

ВЗАЄМОДІЯ ГАРМОНІЧНОЇ ХВИЛІ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ З V-ПОДІБНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розв'язано задачу про визначення напруженого стану в околі тунельного жорсткого включення, що в перерізі складається з двох відрізків, які виходять з однієї точки. Включення розміщене в необмеженому пружному просторі, в якому поширюються плоскі гармонічні хвилі поздовжнього зсуву. Задачу зведено до розв'язання системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Для наближеного розв'язання цієї системи рівнянь застосовано числовий метод, у якому враховується справжня асимптотика невідомих функцій і використовуються спеціальні квадратурні формули для обчислення сингулярних інтегралів.

Вступ. На сьогоднішній час проблему визначення двовимірного динамічного напруженого стану в тілах з тонкими дефектами у вигляді відрізка прямої або дуги гладкої кривої можна вважати розв'язаною. Але, як відомо, реальні дефекти можуть бути кусково-гладкими, перетинатись і розгалужуватись. Задач про визначення напруженого стану в тілах з такими дефектами розв'язано значно менше, що пояснюється математичними труднощами при їх розв'язанні методом інтегральних рівнянь. Ці труднощі полягають у зведенні останніх до сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Найбільш дослідженими є задачі рівноваги тіл з тріщинами. Слід насамперед відмітити роботи [2, 18], де методом Вінера – Гопфа вдалось отримати точні розв'язки і точно визначити коефіцієнт інтенсивності напружень. Напружений стан навколо розгалужених, ламаних і крайових тріщин вивчали за допомогою числових методів автори робіт [6, 14, 17, 19]. Дослідження для тіл із включеннями у вигляді ламаної або розгалужених включень методом граничних інтегральних рівнянь здійснено в [3, 7]. Спільним для цих робіт є те, що при чисельному розв'язанні не враховується справжня асимптотика розв'язків, яка внаслідок наявності нерухомих особливостей стає відмінною від кореневої. Розв'язання аналогічних динамічних задач навіть для випадку гармонічних коливань практично відсутні. В [11, 13] досліджувалась взаємодія плоских гармонічних хвиль з двома тріщинами, що виходять з однієї точки, і з тріщиною у вигляді триланкової ламаної. Для розв'язання отриманих систем сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з нерухомими особливостями запропоновано числовий метод, що враховує справжні особливості розв'язків і ґрунтується на застосуванні для сингулярних інтегралів спеціальних квадратурних формул. Тут цей метод застосовано для розв'язання задачі про взаємодію хвиль поздовжнього зсуву з V-подібним в перерізі включенням.

1. Постановка задачі. Нехай ізотропне пружне тіло перебуває в умовах антиплоскої деформації і містить абсолютно жорстке тунельне включення V-подібної форми у перерізі. Ланки включення у площині xOy є відрізками $2d_k$ і утворюють з віссю Ox кути α_k , $k=1,2$ (рис. 1). У тілі поширюються гармонічні хвилі поздовжнього зсуву, що викликають такі переміщення уздовж осі Oz :

$$W_k^0(x, y) = A \exp i\alpha_2(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0),$$

де $\alpha_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}$; G і ρ – модуль зсуву та густина середовища, ω – частота

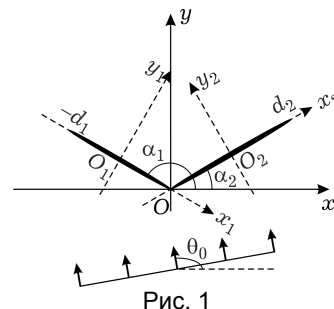


Рис. 1

коливань, θ_0 – кут між напрямом поширення хвилі та віссю Ox . Множник $\exp^{-i\omega t}$, яким визначається залежність від часу, тут і надалі пропускаємо.

Нехай $W(x, y)$ – єдина відмінна від нуля за антиплоскої деформації z -компонента вектора переміщень. У системі координат xOy вона повинна задовольняти рівняння Гельмгольца

$$\Delta W + \alpha_2^2 W = 0. \quad (1)$$

Для формулювання граничних умов на включенні з кожною із його ланок пов'язуємо систему координат $x_k O_k y_k$, $k = 1, 2$, так, що вісь $O_k x_k$ спрямована вздовж відповідної ланки, а центр O_k співпадає з серединою ланки. Тоді центри мають координати $x_{0k} = d_k \cos \alpha_k$, $y_{0k} = d_k \sin \alpha_k$, $k = 1, 2$, а зв'язок між системами координат виражається формулами

$$\begin{cases} x = a_k + x_k \cos \beta_k - y_k \sin \beta_k, \\ y = b_k + x_k \sin \beta_k + y_k \cos \beta_k, \end{cases} \quad \beta_1 = \pi + \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \quad \alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2, \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 = (a_1 - a_2) \cos \alpha_1 + (b_1 - b_2) \sin \alpha_1 - x_2 \cos \alpha_{12} - y_2 \sin \alpha_{12}, \\ y_1 = -(a_1 - a_2) \sin \alpha_1 + (b_1 - b_2) \cos \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_{12} - y_2 \sin \alpha_{12}, \end{cases} \quad (2')$$

$$\begin{cases} x_2 = (a_1 - a_2) \cos \alpha_2 + (b_1 - b_2) \sin \alpha_2 - x_1 \cos \alpha_{12} + y_1 \sin \alpha_{12}, \\ y_2 = -(a_1 - a_2) \sin \alpha_2 + (b_1 - b_2) \cos \alpha_2 - x_1 \cos \alpha_{12} - y_1 \sin \alpha_{12}. \end{cases}$$

Граничні умови з боку зовнішнього середовища на включенні, з огляду на його малу товщину h , записуємо відносно серединної площини. При повному зчепленні включення з пружним середовищем маємо рівність

$$W_k^1(x_k, 0) = c - W_k^0(x_k, 0), \quad W_k^0(x_k, 0) = A \exp(i\alpha_2 z_{0k}), \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

де

$$z_{0k} = a_k \cos \theta_0 + b_k \sin \theta_0 + (-1)^k (x_k \cos(\alpha_k - \theta_0) - y_k \sin(\alpha_k - \theta_0)).$$

На включенні зазнають розриву також і дотичні напруження, для стрибків яких введемо позначення

$$\tau_{zy_k}(x_k, +0) - \tau_{zy_k}(x_k, -0) = \chi_{1k}(x_k), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

де $\chi_{1k}(x_k)$ – невідомий стрибок дотичних напружень на k -й ланці включення.

Доданок c , який входить до першої із рівностей (3), – невідоме переміщення включення, зумовлене дією падаючої хвилі. Воно визначається з рівняння руху включення, яке у випадку гармонічних коливань має вигляд

$$-(m_1 + m_2)\omega^2 c = \sum_{k=1}^2 \int_{-d_k}^{d_k} \chi_{1k}(\eta) d\eta, \quad (5)$$

m_k – маса кожної із ланок включення, $k = 1, 2$.

2. Розв'язання задачі. Щоб розв'язати задачу (1)–(4), для ланки включення з номером ℓ , $\ell = 1, 2$, у системі координат $x_\ell O_\ell y_\ell$, пов'язаній з нею, побудуємо розривний розв'язок рівняння (1) зі стрибком (4) [9, 12]

$$W_{1\ell}^1(x_\ell, y_\ell) = \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \frac{\chi_{1\ell}(\eta)}{G} r_2(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta, \quad \ell = 1, 2, \quad (6)$$

де

$$r_2(\eta - x_\ell, y_\ell) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(x_0 \sqrt{(\eta - x_\ell)^2 + y_\ell^2}),$$

x_0 – хвильове число. Тоді переміщення розсіяного хвильового поля у системі координат xOy подамо у вигляді

$$W(x, y) = \sum_{\ell=1}^2 W_\ell^g(x, y), \quad (7)$$

де $W_\ell^g(x, y)$ отримуємо з (6) внаслідок перетворення координат за формулами (2) при $k = \ell$.

Щоб скористатись формулами (7), необхідно визначити невідомі стрибки напружень на ланках включення. Для цього застосуємо умови (3), попередньо замінивши їх двома еквівалентними рівностями:

$$\frac{\partial W_k^1(x_k, 0)}{\partial x_k} = -\frac{\partial W_k^0(x_k, 0)}{\partial x_k},$$

$$W_k^1(-d_k, 0) = c - W_k^0(-d_k, 0), \quad k = 1, 2. \quad (8)$$

Перша із рівностей (8) є результатом диференціювання (3), а друга – умовою еквівалентності продиференційованої і вихідної рівностей. Після перетворення координат за формулами (2') у рівності (7) і підстановки у (8) отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left(\frac{1}{\tau - \xi} - R_{11}(\tau - \xi) \right) d\tau - \\ & \quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) (q_{12}(\tau, \xi) - R_{12}(\tau, \xi)) d\tau = f_1(\xi), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) \left(\frac{1}{\tau - \xi} - R_{22}(\tau - \xi) \right) d\tau - \\ & \quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) (q_{21}(\tau, \xi) - R_{21}(\tau, \xi)) d\tau = f_2(\xi), \\ & \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=1}^2 \gamma_\ell \int_{-1}^1 \varphi_\ell(\tau) (\ln|\tau| + D_\ell(\tau)) d\tau = c_0 - A_0 \exp^{(-1)^\ell i x_0 r_{0\ell}}, \quad \ell = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

У системі (9) введено такі позначення:

$$\begin{aligned} f_k(\xi) &= -iA_0 x_0 \cos(\alpha_k - \theta_0) \exp(i x_0 r_{0k}(\xi)), \\ r_{0k}(\xi) &= \varepsilon_k \cos \theta_0 + \delta_k \sin \theta_0 + (-1)^k \gamma_k \xi \cos(\alpha_k - \theta_0), \quad k = 1, 2, \\ q_{k\ell}(\tau, \xi) &= \gamma_\ell (\gamma_\ell \tau_\ell \cos \alpha_{\ell k} + \gamma_k \xi_k) \frac{1}{s_{k\ell}^2(\tau, \xi)}, \\ s_{k\ell}^2(\tau, \xi) &= \gamma_\ell^2 \tau_\ell^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 \tau_\ell \xi_k \cos \alpha_{\ell k} + \gamma_k^2 \xi_k^2, \quad k, \ell = 1, 2, \quad \ell \neq k, \\ \tau_1 &= \tau - 1, \quad \tau_2 = \tau + 1, \quad \xi_1 = \xi - 1, \quad \xi_2 = \xi + 1, \\ \varphi_k(\tau) &= \frac{\chi_{1k}(d_k \tau)}{G}, \quad \eta = d_k \tau, \quad x_k = d_k \xi, \\ \gamma_k &= \frac{d_k}{d}, \quad \varepsilon_k = \frac{a_k}{d}, \quad \delta_k = \frac{b_k}{d}, \\ d &= \max(d_1, d_2), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

До системи (9) необхідно долучити рівність (5) для визначення невідомої амплітуди коливань включення, яка в позначеннях (10) має вигляд

$$c_0 = -\frac{1}{2\alpha_0^2 \bar{\rho} \varepsilon (\gamma_1 + \gamma_2)} \sum_{k=1}^2 \gamma_k \int_{-1}^1 \varphi_k(\tau) d\tau, \quad (11)$$

де $c_0 = \frac{c}{d}$, $\bar{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho}$, $\varepsilon = \frac{h}{d}$; ρ_1 і h – відповідно густина і товщина матеріалу включення.

3. Наближене розв'язання системи інтегральних рівнянь. Наявність у сингулярній складовій інтегральних рівнянь (9) нерухомої особливості при $\tau = -1$, $\xi = 1$ та $\tau = 1$, $\xi = -1$ впливає на поведінку її розв'язків в околах точок $\tau = \pm 1$. Особливість розв'язків в околах вказаних точок може бути визначена шляхом дослідження асимптотичних властивостей сингулярних інтегралів [8] або шляхом дослідження символу сингулярного ядра [4]. У результаті встановлено, що невідомі функції потрібно шукати у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= (1 + \tau)^{-1/2} (1 - \tau)^{-\delta} \psi_1(\tau), \\ \varphi_2(\tau) &= (1 + \tau)^{-\delta} (1 - \tau)^{-1/2} \psi_2(\tau), \end{aligned} \quad (12)$$

де степеневий показник визначається рівністю

$$\delta = \begin{cases} (\pi - 2\alpha) / (2\pi - 2\alpha), & 0 < \alpha \leq \pi / 2, \\ 2\alpha - \pi / (2\alpha), & \pi / 2 < \alpha < \pi, \end{cases} \quad \alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Якщо тепер розглянути функції

$$\psi_k(\tau) = \psi_{0k}(\tau) + \frac{\psi_k(1)}{2} (1 + \tau) + \frac{\psi_k(-1)}{2} (1 - \tau), \quad (13)$$

то можемо переконатись, що $\psi_{0k}(\pm 1) = 0$. Ввівши нові невідомі функції $g_k(\tau)$, які задовольняють умови Гельдера при $\tau \in (-1, 1)$, отримаємо

$$\psi_{0k}(\tau) = (1 - \tau)^2 g_k(\tau), \quad k = 1, 2, \quad (14)$$

Підстановка (13), (14) у (12) приводить до такого подання невідомих функцій:

$$\begin{aligned} \varphi_k(\tau) &= (1 - \tau)^{\sigma_k} (1 + \tau)^{\lambda_k} g_k(\tau) + (1 + \tau)^{\lambda_k} (1 - \tau)^{\sigma_k - 1} \frac{\psi_k(1)}{2} + \\ &+ (1 + \tau)^{\lambda_k - 1} (1 - \tau)^{\sigma_k} \frac{\psi_k(-1)}{2}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $\sigma_1 = \lambda_2 = 1 - \delta$, $\sigma_2 = \lambda_1 = 1/2$.

Далі наближений метод розв'язання ґрунтується на апроксимації функцій $g_k(\tau)$ інтерполяційним многочленом $(n - 1)$ -го степеня

$$g_k(\tau) \approx g_{k,n-1}(\tau) = \sum_{m=1}^n g_{mk} \frac{Q_{nk}(\tau)}{(\tau - \tau_{mk}) Q'_{nk}(\tau_{mk})}, \quad (16)$$

де $g_{mk} = g_k(\tau_{mk})$, $Q_{n1}(\tau) = P_n^{1-\delta, 1/2}(\tau)$, $Q_{n2}(\tau) = P_n^{1/2, 1-\delta}(\tau)$ – многочлени Якобі, τ_{m1} , τ_{m2} – корені цих многочленів. Тоді для інтегралів з ядром Коші справджуються квадратурні формули [1]

$$\int_{-1}^1 \frac{(1 - \tau)^{\sigma_k} (1 + \tau)^{\lambda_k} g_k(\tau)}{\tau - \xi_{jk}} d\tau = \sum_{m=1}^n g_{mk} \frac{A_{mk}}{\tau_{mk} - \xi_{jk}}, \quad (17)$$

де ξ_{j1} , ξ_{j2} , $j = 1, 2, \dots, n + 1$, – корені функцій Якобі другого роду $J_n^{1/2, 1-\delta}(\xi)$, $J_n^{1-\delta, 1/2}(\xi)$; A_{mk} – коефіцієнти відповідної квадратурної формули Гаусса – Якобі [5]:

$$A_{mk} = \frac{2^{5/2-\delta} \Gamma(3/2+n) \Gamma(2+n-\delta)}{n! \Gamma(5/2+n-\delta) (1-\tau_{mk}^2) (Q'_{nk}(\tau_{mk}))^2}$$

Формула (16) дає можливість застосувати для розв'язання (9) метод колокації з використанням $(n+1)$ -го коренів функцій Якобі другого роду як вузлів. Але спершу потрібно вивести квадратурні формули для інших сингулярних інтегралів.

Для використання (15) необхідно обчислити інтеграли

$$b_{jk}^+ = \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau)^{\sigma_k} (1+\tau)^{\lambda_k-1}}{\tau - \xi_{jk}} d\tau, \quad b_{jk}^- = \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau)^{\sigma_k-1} (1+\tau)^{\lambda_k}}{\tau - \xi_{jk}} d\tau$$

з ядром Коші. Їх знаходимо методом [16], що ґрунтується на застосуванні згортки Мелліна. Використання теореми про згортку дає можливість подати ці інтеграли у вигляді суми лишків у полюсах, звідки знаходимо

$$b_{jk}^- = \begin{cases} B_k^+((1-\xi_{jk})/2), & 0 \leq \xi_{jk} < 1, \\ B_k^-((1+\xi_{jk})/2), & -1 < \xi_{jk} < 0, \end{cases}$$

$$b_{jk}^+ = \begin{cases} C_k^+((1-\xi_{jk})/2), & 0 \leq \xi_{jk} < 1, \\ C_k^-((1+\xi_{jk})/2), & -1 < \xi_{jk} < 0, \end{cases} \quad (18)$$

де

$$B_1^+(y) = -2^{1/2-\delta} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{ctg}(\pi\delta) \left(y^{1-\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2+k)}{k!} y^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-1/2+k+\delta)}{\Gamma(k+\delta)} y^k \right) = C_2^-(y),$$

$$B_1^-(y) = 2^{1/2-\delta} \Gamma(2-\delta) \cos(\pi\delta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-1/2+k+\delta)}{\Gamma(3/2+k)} y^k = C_2^+(y),$$

$$C_1^+(y) = 2^{1/2-\delta} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \operatorname{ctg}(\pi\delta) \left(y^{-\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-1/2+k)}{k!} y^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-1/2+k+\delta)}{\Gamma(1+k+\delta)} y^k \right) = B_2^-(y),$$

$$C_1^-(y) = -2^{1/2-\delta} \Gamma(1-\delta) \cos(\pi\delta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-1/2+k+\delta)}{\Gamma(1/2+k)} y^k = B_2^+(y).$$

З (17), (18) випливають остаточні формули для інтегралів з ядром Коші:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(\tau)}{\tau - \xi_{jk}} d\tau = \sum_{m=1}^n g_{mk} \frac{A_{mk}}{\tau_{mk} - \xi_{jk}} + \frac{\Psi_k(-1)}{2} b_{jk}^- + \frac{\Psi_k(1)}{2} b_{jk}^+. \quad (19)$$

Тепер обчислимо інтеграли з нерухомою особливістю

$$E_{k\ell}^j = \int_{-1}^1 q_{k\ell}(\tau, \xi_{jk}) (1-\tau)^{\sigma_\ell} (1+\tau)^{\lambda_\ell} g_\ell(\tau) d\tau, \quad \ell \neq k = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, n+1. \quad (20)$$

Нехай r_1 – деяке число, $0 < r_1 < 1$. У випадку $r_1 < \xi_k \pm 1$ інтеграли (20) не є сингулярними і можуть бути обчислені за допомогою квадратурних формул Гаусса – Якобі з відповідною ваговою функцією [5]. Якщо ж

$\xi_k \pm 1 \rightarrow 0$, то $g_k(\tau)$ слід замінити інтерполяційними многочленами (15) і користатися рівностями

$$\begin{aligned} q_{k\ell}(\tau_{m\ell}, \xi_{jk}) &= \frac{q_{k\ell}(\tau_{m\ell}, \xi_{jk})}{\tau - \tau_{m\ell}} - \frac{\gamma_\ell^2(\tau_{m\ell} + (-1)^\ell)}{s_{k\ell}(\tau_{m\ell}, \xi_{jk})} q_{k\ell}(\tau, \xi_{jk}) - \\ &\quad - \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\xi_{jk} + (-1)^k)}{s_{k\ell}(\tau_{m\ell}, \xi_{jk})} q_{k\ell}(\xi_{jk}, \tau), \\ m &= 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n+1, \quad \ell \neq k = 1, 2. \end{aligned}$$

Внаслідок цього інтеграли (20) набувають вигляду

$$\begin{aligned} E_{k\ell}^j &= \sum_{m=1}^n \frac{g_{m\ell} \gamma_\ell}{Q'_{n\ell}(\tau_{m\ell}) s_{k\ell}^2(\tau_{m\ell}, \xi_{jk})} \times \\ &\quad \times \left[(\gamma_\ell(\tau_{m\ell} + (-1)^\ell) \cos \alpha_{k\ell} + \gamma_k(\xi_{jk} + (-1)^k)) h_{m\ell}^1 - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_\ell^2(\tau_{m\ell} + (-1)^\ell) h_{j\ell}^2 - \gamma_\ell \gamma_k (\xi_{jk} + (-1)^k) h_{j\ell}^3 \right], \end{aligned} \quad (21)$$

де позначено

$$\begin{aligned} h_{m\ell}^1 &= \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau)^{\sigma_\ell} (1+\tau)^{\lambda_\ell}}{\tau - \tau_{m\ell}} Q_{n\ell}(\tau) d\tau, \\ h_{j\ell}^2 &= \int_{-1}^1 (1-\tau)^{\sigma_\ell} (1+\tau)^{\lambda_\ell} q_{k\ell}(\tau, \xi_{jk}) Q_{n\ell}(\tau) d\tau, \\ h_{j\ell}^3 &= \int_{-1}^1 (1-\tau)^{\sigma_\ell} (1+\tau)^{\lambda_\ell} q_{k\ell}(\xi_{jk}, \tau) Q_{n\ell}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Інтеграли $h_{m\ell}^1$ запишемо через функцію Якобі другого роду [15]:

$$h_{m\ell}^1 = J_n^{\sigma_\ell, \lambda_\ell}(\tau_{m\ell}) = A_{m1} Q_{n\ell}^\ell(\tau_{\ell m}). \quad (22)$$

Інші інтеграли, що входять в (21), за допомогою методу, який ґрунтується на застосуванні інтегрального перетворення Мелліна [10], подаємо збіжними при $0 \leq 1 \pm \xi_k < r_1 < 1$ степеневими рядами:

$$\begin{aligned} h_{j\ell}^2 &= \frac{(-1)^n \Gamma(3/2 + n)}{\gamma_\ell} a_{k\ell} \left(\frac{1 + (-1)^k \xi_{jk}}{2\beta_{k\ell}} \right), \\ h_{j\ell}^3 &= \frac{(-1)^n \Gamma(3/2 + n)}{\gamma_\ell} b_{k\ell} \left(\frac{1 + (-1)^k \xi_{jk}}{2\beta_{k\ell}} \right), \quad \beta_{k\ell} = \frac{\gamma_\ell}{\gamma_k}, \end{aligned} \quad (23)$$

де позначено

$$\begin{aligned} a_{k\ell}(y) &= \frac{2^{3/2-\delta}}{n!} \left(\frac{y^{1-\delta}}{\sin(\pi\delta)} \sum_{p=0}^{\infty} z_{1p} y^p \cos((\pi - \alpha_{k\ell})(\delta - p - 2)) - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{ctg}(\pi\delta) \sum_{p=0}^{\infty} z_{2p} y^p \cos(\alpha_{k\ell}(p+1)) \right), \\ b_{k\ell}(y) &= \frac{2^{3/2-\delta}}{n!} \left(\frac{y^{1-\delta}}{\sin(\pi\delta)} \sum_{p=0}^{\infty} z_{1p} y^p \cos((\pi - \alpha_{k\ell})(\delta - p - 1)) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ctg}(\pi\delta) \sum_{p=0}^{\infty} z_{2p} \cos(\alpha_{k\ell} p) \right), \end{aligned}$$

$$z_{1p} = \frac{(-1)^p \Gamma(-1/2 - n + p) \Gamma(2 + n + p - \delta)}{p! \Gamma(2 + p - \delta)},$$

$$z_{2p} = \frac{\Gamma(-3/2 - n + \delta + p) \Gamma(1 + n + p)}{p! \Gamma(\delta + p)}.$$

У результаті врахування (21)–(23) отримуємо такі формули для обчислення інтегралів (20):

$$E_{k\ell}^j = \sum_{m=1}^n g_{m\ell} \frac{H_m^{k\ell}}{s_{k\ell}^2(\tau_{m\ell}, \xi_{jk})},$$

$$H_m^{k\ell} = A_{m\ell} (\gamma_\ell(\tau_{m\ell} + (-1)^\ell) \cos \alpha_{k\ell} + \gamma_k(\xi_{jk} + (-1)^k)),$$

$$1 + (-1)^k \xi_{jk} > r_1 > 0,$$

$$H_m^{k\ell} = A_{m\ell} (\gamma_\ell(\tau_{m\ell} + (-1)^\ell) \cos \alpha_{k\ell} + \gamma_k(\xi_{jk} + (-1)^k)) -$$

$$- \frac{\gamma_\ell^2(\tau_{m\ell} + (-1)^\ell)}{Q'_n(\tau_{m\ell})} h_{j\ell}^2 - \frac{\gamma_\ell \gamma_k(\xi_{jk} + (-1)^k)}{Q'_n(\tau_{m\ell})} h_{j\ell}^3,$$

$$(-1)^k + \xi_{jk} < r_1. \quad (24)$$

Аналогічно обчислюємо інтеграли

$$s_{jk\ell}^+ = \int_{-1}^1 q_{k\ell}(\tau, \xi_{jk}) (1 - \tau)^{\sigma_\ell - 1} (1 + \tau)^{\lambda_\ell} d\tau,$$

$$s_{jk\ell}^- = \int_{-1}^1 q_{k\ell}(\tau, \xi_{jk}) (1 - \tau)^{\sigma_\ell} (1 + \tau)^{\lambda_\ell - 1} d\tau.$$

Для них маємо

$$s_{jk\ell}^\pm = \begin{cases} \sum_{m=1}^n A_{m\ell}^\pm q_{k\ell}(\tau_{m\ell}^\pm, \xi_{jk}), & 1 - (-1)^k \xi_{jk} \geq r_1 > 0, \\ (-1)^k c_{k\ell}^\pm((1 - (-1)^k \xi_{jk})/2), & 0 < 1 - (-1)^k \xi_{jk} < r_1, \end{cases} \quad (25)$$

$$A_{m\ell}^+ = A_m^{\sigma_\ell - 1, \lambda_\ell}, \quad A_{m\ell}^- = A_m^{\sigma_\ell, \lambda_\ell - 1},$$

$$P_n^{\sigma_\ell - 1, \lambda_\ell}(\tau_{m\ell}^+) = 0, \quad P_n^{\sigma_\ell, \lambda_\ell - 1}(\tau_{m\ell}^-) = 0.$$

Функції $c_{k\ell}^\pm(y)$ подаємо рядами:

$$c_{k\ell}^\pm(y) = 2^{1/2 - \delta} \Gamma\left(\frac{2 \mp 1}{2}\right) \left[\frac{y^{-\delta}}{\sin(\pi\delta)} \sum_{p=0}^{\infty} B_{1p}^\pm y^p \cos((\pi - \alpha_{k\ell})(1 + p - \delta)) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{ctg}(\pi\delta) \sum_{p=0}^{\infty} B_{2p}^\pm y^p \cos(\alpha_{k\ell}(p + 1)) \right],$$

$$B_{1p}^\pm = \frac{(-1)^p \Gamma(\mp 1/2 + p)}{p!}, \quad B_{2p}^+ = B_{2p}^- = \frac{\Gamma(-1/2 + \delta + p)}{\Gamma(1 + \delta + p)}.$$

Згідно з (24), (25) формула для обчислення інтеграла з нерухомою особливістю має вигляд

$$\int_{-1}^1 q_{k\ell}(\tau, \xi_{jk}) \varphi_\ell(\tau) d\tau = \sum_{m=1}^n g_{m1} \frac{H_m^{k\ell}}{s_{k\ell}^2(\tau_{m\ell}, \xi_{jk})} +$$

$$+ \frac{\Psi_\ell(1)}{2} s_{jk\ell}^+ + \frac{\Psi_\ell(-1)}{2} s_{jk\ell}^-. \quad (26)$$

Для інтегралів з логарифмічною функцією невідомі функції $g_1(\tau)$, $g_2(\tau)$ наближаємо інтерполяційними многочленами (16), які попередньо перетворюємо за тотожністю Дарбу – Кристофеля [15]. Тоді отримаємо

$$\int_{-1}^1 \ln |\tau + (-1)^\ell| (1 - \tau)^{\sigma_\ell} (1 + \tau)^{\lambda_\ell} g_\ell(\tau) d\tau = \sum_{m=1}^n A_{m\ell} g_{m\ell} \theta_{m\ell}, \quad (27)$$

де

$$\theta_{m\ell} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{u_{s1}}{\sigma_s^2} Q_{s\ell}(\tau_{m\ell}),$$

$$u_{s\ell} = \int_{-1}^1 (1 - \tau)^{\sigma_\ell} (1 + \tau)^{\lambda_\ell} Q_{s\ell}(\tau) \ln |\tau + (-1)^\ell| d\tau.$$

Інтеграли $u_{s\ell}$ також обчислюємо методом ортогональних многочленів [10] і остаточно для них маємо

$$u_0 = \frac{2^{5/2-\delta} \Gamma(3/2) \Gamma(2-\delta)}{\Gamma(7/2-\delta)} [\ln 2 + \Psi(2-\delta) - \Psi(7/2-\delta)],$$

$$u_{s1} = -a_s, \quad u_{s2} = (-1)^{s+1} a_s, \quad a_s = \frac{2^{5/2-\delta} \Gamma(3/2+s) \Gamma(2-\delta)}{\Gamma(7/2-\delta+s) s!}.$$

Тут $\Psi(x)$ – логарифмічна похідна Γ -функції.

Аналогічно знаходимо інтеграли

$$E_\ell^+ = \int_{-1}^1 \ln |\tau + (-1)^\ell| (1 - \tau)^{\sigma_\ell - 1} (1 + \tau)^{\lambda_\ell} d\tau,$$

$$E_\ell^- = \int_{-1}^1 \ln |\tau + (-1)^\ell| (1 - \tau)^{\sigma_\ell} (1 + \tau)^{\lambda_\ell - 1} d\tau,$$

$$E_1^\pm = 2^{1/2-\delta} \Gamma((2 \pm 1)/2) \Gamma((3 \mp 1)/2 - \delta) / \Gamma(5/2 - \delta) \times \\ \times [\ln 2 + \Psi((3 \mp 1)/2 - \delta) - \Psi(5/2 - \delta)], \quad E_2^\mp = E_1^\pm. \quad (28)$$

Згідно з (27), (28) остаточні формули для інтегралів з логарифмічною функцією мають вигляд

$$\int_{-1}^1 \varphi_\ell(\tau) \ln |\tau + (-1)^\ell| d\tau = \sum_{m=1}^n A_{m\ell} g_{m\ell} \theta_{m\ell} + \frac{\Psi_\ell(1)}{2} E_\ell^- + \frac{\Psi_\ell(-1)}{2} E_\ell^+. \quad (29)$$

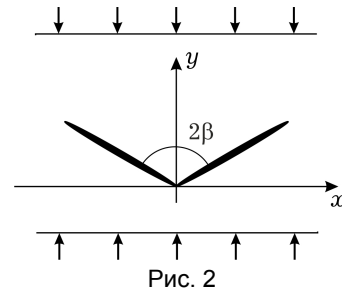
Знайдені формули для сингулярних інтегралів (19), (26), (29), а також квадратурні формули Гаусса – Якобі, що застосовуються до інтегралів з регулярними ядрами, дають можливість замінити (9) системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

У результаті розв'язання цієї системи знаходимо $g_{m1} = g(\tau_{m1})$, $g_{m2} = g(\tau_{m2})$, $\psi_1(\pm 1)$, $\psi_2(\pm 1)$, c_0 . Після цього наближений розв'язок системи (9) визначаємо за формулами (11), (15).

Однією з важливих характеристик напруженого стану навколо включення є коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). Він визначається з відомого асимптотичного подання [19] напружень в околі кінців включення. З урахуванням (10), (15) після обчислення границь отримуємо прості формули для безпосереднього визначення КІН:

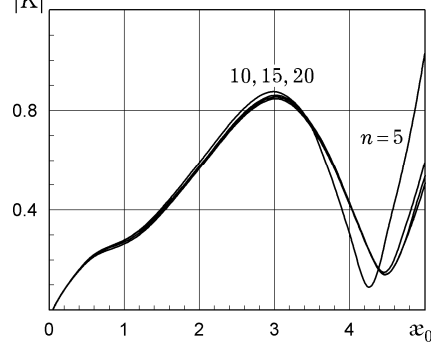
$$K_1 = G \sqrt{d_1} \frac{\psi_1(-1)}{2^\delta}, \quad K_2 = G \sqrt{d_2} \frac{\psi_2(1)}{2^\delta}.$$

4. Результати числового аналізу та обговорення. На основі отриманих формул побудовано графіки залежності КІН та амплітуди коливань включення від безрозмірного хвильового числа $x_0 = x_2 d$. Для цього розглянуто включення з ланками однакової довжини d , що виходять з початку координат симетрично відносно осі Oy і утворюють між собою кут 2β (див. рис. 2). Внаслідок симетрії маємо $K_1 = K_2 = K$.



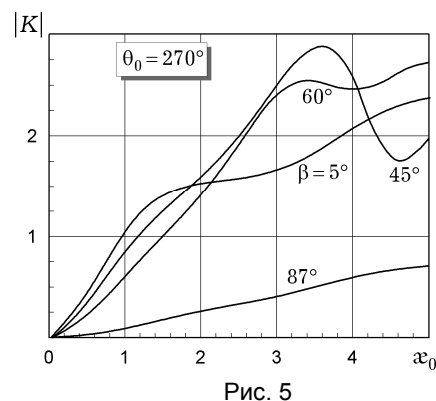
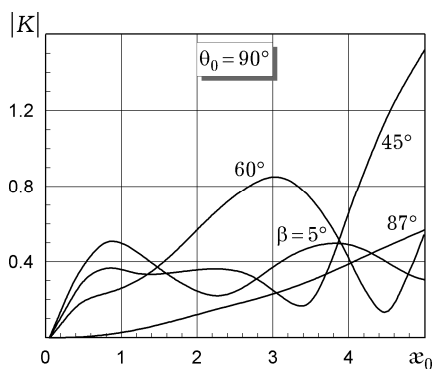
У першу чергу, було досліджено практичну збіжність запропонованого методу числового розв'язання інтегральних рівнянь. Результати наведено у вигляді графіків залежності КІН від хвильового числа на рис. 3, де криві обчислено для значень числа вузлів інтерполяції $n = 5, 10, 15, 20$. Розрахунки виконано при $\theta_0 = 90^\circ$ і $\beta = 60^\circ$.

Бачимо, що для отримання КІН з похибкою, меншою ніж 1%, у розглянутому частотному діапазоні вистачає 20 вузлів інтерполяції, а для частот $x_0 < 3$ достатньо 10 вузлів у формулі (16).



Досліджено також вплив на частотну залежність КІН і амплітуду коливань включення $|c_0|$ його форми, а саме величини кута 2β між його ланками. Криві на рис. 4–7 обчислено при значеннях $\beta = 5, 45, 60, 87^\circ$. Графіки на рис. 4 і рис. 6 побудовано для випадку поширення у середовищі падаючої хвилі під кутом $\theta_0 = 90^\circ$, а на рис. 5 і рис. 7 – $\theta_0 = 270^\circ$.

На рис. 4, 5 показано вплив кута β між ланками включення на абсолютну величину КІН. Як бачимо, значення $|K|$ зростають зі збільшенням x_0 , причому на величину КІН істотно впливає кут θ_0 поширення падаючої хвилі. Також бачимо на рис. 4 і 5, що при зменшенні значення кута β між ланками включення ускладнюється залежність КІН від хвильового числа x_0 , що проявляється у наявності точок максимуму і мінімуму. Найменші значення КІН спостерігаються для прямолінійного включення, $\beta \approx 90^\circ$.



Результати аналогічних досліджень абсолютної величини амплітуди коливань включення $|c_0|$ показано на рис. 6 і рис. 7. Вони свідчать, що кут β між ланками включення також суттєво впливає на залежність амплітуди коливання включення від хвильового числа. При $\beta < 90^\circ$ спостерігається наявність частоти, при якій амплітуда сягає максимуму. При $\beta \approx 90^\circ$ (у випадку прямолінійного включення) бачимо спадання амплітуди при збільшенні хвильового числа, що збігається з результатами робіт [12].

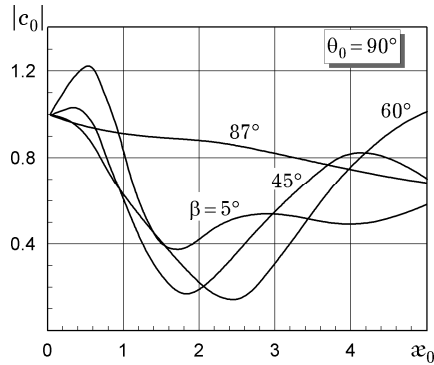


Рис. 6

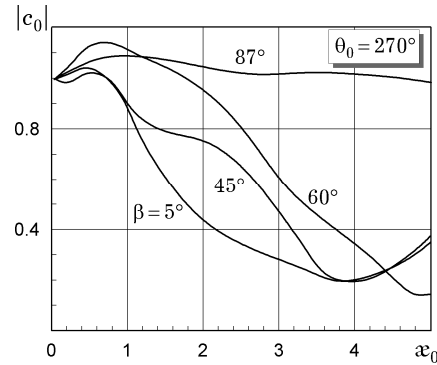


Рис. 7

Висновки. Чисельно розв'язано задачу про напружено-деформований стан в околі V-подібного тонкого жорсткого включення при гармонічних коливаннях поздовжнього зсуву. Це розв'язання ґрунтується на наближеному методі побудови розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь з нерухожими особливостями. Врахування реальної особливості розв'язків і застосування до сингулярних інтегралів спеціальних квадратурних формул забезпечують швидку збіжність і стабільні числові результати в досить широкому частотному діапазоні. Отримані в результаті наближені формули для обчислення КІН і амплітуди коливань включення дали можливість дослідити вплив на їх значення частоти коливань і форми включення і встановити ряд якісних ефектів. Зокрема, показано наявність частот, при яких значення КІН і амплітуда коливання включення сягають максимуму.

1. Андреев А. В. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 1. – С. 126–146.
Te same: Andreev A. V. Direct numerical method for solving singular integral equations of the first kind with generalized kernels // Mech. Solids. – 2005. – 40, No. 1. – P. 104–119.
2. Афян Б. А. Об интегральных уравнениях с неподвижными особенностями в теории ветвящихся трещин // Докл. АН АрмССР. – 1984. – 79, № 4. – С. 177–181.
3. Васильев К. В., Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пастернак Р. М. Поздовжній зсув безмежного тіла з тонким дволанковим пружним включенням // Вісн. Дон. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2010. – № 2. – С. 55–63.
4. Дудучава Р. В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Тр. Тбилис. мат. ин-та им. А. М. Размадзе АН ГрузССР. – 1979. – 60. – 135 с.
5. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – Москва: Наука, 1967. – 500 с.
6. Осив П. Н., Саврук М. П. Определение напряжений в бесконечной пластине с ломаной или ветвящейся трещиной // Прикл. механика и техн. физика. – 1983. – № 2. – С. 142–147.
Te same: Osiv P. N., Savruk M. P. Determination of stresses in an infinite plate with broken or branching crack // J. Appl. Mech. Techn. Phys. – 1983. – 24, No. 2. – P. 266–271.

7. Пастернак Я., Сулим Г. Плоская задача теории упругости анизотропного тела с тонкими гиллястими пружными включениями // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2011. – **16**, № 4. – С. 23–31.
8. Попов В. Г. Дифракция упругих волн сдвига на включениях сложной формы, расположенном в неограниченной упругой среде // Гидроаэромеханика и теория упругости: Численные и аналитические методы решения задач гидроаэродинамики и теории упругости. – Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т, 1986. – С. 121–127.
9. Попов В. Г. Исследование полей напряжений и перемещений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении // Изв. РАН Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 139–146.
10. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 342 с.
11. Попов В. Г. Напружений стан навколо двох тріщин, що виходять з однієї точки при гармонічних коливаннях поздовжнього зсуву // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 205–208.
12. Попов В. Г. Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жесткое включение // Динам. системы. – 1993. – Вып. 12. – С. 35–41.
13. Попов В. Г. Трещина у вигляді триланкової ламаної під дією хвилі поздовжнього зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 1. – С. 112–120.
The same: Popov V. G. A crack in the form of a three-link broken line under the action of longitudinal shear waves // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, No. 2. – P. 143–154.
14. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка. 1981. – 324 с.
15. Сёге Г. Ортогональные многочлены. – Москва: Физматгиз, 1962. – 500 с.
16. Сулим Г. Основы математической теории термоупругой равновесии деформированных твердых тел с тонкими включениями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
17. Isida M., Noguchi H. Stress intensity factors at tips of branched cracks under various loadings // Int. J. Fract. – 1992. – **54**, No. 4. – P. 293–316.
18. Vitek V. Plane strain stress intensity factors for branched cracks // Int. J. Fract. – 1977. – **13**, No. 4. – P. 481–501.
19. Yan X. Stress intensity factors for asymmetric branched cracks in plane extension by using crack-tip displacement discontinuity elements // Mech. Res. Commun. – 2005. – **32**, No. 4. – P. 375–384.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА С V-ОБРАЗНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Решена задача об определении напряженного состояния в окрестности туннельного жесткого включения, которое в сечении состоит из двух отрезков, выходящих из одной точки. Это включение находится в неограниченном упругом пространстве, в котором распространяются плоские гармонические волны продольного сдвига. Задача сведена к решению системы двух сингулярных интегральных уравнений с неподвижными особенностями. Для приближенного решения этой системы применен числовой метод, учитывающий действительную асимптотику неизвестных функций и использующий специальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов.

INTERACTION OF HARMONIC LONGITUDINAL SHEAR WAVE WITH A V-SHAPED INCLUSION

A problem on the determination of stress state in the vicinity of a tunnel rigid inclusion is solved when the cross-section of the inclusion consists of two segments emanating from one point. The inclusion is located in an infinite elastic medium with propagating plane harmonic longitudinal shear waves. The problem is reduced to solving a system of two singular integral equations with fixed singularities. For the approximate solution of this system, a numerical method is applied. This method takes into account the true asymptotic of unknown functions and makes use of special quadrature formulas for singular integrals.

Одеська нац. морська акад., Одеса

Одержано
01.02.17