 2(a-b)(\beta^2 \ell)^{-1} R q_0 \mathfrak{G}_0(\tau), \quad a_n^* = 4k^4 R q_0 A_n^* (1 + \varepsilon \lambda_n^2) \mathfrak{G}_n(\tau),$$

$$b_n^*(\tau) = 4k^4 R q_0 B_n^* (1 + \varepsilon \lambda_n^2) \mathfrak{G}_n(\tau),$$

де

$$A_n^* = A_n \mu_n^{-4} (\lambda_n^2 + \beta^2)^{-1}, \quad B_n^* = B_n \mu_n^{-4} (\lambda_n^2 + \beta^2)^{-1}. \quad (22)$$

Тут $\mu_n^4 = \lambda_n^4 + 2g^2 \lambda_n^2 + 4k^4$, $n = 1, 2, 3, \dots$

У результаті формули розрахункових величин набувають вигляду

$$I: \quad W(x, \tau) = R q_0 \left[(a-b)(\beta^2 \ell)^{-1} \mathfrak{G}_0(\tau) + 4k^4 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* (1 + \varepsilon \lambda_n^2) \mathfrak{G}_n(\tau) \cos(\lambda_n x) \right], \quad (23)$$

$$N(x, \tau) = -2Eh q_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \lambda_n^4 \mathfrak{G}_n(\tau) \cos(\lambda_n x), \quad (24)$$

$$M(x, \tau) = 2Eh R q_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \lambda_n^2 \mathfrak{G}_n(\tau) \cos(\lambda_n x); \quad (25)$$

$$II: \quad W(x, \tau) = 4k^4 R q_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* (1 + \varepsilon \lambda_n^2) \vartheta_n(\tau) \sin(\lambda_n x), \quad (26)$$

$$N(x, \tau) = -2Eh q_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n^4 \vartheta_n(\tau) \sin(\lambda_n x), \quad (27)$$

$$M(x, \tau) = 2Eh R q_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n^2 \vartheta_n(\tau) \sin(\lambda_n x). \quad (28)$$

Зауважимо, що для задачі *I* у випадку $b = 0$ і незалежно від ступеня податливості матеріалу оболонки до зсуву максимальні рівні розрахункових величин в усіх перерізах, як це впливає з (18), (23) та (24), (25) і виразів (14) для коефіцієнтів $A_i, i = 0, 1, \dots$, досягаються при ширині кільця нагрівання $a = \ell/2$. Відповідні формули для обчислень отримуємо із вказаних рівностей, поклавши $A_n = 2(\pi n)^{-1} \sin(\pi n/2)$ у виразах (22).

З подальшим розширенням ширини кільця нагріву рівень зусиль і моментів знижується і при граничному значенні $a = \ell$ (рівномірне нагрівання усієї оболонки) отримуємо випадок вільного теплового розширення оболонки у часі, коли в усіх осьових перерізах температура $T(\tau) = (\beta^2 \beta_t)^{-1} q_0 \vartheta_0(\tau)$, прогини (розширення) $W(\tau) = \beta^{-2} R q_0 \vartheta_0(\tau)$, а кільцеві зусилля та згинні моменти відсутні.

Для задачі *II* у випадку $b = 0$ максимальні рівні температури, прогинів, зусиль і моментів, як це впливає з (19), (21), (27), (28) і (16), досягаються також при $a = \ell/2$, а відповідні формули отримуємо із вказаних рівностей з коефіцієнтами $B_n = 2(n\pi)^{-1} (1 - \cos(\pi n/2))$.

При суцільному покритті оболонки симетричними джерелами різних знаків (охолодження при $-a < x < 0$ і нагрів при $0 < x < a$) відповідні величини визначаємо з рівностей (19), (21) та (27), (28), у яких з урахуванням (16) слід покласти $B_{2n} = 0$, $B_{2n-1} = 4/((2n-1)\pi)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. При цьому екстремальні значення усіх розрахункових величин досягаються у перерізах $x = \pm \ell/2$.

З виразів (18), (19) і, як наслідок, з формул (20), (21), впливає, що в усіх осьових перерізах оболонки похідні від функцій температури і прогинів за часом τ додатні. Це означає, що в обох випадках (*I* і *II*) розміщення джерел тепла усі розрахункові величини є функціями, монотонно зростаючими в часі і, отже, найбільших своїх рівнів вони досягають в асимптотичному режимі нагріву при $\tau \rightarrow \infty$. Тому числовий аналіз зусиль і моментів надалі здійснюємо в асимптотичному режимі, поклавши у відповідних виразах $\vartheta_n(\tau) = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Обчислення виконано для оболонки довжини $\ell = 2$ (ℓ – довжина оболонки, віднесена до радіуса R) для таких випадків розміщення в ній джерел тепла:

$$I^\circ) \quad a = 0.2, \quad b = 0; \quad 2^\circ) \quad a = 0.2, \quad b = 0.1$$

Вибір I° розміщення джерел дає можливість порівняти результати дослідження термопружного стану оболонки скінченної довжини з отриманими раніше результатами для нескінченно довгої оболонки такого ж радіуса і товщини [3, 5].

Розглянемо ці випадки розміщення джерел порізно.

$$I^\circ) \quad a = 0.2, \quad b = 0.$$

Цей розподіл джерел означає нагрівання оболонки довжини ℓ у кільці $x \in [0, 0.2]$ або, що те ж саме, відповідає: *I* – парному розподілу джерел

тепла в оболонці довжини 2ℓ (два симетричні відносно перерізу $x = 0$ кільця нагріву вказаної ширини з джерелами тепла, що примикають один до одного, однакової потужності) та **II** – непарному розподілу джерел тепла (два аналогічні пояси: охолодження при $-a < x < 0$ і нагрівання при $0 < x < a$ з джерелами тепла рівної потужності, але різних знаків).

Формули для обчислення шуканих величин набувають вигляду

$$\mathbf{I:} \quad T(x) = \frac{q_0}{\beta_t} \left[\frac{1}{10\beta^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n^2 + \beta^2} \cos \frac{\pi n x}{2} \right], \quad (29)$$

$$W(x) = Rq_0 \left[\frac{1}{10\beta^2} + 4k^4 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* (1 + \varepsilon \lambda_n^2) \cos \frac{\pi n x}{2} \right], \quad (30)$$

$$N(x) = -2Ehq_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \lambda_n^4 \cos \frac{\pi n x}{2}, \quad (31)$$

$$M(x) = 2EhRq_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \lambda_n^2 \cos \frac{\pi n x}{2}; \quad (32)$$

$$\mathbf{II:} \quad T(x) = \frac{q_0}{\beta_t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\lambda_n^2 + \beta^2} \sin \frac{\pi n x}{2}, \quad (33)$$

$$W(x) = 4k^4 Rq_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* (1 + \lambda_n^2) \sin \frac{\pi n x}{2}, \quad (34)$$

$$N(x) = -2Ehq_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n^4 \sin \frac{\pi n x}{2}, \quad (35)$$

$$M(x) = 2EhRq_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n^2 \sin \frac{\pi n x}{2}. \quad (36)$$

Коефіцієнти A_n^* і B_n^* в обох задачах визначаємо з рівностей (22) і (14), (16) з урахуванням значень параметрів $a = 0.2$ і $b = 0$.

$$2^\circ) \quad a = 0.2, \quad b = 0.1.$$

Цей розподіл теплових джерел означає нагрівання оболонки довжини ℓ в області $x \in [0.1, 0.2]$ або, що те ж саме (за аналогією з випадком **I**^o), відповідає: **I** – парному розміщенню джерел в оболонці довжини 2ℓ (два пояси нагріву однакової потужності) та **II** – непарному (пояс охолодження при $x \in [-0.2, -0.1]$ і пояс нагріву при $x \in [0.1, 0.2]$ такої ж потужності) розподілу джерел тепла.

Формули розрахункових величин для задачі **I** отримуємо з (18), (23) та (24), (25), а для задачі **II** – з (19), (26) та (27), (28), де відповідні коефіцієнти обчислені при $a = 0.2$ і $b = 0.1$.

Числовий аналіз розв'язків проведено для трьох можливих варіантів поведінки матеріалу оболонки, що характеризуються такими відношеннями модулів Юнга і зсуву: $E/G' = 0$ ($g = 0$ – класичний варіант деформації оболонки з абсолютно жорсткого матеріалу); $E/G' = 40$ ($g = 2\sqrt{6}$ – виражений ступінь податливості матеріалу до зсуву); $E/G' = 60$ ($g = 6$ – матеріал оболонки суттєво податливий до зсуву).

Графіки функцій температури і зумовлених нею кільцевих зусиль і осьових моментів для задачі **I** наведено на рис. 2 ($b = 0$) і рис. 3 ($b = 0.1$), а для задачі **II** – на рис. 4 (обчислення виконано при $b = 0$, а при $b = 0.1$ якіс-

ні відмінності несуттєві), де $T^*(x) = 10(\beta_t/q_0)T(x)$, $N^*(x) = -10^2 N(x)/(2Ehq_0)$, $M^*(x) = 10^3 M(x)/(2EhRq_0)$. На графіках нижні індекси «(1)» «(2)» і «(3)» в $N^*(x)$, $M^*(x)$ відповідають відношенням $E/G' = 0, 40$ і 60 .

Порівняльний аналіз розрахунків вказує на суттєву залежність значень досліджуваних величин від ступеня податливості матеріалу оболонки до зсуву. Так, у задачі **I** величина максимального кільцевого зусилля (стиску) у перерізі $x = 0$ при $E/G' = 40$ становить 63%, а при $E/G' = 60$ – лише 53% від максимального значення зусилля, що притаманне класичній моделі деформування оболонки ($E/G' = 0$). При цьому величини згинних моментів також значно знижуються і становлять відповідно 71% і 62%. Аналогічні порівняння величин у задачі **II** (рис. 3) призводять до 69% і 61% для кільцевих зусиль та 64% і 55% для згинних моментів, значення яких обчислені у точках $x = 0.15$ (максимальні зусилля стиску) і в точці $x = 0.2$ (максимальні згинні моменти). Різниця на 6–8 пунктів у величинах зусиль і моментів для задач **I** та **II** викликана відмінністю крайових умов (3) і (4), тобто різною конфігурацією температурного градієнта, що зумовлює термопружний стан оболонки.

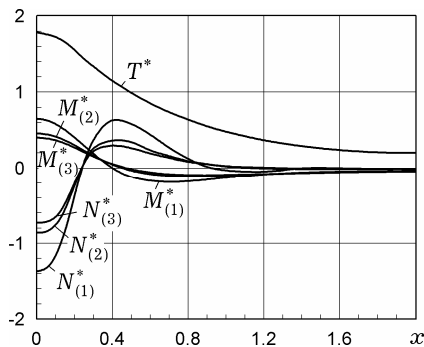


Рис. 2

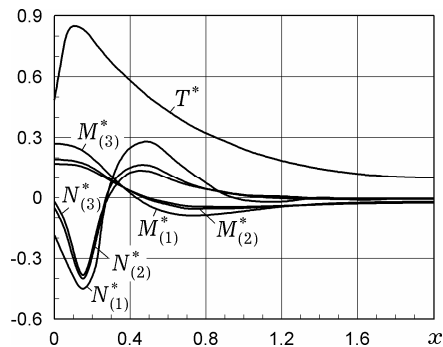


Рис. 3

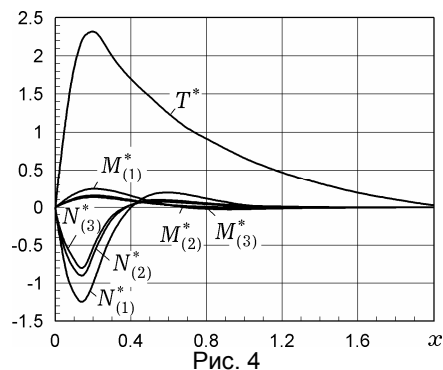


Рис. 4

Зауважимо, що з огляду на асимптотичну властивість замкнутого розв'язку задачі для нескінченно довгої оболонки [3, 5] (аналогічної до задачі **I**), у якій розрахункові величини практично зникають на відстані декількох радіусів від початку відліку $x = 0$, розв'язання споріднених задач з локальними збуреннями термопружного стану довгої оболонки можна здійснювати методом рядів Фур'є для оболонки скінченної довжини з однорідними крайовими умовами на кінцях $x = \pm \ell$, що значно спрощує процедуру побудови розв'язку певного класу задач теорії пружності. Так, наприклад, для оболонки довжини $2R$ з відношенням $R/h = 20$ і шириною кільця нагріву $a = 0.2$ незалежно від ступеня податливості матеріалу до зсуву мак-

симальні значення температури, прогину та кільцевих зусиль (при $x = 0$) практично співпадають з відповідними максимальними значеннями, що зумовлено дією ідентичних джерел тепла у нескінченно довгій оболонці. Що стосується величин максимального згинного моменту, то у довгій оболонці вони на 10 % вище від рівня у короткій, що пояснюється різницею в конструктивних жорсткостях нескінченно довгої і короткої оболонок. Окрім того, більша жорсткість нескінченно довгої оболонки призводить до щільнішої асимптотики механічних величин уздовж осі Ox , ніж це спостерігаємо для оболонки скінченної довжини. Так, розрахунки вказують на те, що у випадку класичної моделі деформування оболонки ($g = 0$) величина зусиль $N_{(1)}^* \Big|_{x=2}$ в оболонці довжини $2R$ на її торці $x = 2$ становить $\approx 0.6\%$ від її максимальних зусиль $N_{(1)}^* \Big|_{x=0}$ у той час, як для нескінченно довгої оболонки це співвідношення становить $\approx 0.25\%$. Зауважимо, що у міру зростання ступеня податливості матеріалу до зсуву ця відмінність у значеннях розрахункових величин як для короткої, так і для нескінченно довгої оболонок поступово зростає і при $E/G' = 40$ та $E/G' = 60$ вказані співвідношення становлять для оболонки скінченної довжини відповідно 1.3 % та 1.5 % порівняно з 0.5 % і 0.7 % для нескінченно довгої оболонки.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – Т. 1. – Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. – Москва: Наука, 1969. – 343 с.
2. Болотин В. В. Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла // Прикл. математика и механика. – 1960. – 24, № 2. – С. 361–363.
Te same: Bolotin V. V. Equations for the non-stationary temperature fields in thin shells in the presence of sources of heat // J. Appl. Math. Mech. – 1960. – 24, No. 2. – P. 515–519.
3. Ганулич В. К., Максимук О. В., Ганулич Н. В. Квазистатична задача термопружності для циліндричної оболонки із джерелами тепла і тепловіддачею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 1. – С. 154–161.
Te same: Hanulich V. K., Maksymuk O. V., Hanulich N. V. Quasistatic problem of thermoelasticity for a cylindrical shell with heat sources and heat exchange // J. Math. Sci. – 2017. – 222, No. 2. – P. 194–204.
4. Максимук А. В., Щербина Н. Н., Ганулич Н. В. Проектирование, расчет и оптимизация сотовых труб из полимерных материалов // Механика композит. материалов. – 2008. – 44, № 6. – С. 853–860.
Te same: Maksymuk A. V., Shcherbyna N. N., Ganulich N. V. Designing, calculation, and optimization of polymeric honeycomb pipes // Mech. Compos. Mater. – 2008. – 44, No. 6. – P. 601–606.
5. Максимук О. В., Ганулич Н. В. Термопружність циліндричної оболонки із низькою зсувною жорсткістю у локальному температурному полі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 3. – С. 26–34.
Te same: Maksymuk A. V., Hanulich N. V. Thermoelasticity of a cylindrical shell with low shear stiffness in a local temperature field // J. Math. Sci. – 2017. – 226, No. 1. – P. 28–40.
6. Марчук М. Нелінійне деформування і коливання податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення пластин і оболонок // Машинознавство. – 2005. – № 10 (100). – С. 9–14.
7. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
8. Тетерс Г. Многокритериальная оптимизация композитной цилиндрической оболочки при термических и динамических воздействиях // Механика композит. материалов. – 2004. – 40, № 6. – С. 753–760.
Te same: Teters G. Multicriteria optimization of a composite cylindrical shell subjected to thermal and dynamic actions // Mech. Compos. Mater. – 2004. – 40, No. 6. – P. 489–494.

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ С НИЗКОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Рассматривается квазистатическая задача термоупругости для цилиндрической оболочки конечной длины в переменном поле температур. Поверхность оболочки отдает тепло в окружающую среду постоянной температуры по закону Ньютона. Задача решена с учетом деформаций сдвига. Подробно исследовано асимптотическое состояние оболочки, при котором расчетные величины достигают максимальных уровней. Осуществлен сравнительный анализ термоупругого состояния оболочки конечной длины с аналогичным состоянием бесконечно длинной оболочки.

FINITE-LENGTH CYLINDRICAL SHELL WITH LOW SHEARING RIGIDITY DUE TO THE LOCAL HEAT SOURCES

The quasi-static thermoelasticity problem for a finite-length cylindrical shell in variable temperature field is considered. The shell surface exchanges heat with the surrounding medium of constant temperature due to Newton's law. The problem is solved taking into account shear deformations. Asymptotic state of the shell in which the calculated quantities reach their maximum values is considered in detail. Comparative analysis of thermo-elastic state of the finite-length shell with corresponding state of an infinite shell is carried out.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
07.07.16