УДК 517.95

П. І. Каленюк, І. І. Волянська, В. С. Ільків, З. М. Нитребич

ПРО ОДНОЗНАЧНУ РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ТРИТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ У ДВОВИМІРНІЙ ОБЛАСТІ

Досліджено задачу з триточковими умовами за часовою змінною для однорідного диференціального рівняння із частинними похідними у плоскій області. Показано коректність за Адамаром задачі, що відрізняє її від умовно коректної задачі з багатьма просторовими змінними, розв'язність якої пов'язана з проблемою малих знаменників. Доведено теорему єдиності та встановлено умови існування розв'язку задачі зі значеннями у просторах періодичних функцій з експоненційною зміною коефіцієнтів Фур'є.

Вступ. У статті досліджено задачу з триточковими умовами за часовою змінною t для безтипного диференціального рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами у двовимірному циліндрі.

Дослідження задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для рівнянь з частинними похідними почалося порівняно недавно, оскільки такі задачі є умовно коректними, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників. Систематичне вивчення таких задач, вперше сформульованих (1963 р.) проф. В. Я. Скоробогатьком, належить Б. Й. Пташнику та його учням [12]. Зокрема, у роботах [1, 7, 11–16, 21, 22, 30] на основі метричного підходу встановлено однозначну розв'язність задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною, а також додатковими умовами (періодичності чи майже періодичності, умовами зростання розв'язку на безмежності) за рештою координат у різних функціональних просторах.

Також задачі з багатоточковими умовами досліджуються і в необмежених за просторовою координатою областях. Зокрема, у роботах [4–6, 9, 25, 27, 28] за допомогою диференціально-символьного методу відокремлення змінних встановлено класи єдиності багатоточкових задач для диференціально-операторних рівнянь у безмежному шарі.

За допомогою метричного підходу в обмежених областях та диференціально-символьного методу в необмежених областях встановлено розв'язність задач для рівнянь із частинними похідними (скінченного та нескінченного порядків) з нелокальними, інтегральними умовами, умовами Діріхле, Неймана тощо.

При дослідженні динамічних систем, які, зокрема, описують дифузію газу, виникають багатоточкові нелокальні умови, що моделюють взаємозалежність станів системи [18, 20, 23, 26]. В інших динамічних процесах (популяційних моделях, поширенні тепла) та в обернених задачах математичної фізики використовують [19, 24, 29, 31] нелокальні умови на відрізку (інтегральні умови).

Ця стаття доповнює дослідження роботи [2], у якій описаний випадок, коли багатоточкові умови фіксують стан процесу через однакові часові проміжки. Особливістю цієї роботи є дослідження умов розв'язності триточкової задачі з нерівновідддаленими часовими вузлами. Характерними для задачі є одна просторова змінна та відсутність при цьому проблеми малих знаменників, як і у задачі з роботи [2]. Отже, серед багатоточкових задач виділено триточкові коректно поставлені за Адамаром задачі.

1. Постановка задачі. Позначимо область $D = [0,T] \times \Omega$, де $T > 0$, Ω – одновимірний тор, $\Omega = \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$, та операції диференціювання $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$.

Нехай $\mathbf{W}$ – лінійний простір скінченних сум (основних функцій) $P(x) = \sum_k P_k e^{ikx}$, заданих на Ω, де P_k – комплексні коефіцієнти, а k

пробігає скінченну множину цілих чисел.

Простір $\mathbf{W}'$ спряжений до простору $\mathbf{W}$; це простір узагальнених функцій, які є формальними рядами $Q(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k e^{ikx}$, що діють на основну функцію $P \in \mathbf{W}$ за правилом $\langle Q, P\rangle = \sum_k Q_k \bar{P}_k$, де $\bar{P}_k$ – комплексно-спряжене число до числа P_k.

Для дійсного числа α і функції $\beta : [0,T] \to \mathbb{R}$ введемо шкали просторів $\{\mathbf{E}_\alpha^q(\Omega)\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{E}_\beta^{3,q}(\Omega)\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $\mathbf{E}_\alpha^q(\Omega)$ – гільбертів простір періодичних функцій $\psi = \psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k e^{ikx}$ з нормою

$$\|\psi\|^2_{\mathbf{E}_\alpha^q(\Omega)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{k}^{2q} e^{2\tilde{k}\alpha} |\psi_k|^2, \qquad \tilde{k} = \sqrt{1+k^2},$$

а $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(D)$ – банахів простір функцій $u = u(t,x)$ таких, що похідні $\partial_t^\ell u(t,\cdot)$, які визначені формулою $\partial_t^\ell u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k^\ell(t) e^{ikx}$, $\ell = 0,1,2,3$, для кожного $t \in [0,T]$ належать до просторів $\mathbf{E}_{\beta(t)}^{q-1}(\Omega)$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми функції u у просторі $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(D)$ обчислюється за формулою

$$\|u\|^2_{\mathbf{E}_\beta^{3,q}(D)} = \sum_{\ell=0}^{3} \max_{[0,T]} \left\|\partial_t^\ell(t,\cdot)\right\|^2_{\mathbf{E}_{\beta(t)}^{q-\ell}(\Omega)}.$$

В області D розглянуто задачу з триточковими умовами:

$$Lu = \partial_t^3 u + \sum_{j=0}^{1} a_{2j}\partial_x^j \partial_t^2 u + \sum_{j=0}^{2} a_{1j}\partial_x^j \partial_t u + \sum_{j=0}^{3} a_{0j}\partial_x^j u = 0, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad u(\tau,x) = \varphi_2(x), \quad u(T,x) = \varphi_3(x), \tag{2}$$

де $\mathbf{a} = (a_{21}, a_{12}, a_{03}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{10}, a_{01}, a_{00}) \in \mathbb{C}$, $\varphi_1 = \varphi_1(x), \varphi_2 = \varphi_2(x), \varphi_3 = \varphi_3(x)$ – задані функції, $u = u(t,x)$ – шукана функція.

Вигляд областей D та Ω накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функцію u та функції φ_1, φ_2, φ_3, тому з означення просторів $\mathbf{E}_\alpha^q(\Omega)$ і $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(D)$ для довільної функції $u \in \mathbf{E}_\beta^{3,q}(D)$ випливає, що

$$Lu \in \mathbf{E}_\beta^{0,q-3}(D), \ \ u(0,\cdot) \in \mathbf{E}_{\beta(0)}^q(\Omega), \ \ u(\tau,\cdot) \in \mathbf{E}_{\beta(\tau)}^q(\Omega), \ \ u(T,\cdot) \in \mathbf{E}_{\beta(T)}^q(\Omega).$$

Означення. Під розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти функцію $u \in \mathbf{C}^3([0,T]; \mathbf{W}')$, яка на відрізку $[0,T]$ задовольняє рівняння (1) і умови (2) у просторі $\mathbf{W}'$ та належить до простору $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(D)$.

Розв'язок залежить від компонент вектора $\mathbf{a}$, які будемо вважати комплексними параметрами задачі, що змінюються у крузі $O_A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le A\}$ радіуса $A > 0$, тобто $\mathbf{a} \in O_A^9$.

Для існування розв'язку задачі у просторі $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(D)$ необхідно, щоб праві частини φ_1, φ_2, φ_3 умов (2) мали таку гладкість у шкалі просторів на множині Ω: $\varphi_1 \in \mathbf{E}_{\beta(0)}^q(\Omega)$, $\varphi_2 \in \mathbf{E}_{\beta(\tau)}^q(\Omega)$, $\varphi_3 \in \mathbf{E}_{\beta(T)}^q(\Omega)$.

2. Побудова формального розв'язку. Теорема єдності. З означення випливає, що розв'язок задачі (1), (2) має вигляд ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t) e^{ikx}\,, \tag{3}$$

де коефіцієнти u_k – невідомі функції, які визначаємо відокремленням змінних. Очевидно, що функція $u_k = u_k(t)$ є розв'язком відповідної триточкової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d^3u_k}{dt^3} + b_1(k)\frac{d^2u_k}{dt^2} + b_2(k)\frac{du_k}{dt} + b_3(k)u_k, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{4}$$

$$u_k(0) = \varphi_{1k}\,, \quad u_k(\tau) = \varphi_{2k}\,, \quad u_k(T) = \varphi_{3k}\,, \tag{5}$$

$$b_1(k) = ika_{21} + a_{20}\,, \quad b_2(k) = -k^2a_{12} + ika_{11} + a_{10}\,,$$

$$b_3(k) = -ik^3a_{03} - k^2a_{02} + ika_{01} + a_{00}\,,$$

φ_{1k}, φ_{2k}, φ_{3k} – коефіцієнти Фур'є функцій φ_1, φ_2, φ_3.

Очевидно, що єдиність розв'язку u_k задачі (4), (5) у просторі $\mathbf{C}^3[0,T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta}(D)$ для довільних дійсних величин q, β.

Нехай

$$b_m(k) = \tilde{k}^m\, \tilde{b}_m(k)\,,$$

де

$$\tilde{b}_m(k) = \left(\frac{ik}{\tilde{k}}\right)^m \sum_{r=0}^{m} a_{3-m,r}(ik)^{r-m}\,, \qquad m = 1,2,3\,.$$

Тоді $\left|\tilde{b}_m(k)\right| < 2A$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ і для коренів $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$, $\lambda_3(k)$ многочлена

$$P_k(\lambda) = \prod_{n=1}^{3}\left(\lambda - \lambda_m(k)\right) = \lambda^3 + \tilde{b}_1(k)\lambda^2 + \tilde{b}_2(k)\lambda + \tilde{b}_3(k)\,,$$

дійсні частини яких підпорядковано нестрогим нерівностям $\operatorname{Re}\lambda_1(k) \geq$ $\geq \operatorname{Re}\lambda_2(k) \geq \operatorname{Re}\lambda_3(k)$, виконується оцінка [17]:

$$|\lambda_m(k)| \leq 1 + \max\{|\tilde{b}_1(k)|, |\tilde{b}_2(k)|, |\tilde{b}_3(k)|\} \leq 1 + 2A = A_1\,. \tag{6}$$

Очевидно, що числа $\gamma_m = \tilde{k}\lambda_m(k)$ є коренями характеристичного рівняння $\gamma^3 + b_1(k)\gamma^2 + b_3(k)\gamma + b_3(k) = 0$ для диференціального рівняння (4).

Загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$u_k(t) = C_{1k}e^{\gamma_1 t} + C_{3k}e^{\gamma_2 t} + C_{3k}e^{\gamma_3 t}, \qquad k \in \mathbb{Z}\setminus \mathrm{K}\,, \tag{7}$$

де K – (скінченна) множина чисел $k \in \mathbb{Z}$, для яких многочлен P_k має кратний корінь, а C_{1k}, C_{2k}, C_{3k} – розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} C_{1k} + C_{2k} + C_{3k} = \varphi_{1k} \\ C_{1k}e^{\gamma_1\tau} + C_{2k}e^{\gamma_2\tau} + C_{3k}e^{\gamma_3\tau} = \varphi_{2k} \\ C_{1k}e^{\gamma_1 T} + C_{2k}e^{\gamma_2 T} + C_{3k}e^{\gamma_3 T} = \varphi_{3k} \end{cases}, \qquad k \notin \mathrm{K}\,. \tag{8}$$

Нехай $\gamma_1^* = \gamma_1 - \gamma_2$, $\gamma_2^* = \gamma_1 - \gamma_3$, $\gamma_3^* = \gamma_2 - \gamma_3$, тоді визначник $\Delta(k)$ системи (8) задається формулою

$$\Delta(k) = e^{\gamma_1 T + \gamma_2 \tau}\Delta^*(k),$$

де

$$\Delta^*(k) = -1 + e^{-\gamma_2^* T} + e^{-\gamma_3^* \tau} + e^{-\gamma_1^*(T-\tau)} - e^{-\gamma_1^*(T-\tau)-\gamma_3^* T} - e^{-\gamma_1^* T - \gamma_3^* \tau}. \quad (9)$$

У випадку $k \in \mathrm{K}$ загальний розв'язок рівняння (4) задається формулою (7), у якій присутні дві або одна експонента, а відповідні визначники $\Delta(k)$ залежать від кратності коренів.

Якщо $\lambda_1(k) \neq \lambda_2(k) = \lambda_3(k)$, то $\Delta(k) = e^{\gamma_2(T+\tau)}(T-\tau) + \tau e^{\gamma_1 T + \gamma_2 \tau} - T e^{\gamma_2 T + \gamma_1 \tau}$, якщо $\lambda_1(k) = \lambda_2(k) \neq \lambda_3(k)$, то $\Delta(k) = e^{\gamma_1(T+\tau)}(T-\tau) + \tau e^{\gamma_3 T + \gamma_1 \tau} - T e^{\gamma_1 T + \gamma_3 \tau}$, і якщо $\lambda_1(k) = \lambda_2(k) = \lambda_3(k)$, то $\Delta(k) = T\tau e^{\gamma_1(T+\tau)}(T-\tau)$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(D)$ *необхідно і достатньо, щоб для цілих* k *виконувалась умова*

$$\Delta(k) \neq 0. \quad (10)$$

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай однорідна задача (1), (2) у просторі $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(D)$ має не більше одного розв'язку. Якщо існує розв'язок (3) задачі (1), (2), тоді всі функції $u_k(t)$ знаходяться однозначно, тобто однорідна задача (4), (5) у просторі $\mathbf{C}^3[0;T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ має єдиний розв'язок. Отже, система (8) має лише один розв'язок, тобто $\Delta(k) \neq 0$ для $k \in \mathbb{Z}$.

Достатність. Доведемо від супротивного. Припустимо, що існують два різні розв'язки $u_1 = u_1(t,x)$ і $u_2 = u_2(t,x)$ задачі (1), (2) з простору $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(D)$. Тоді функція $\bar{u} = u_1 - u_2$ є розв'язком однорідної задачі з простору $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(D)$ і зображується рядом (3), а коефіцієнти $\bar{u}_k = \bar{u}_k(t)$ є розв'язками відповідної однорідної задачі (4), (5). Якщо рівняння $\Delta(k) = 0$ не має розв'язків у цілих числах k, тобто $\Delta(k) \neq 0$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$, то система рівнянь (8) має лише тривіальний розв'язок. Тоді із (7) одержимо, що $\bar{u}_k = 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathrm{K}$. Аналогічне твердження справджується для чисел $k \in \mathrm{K}$. Отже, $\bar{u} = u_1 - u_2 = 0$ просторі $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(D)$. Одержане протиріччя доводить теорему. ♦

За умов теореми 1 розв'язок $u_k(t)$ задачі (4), (5) існує для довільного $k \in \mathbb{Z}$, зокрема

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\Delta_j(k,t)}{\Delta(k)} \varphi_{jk}, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathrm{K},$$

де $\Delta_j(k,t)$ – відповідні алгебричні доповнення елементів визначника $\Delta(k)$, тому формальний розв'язок задачі (1), (2) існує та подається у вигляді

$$u_k(t,x) = \sum_{k \in K} u_k(t) e^{ikx} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus K} \sum_{j=1}^{3} \frac{\Delta_j(k,t)}{\Delta(k)} \varphi_{jk} e^{ikx}. \quad (11)$$

Обчислимо визначники $\Delta_1(k,t)$, $\Delta_2(k,t)$, $\Delta_3(k,t)$, враховуючи при цьому, в якому з проміжків $[0,\tau]$ чи $[\tau,T]$ лежить t. Очевидно, що справедливими є рівності

$$\Delta_1(k,\tau)=\Delta_1(k,T)=\Delta_2(k,0)=\Delta_2(k,T)=\Delta_3(k,0)=\Delta_3(k,\tau)=0\,,$$

$$\Delta_1(k,0)=\Delta_2(k,\tau)=\Delta_3(k,T)=\Delta(k).$$

У випадку $t\in(0,\tau)$ маємо

$$\Delta_1(k,t)=e^{\gamma_1 T+\gamma_2\tau+\gamma_3 t}\Delta_1^*(k,t),\qquad \Delta_3(k,t)=e^{\gamma_1\tau+\gamma_2 t}\Delta_3^*(k,t)\,,$$

$$\Delta_1^*(k,t)=-1+e^{-\gamma_2^*(T-t)}+e^{-\gamma_3^*(\tau-t)}+e^{-\gamma_1^*(T-\tau)}-$$

$$-e^{-\gamma_1^*(T-t)-\gamma_3^*(\tau-t)}-e^{-\gamma_1^*(T-\tau)-\gamma_3^*(T-t)},$$

$$\Delta_3^*(k,t)=1+e^{-\gamma_1^*\tau-\gamma_3^* t}+e^{-\gamma_1^*(\tau-t)-\gamma_3^*\tau}-e^{-\gamma_1^*(\tau-t)}-e^{-\gamma_2^*\tau}-e^{-\gamma_3^* t}\,,$$

у випадку $t\in(\tau,T)$ –

$$\Delta_1(k,t)=e^{\gamma_1 T+\gamma_2 t+\gamma_3\tau}\Delta_1^*(k,t),\qquad \Delta_3(k,t)=e^{\gamma_1 t+\gamma_2\tau}\Delta_3^*(k,t)\,,$$

$$\Delta_1^*(k,t)=1+e^{-\gamma_1^*(T-t)-\gamma_3^*(T-\tau)}+e^{-\gamma_1^*(T-\tau)-\gamma_3^*(t-\tau)}-$$

$$-e^{-\gamma_1^*(T-t)}-e^{-\gamma_2^*(T-\tau)}-e^{-\gamma_3^*(t-\tau)},$$

$$\Delta_3^*(k,t)=-1+e^{-\gamma_2^* t}+e^{-\gamma_1^*(t-\tau)}+e^{-\gamma_3^*\tau}-e^{-\gamma_1^* t-\gamma_3^*\tau}-e^{-\gamma_1^*(t-\tau)-\gamma_3^* t}\,,$$

і при $t\in(0,T)$ –

$$\Delta_2(k,t)=e^{\gamma_1 T+\gamma_2 t}\Delta_2^*(k,t)\,,$$

$$\Delta_2^*(k,t)=-1+e^{-\gamma_2^* T}+e^{-\gamma_1^*(T-\tau)}+e^{-\gamma_3^* t}-e^{-\gamma_1^*(T-t)-\gamma_3^* T}-e^{-\gamma_1^* T-\gamma_3^* t}.$$

З наведених формул отримуємо, що у позначеннях $L_j=L_j(\partial_t)=$ $=\partial_t+\gamma_j$, $j=1,2,3$, похідні $u_k^{(r)}$, $r=0,1,2,3$, розв'язку задачі (4), (5) при $t\in(0,\tau)$ і $t\in(\tau,T)$ мають відповідно вигляд

$$u_k^{(r)}(t)=\frac{L_3^r\Delta_1^*(k,t)}{\Delta^*(k)}e^{\gamma_3 t}\,\varphi_{1k}+$$

$$+\frac{L_2^r\Delta_2^*(k,t)}{\Delta^*(k)}e^{\gamma_2(t-\tau)}\,\varphi_{2k}+\frac{L_2^r\Delta_3^*(k,t)}{\Delta^*(k)}e^{\gamma_1(\tau-T)+\gamma_2(t-\tau)}\,\varphi_{3k}\,,$$

$$u_k^{(r)}(t)=\frac{L_2^r\Delta_1^*(k,t)}{\Delta^*(k)}e^{\gamma_2(t-\tau)+\gamma_3\tau}\,\varphi_{1k}+$$

$$+\frac{L_2^r\Delta_2^*(k,t)}{\Delta^*(k)}e^{\gamma_2(t-\tau)}\,\varphi_{2k}+\frac{L_1^r\Delta_3^*(k,t)}{\Delta^*(k)}e^{\gamma_1(t-T)}\,\varphi_{3k}\,.$$

3. Оцінка розв'язку. Теорема існування. Встановимо умови, за яких формальний розв'язок (11) буде розв'язком задачі (1), (2). Спочатку покажемо, що у формулі (11) сума $\sum\limits_{k\in K}u_k(t)e^{ikx}$ – скінченна, тобто множина K є скінченною.

Використаємо дискримінант $D(k)$ многочлена P_k, який визначається формулою $D(k)=\prod\limits_{1\le i<j\le 3}\left(\lambda_j(k)-\lambda_i(k)\right)^2$ і для якого

$$\left(\frac{\tilde{k}}{k}\right)^6 D(k) = D_0 + \frac{D_1}{k} + \frac{D_2}{k^2} + \dots + \frac{D_6}{k^6}, \qquad k \neq 0,$$

де $D_0, D_1, \dots, D_6$ – комплексні числа, які є многочленами від коефіцієнтів рівняння (1). Зокрема, D_0 є також дискримінантом многочлена, коефіцієнти якого є коефіцієнтами a_{21}, a_{12}, a_{03} головної частини рівняння (1), і має вигляд

$$D_0 = -27a_{03}^2 - 4a_{12}^3 + 18a_{03}a_{12}a_{21} + a_{12}^2 a_{21}^2 - 4a_{03}a_{21}^3.$$

Якщо $D_0 \neq 0$, то для $|k| \geq \dfrac{\tilde{D}_0}{|D_0|} = K_1$, де $\tilde{D}_0 = \max\left(2|D_1| + \ldots + 2|D_6|, 1\right)$, справджується нерівність $|D(k)| \geq \dfrac{|D_0|}{16} > 0$.

Оскільки $D(k) \neq 0$ для $|k| \geq K_1$, то $\mathrm{K} \subset (-K_1, K_1)$, тобто множина K має не більше $1 + 2K_1$ елементів.

Встановимо оцінки знизу для модулів дійсних частин $\operatorname{Re}\lambda(k) = \left(\lambda_j(k) + \bar{\lambda}_j(k)\right)/2$ коренів многочлена P_k, де $\bar{\lambda}$ – комплексно-спряжене число до числа λ. Нехай $P_{k1}(\lambda) = \prod_{\ell=1}^{3} (\lambda + \bar{\lambda}_\ell(k))$, тоді результант $R(k) = \prod_{j,\ell=1}^{3} \left(\lambda_j(k) + \bar{\lambda}_\ell(k)\right)$ многочленів P_k та P_{k1} має оцінку

$$|R(k)| \leq 2^9 (1 + 2A)^8 \left|\operatorname{Re}\lambda_j(k)\right|, \tag{12}$$

причому

$$\left(\frac{\tilde{k}}{k}\right)^9 |R(k)| = R_0 + \frac{R_1}{k} + \frac{R_2}{k^2} + \ldots + \frac{R_9}{k^9}, \qquad k \neq 0.$$

Позначимо A_i та B_i, $i = 1, 2, 3$, відповідно дійсні та уявні частини коефіцієнтів головної частини рівняння (1), а саме $a_{21} = A_1 + iB_1$, $a_{12} = A_2 + iB_2$, $a_{03} = A_3 + iB_3$, тоді R_0 визначається формулою

$$\begin{aligned} R_0 = 8\big(&-A_1^2A_2^2A_3 + 2A_1A_2A_3^2 - A_3^3 + A_1A_3^2B_1^2 - A_1A_2A_3B_1B_2 - \\ &- A_3^2B_1B_2 + A_2A_3B_2^2 - 2A_1^2A_3B_1B_3 - A_1^2A_2B_2B_3 + \\ &+ 3A_1A_3B_2B_3 - A_1B_1B_2^2B_3 + B_2^3B_3 + A_1^3B_3^2\big). \end{aligned}$$

Якщо $R_0 \neq 0$, то при $|k| \geq \dfrac{\hat{R}}{|R_0|} = K_2$, де $\hat{R}_0 = 2(|R_1| + \ldots + |R_9|)$, маємо нерівність $|R(k)| \geq (\sqrt{2})^{-11} |R_0|$ і, враховуючи (11), отримуємо оцінку

$$\left|\operatorname{Re}\lambda_j(k)\right| \geq C, \quad C = 2^{-29/2} A_1^{-8} |R_0|. \tag{13}$$

Для оцінки абсолютної величини функцій u_k та їх похідних до третього порядку введемо позначення для різниць коренів

$$\Lambda_{ij}(k) = \lambda_i(k) - \lambda_j(k), \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Лема. *Для всіх (за винятком скінченної кількості) чисел* $k \in \mathbb{Z}$ *справджуються нерівності*

$$\left|\operatorname{Re}\Lambda_{ij}(k)\right| \ge \sigma, \qquad i,j=1,2,3, \quad i \ne j, \tag{14}$$

де $\sigma = 2^{-31} A_1^{-17} \left|\tilde{R}_0\right|^{1/2}$.

Д о в е д е н н я. Для оцінки зверху виразів $\operatorname{Re}\Lambda_{ij}(k)$ знайдемо спочатку коефіцієнти многочлена

$$P_{k2}(\Lambda) = \prod_{i,j=1, i\ne j}^{3} \left(\Lambda - \Lambda_{ij}(k)\right) =$$

$$= \left(\Lambda^2 - \Lambda_{12}^2(k)\right)\left(\Lambda^2 - \Lambda_{13}^2(k)\right)\left(\Lambda^2 - \Lambda_{23}^2(k)\right) = F_k\left(\Lambda^2\right)$$

у термінах коефіцієнтів многочлена P_k.

Для побудови многочлена P_{k2} використаємо наведену нижче теорему з роботи [8, с. 237] про зв'язок між власними значеннями довільних матриць $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ та матриці $\varphi(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sum_{i,j=0}^{p} c_{ij}\mathbf{A}^i \otimes \mathbf{B}^j$, яка побудована на основі многочлена $\varphi(\lambda,\mu) = \sum_{i,j=0}^{p} c_{ij}\lambda^i\mu^j$, де c_{ij} – комплексні числа, p – ціле число, $\otimes$ – прямий добуток матриць, $\mathbf{A}^0$, $\mathbf{B}^0$ – одиничні матриці $\mathbf{I}_m$, $\mathbf{I}_n$ порядку m і n відповідно.

Теорема 2. *Якщо* $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ – *власні значення матриці* $\mathbf{A}$ *порядку* m *і* $\mu_1,\ldots,\mu_n$ – *власні значення матриці* $\mathbf{B}$ *порядку* n, *то власними значеннями матриці* $\varphi(\mathbf{A},\mathbf{B})$ *будуть* mn *чисел* $\varphi(\lambda_r,\mu_s) = \sum_{i,j=0}^{p} c_{ij}\lambda_r^i\mu_s^j$, *де* $r = 1,2,\ldots,m$, $s = 1,2,\ldots,n$.

Застосуємо цю теорему для випадку $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $n = 3$, $p = 1$, де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\tilde{b}_3(k) & -\tilde{b}_2(k) & -\tilde{b}_1(k) \end{pmatrix}$$

– приєднана матриця многочлена P_k, а $\varphi(\lambda,\mu) = \lambda^1\mu^0 - \lambda^0\mu^1$. Оскільки $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$, $\lambda_3(k)$ є власними значеннями матриці $\mathbf{A}$, то $\Lambda_{ij}(k)$, i, $j = 1,2,3$, є власними значеннями матриці

$$\varphi(\mathbf{A},\mathbf{A}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{A}.$$

Розписуючи поелементно блочну матрицю

$$\varphi(\mathbf{A},\mathbf{A}) = -\begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & -\mathbf{I}_3 \\ \tilde{b}_3(k)\mathbf{I}_3 & \tilde{b}_2(k)\mathbf{I}_3 & \tilde{b}_1(k)\mathbf{I}_3 + \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

отримаємо рівності

$$\det\left(\Lambda\mathbf{I}_9 - \varphi(\mathbf{A},\mathbf{A})\right) = \prod_{i,j=1}^{3} \left(\Lambda - \Lambda_{ij}(k)\right) = \Lambda^3 F_k\left(\Lambda^2\right),$$

де

$$F_k(\Lambda^2) = \Lambda^6 + \sum_{j=1}^{3} \tilde{d}_j(k)\Lambda^{6-2j} ,$$

$$\tilde{d}_1(k) = 6\tilde{b}_2(k) - 6\tilde{b}_1(k)^2 ,$$

$$\tilde{d}_2(k) = 9\tilde{b}_2(k) - 6\tilde{b}_2(k)\tilde{b}_1(k)^2 + \tilde{b}_1(k)^4 ,$$

$$\tilde{d}_3(k) = 27\tilde{b}_3(k)^2 + 4\tilde{b}_2(k)^3 -$$

$$-18\tilde{b}_1(k)\tilde{b}_2(k)\tilde{b}_3(k) - \tilde{b}_2(k)^2\tilde{b}_1(k)^2 + 4\tilde{b}_3(k)\tilde{b}_1(k)^3 .$$

Позначимо $\mu = \Lambda^2$, тоді $F_k(\mu) = (\mu - \mu_1(k))(\mu - \mu_2(k))(\mu - \mu_3(k))$, де

$$\mu_1(k) = \Lambda_{12}^2(k), \quad \mu_2(k) = \Lambda_{13}^2(k), \quad \mu_3(k) = \Lambda_{23}^2(k).$$

Для коренів $-\bar{\mu}_1(k)$, $-\bar{\mu}_2(k)$, $-\bar{\mu}_3(k)$ многочлена

$$F_{k1}(\mu) \equiv \prod_{\ell=1}^{3} (\mu + \bar{\mu}_\ell(k)) = \mu^3 + \sum_{\ell=1}^{3} \bar{\tilde{d}}_\ell \mu^{3-\ell}$$

з рівності $2\operatorname{Re}\mu_\ell(k) = \mu_\ell(k) + \bar{\mu}_\ell(k)$ отримаємо, що числа $2\operatorname{Re}\mu_\ell(k)$ є множниками результанта

$$\tilde{\mathrm{R}}(k) = \prod_{\ell,m=1}^{3} (\mu_\ell(k) + \bar{\mu}_m(k)) = 8\prod_{\ell=1}^{3} \operatorname{Re}\mu_\ell(k) \prod_{\ell,m=1,\,\ell\neq m}^{3} (\mu_\ell(k) + \bar{\mu}_m(k))$$

многочленів F_k і F_{k1}. Для довільних $\ell = 1,\ 2,\ 3$ оцінимо зверху за формулою (6) модуль цього результанта

$$|\tilde{\mathrm{R}}(k)| \leq 2^{52} A_1^{34} |\operatorname{Re}\mu_\ell(k)|. \tag{15}$$

З другого боку,

$$\left(\frac{\tilde{k}}{k}\right)^{18} |R(k)| = \tilde{R}_0 + \frac{\tilde{R}_1}{k} + \frac{\tilde{R}_2}{k^2} + \ldots + \frac{\tilde{R}_{18}}{k^{18}}, \qquad k \neq 0 ,$$

де $\tilde{R}_0$ визначається формулою для R_0, у якій A_1, A_2, A_3 – дійсні, а B_1, B_2, B_3 – уявні частини чисел $\hat{d}_1 = 6a_{12} - 2a_{21}^2$, $\hat{d}_2 = 9a_{12}^2 - 6a_{12}a_{21}^2 + a_{21}^4$, $\hat{d}_3 = 27a_{03}^2 + 4a_{12}^2 + a_{21}^3 - 18a_{21}a_{12}a_{03} - a_{21}^2 a_{21}^2 + 4a_{03}a_{21}^3$.

У випадку $\tilde{R}_0 \neq 0$ маємо оцінку знизу

$$|\tilde{R}(k)| \geq \frac{|\tilde{R}_0|}{2} \left|\frac{k}{\tilde{k}}\right|^{18} \geq 2^{-10} |\tilde{R}_0|, \quad |k| \geq \frac{\hat{\tilde{R}}_0}{|\tilde{R}_0|} = K_3 , \tag{16}$$

де

$$\hat{\tilde{R}}_0 = 2(|\tilde{R}_1| + |\tilde{R}_2| + \ldots + |\tilde{R}_{18}|).$$

З формул (15) і (16) отримуємо нерівність

$$|\operatorname{Re}\mu_\ell(k)| \geq 2^{-52} A_1^{-34} |\tilde{R}(k)| \geq 2^{-62} A_1^{-34} |\tilde{R}_0|.$$

З формули (14) випливає, що всі експоненти у формулі (9) для $\Delta^*(k)$ обмежені зверху числом $1/4$ для всіх цілих k, які задовольняють нерівність $\tilde{k} \geq \ln 4 / \min(\tau, T-\tau)\sigma$. Тому для таких чисел k маємо оцінку знизу $|\Delta^*(k)| \geq e^{\gamma_1 T + \gamma_2 \tau} / 8$. Позначимо $\nu_1 = \operatorname{Re}\lambda_1(k)$, $\nu_2 = \operatorname{Re}\lambda_2(k)$, $\nu_3 = \operatorname{Re}\lambda_3(k)$, тоді з останньої нерівності отримуємо на проміжках $(0,\tau)$ і (τ,T) відповідні оцінки розв'язку задачі (3), (4) та його похідних:

$$2^{-8}3^{-3}\left|u_k^{(r)}e^{-\tilde{k}(t-\tau)\nu_3}\tilde{k}^{-r}\right|^2 \le A_1^{2r}e^{2\tilde{k}(t-\tau)(\nu_3-\nu_3)}\left|\varphi_{1k}e^{\tilde{k}\nu_3\tau}\right|^2 +$$

$$+A_1^{2r}e^{2\tilde{k}(t-\tau)(\nu_2-\nu_3)}\left|\varphi_{2k}\right|^2 + A_1^{2r}e^{2\tilde{k}(t-\tau)(\nu_2-\nu_3)}\left|\varphi_{3k}e^{-\tilde{k}\nu_1(T-\tau)}\right|^2, \quad (17)$$

$$2^{-8}3^{-3}\left|u_k^{(r)}e^{-\tilde{k}(t-\tau)\nu_1}\tilde{k}^{-r}\right|^2 \le A_1^{2r}e^{2\tilde{k}(t-\tau)(\nu_2-\nu_1)}\left|\varphi_{1k}e^{\tilde{k}\nu_3\tau}\right|^2 +$$

$$+A_1^{2r}e^{2\tilde{k}(t-\tau)(\nu_2-\nu_1)}\left|\varphi_{2k}\right|^2 + A_1^{2r}e^{2\tilde{k}(t-\tau)(\nu_1-\nu_1)}\left|\varphi_{3k}e^{-\tilde{k}\nu_1(T-\tau)}\right|^2, \quad (18)$$

де

$$r = 0,1,2,3 \ \text{ і } \ \tilde{k} \ge 2^{31}A_1^{17}\ln 2\big/\min(\tau, T-\tau)\sqrt{|\tilde{R}_0|} = K_4 .$$

Для подальшого оцінювання функцій u_k та їхніх похідних до третього порядку розглянемо два випадки прямування до нескінченності: $k\to-\infty$ та $k\to+\infty$. У першому випадку ($k\to-\infty$) послідовність многочленів $P_k(\lambda)$ прямує до граничного многочлена

$$P^+(\lambda) = \lambda^3 + ia_{21}\lambda^2 - a_{12}\lambda - ia_{03} = (\lambda-\lambda_1^+)(\lambda-\lambda_2^+)(\lambda-\lambda_3^+) .$$

В другому випадку ($k\to+\infty$) послідовність многочленів $P_k(\lambda)$ прямує до іншого граничного многочлена

$$P^-(\lambda) = -P^+(-\lambda) = \lambda^3 - ia_{21}\lambda^2 - a_{12}\lambda + ia_{03} = (\lambda-\lambda_1^+)(\lambda-\lambda_2^+)(\lambda-\lambda_3^+) .$$

Для коренів λ_j^+ і λ_j^-, де $j=1,2,3$, справджуються рівності $\lambda_j^+ = -\lambda_{4-j}^-$.

Відповідно до двох граничних многочленів $P^{\pm}(\lambda)$ і отриманих для коренів многочленів P_k оцінок подамо праві частини φ_j, $j=1,2,3$, умов (2) і розв'язок задачі (1), (2) у вигляді сум

$$\varphi_j = \varphi_j^0 + \varphi_j^+ + \varphi_j^- = \sum_{k\in\tilde{K}}\varphi_k e^{ikx} + \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\tilde{K}}\varphi_k e^{ikx} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus(\tilde{K}\cup\mathbb{N})}\varphi_k e^{ikx} ,$$

$$u = u^0 + u^+ + u^- = \sum_{k\in\tilde{K}}u_k(t)e^{ikx} + \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\tilde{K}}u_k(t)e^{ikx} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus(\tilde{K}\cup\mathbb{N})}u_k(t)e^{ikx} ,$$

де скінченна множина $\tilde{\mathrm{K}}$ визначається формулою

$$\tilde{\mathrm{K}} = \left\{k\in\mathbb{Z} : \ \tilde{k} \le \max\left(1, K_1, K_2, K_3, K_4\right)\right\}.$$

Умови існування розв'язку задачі (1), (2) залежать від розташування щодо нуля дійсних частин коренів многочленів $P^{\pm}(\lambda)$, а з наступних двох умов випливає єдиність розв'язку:

(***i***) $D_0R_0\tilde{R}_0 \ne 0$, (19)

(***ii***) на множині $\tilde{\mathrm{K}}$ справджується нерівність (9). (20)

Нехай $\nu_j^{\pm} = \operatorname{Re}\lambda_j^{\pm}$, $j=1,2,3$, тоді існують чотири випадки розташування коренів $\lambda_j^{\pm}$ стосовно знаку їхніх дійсних частин:

1) $\nu_1^+ < 0$;

2) $\nu_2^+ < 0 < \nu_1^+$;

3) $\nu_3^+ < 0 < \nu_2^+$;

4) $\nu_3^+ > 0$.

Таке розміщення коренів щодо уявної осі використано, наприклад, у роботах [3, 10] для постановки коректних крайових задач для рівнянь з частинними похідними у півпросторі.

4. Теореми існування.

Теорема 3. *Нехай* $\nu_1^+ < 0$, *виконуються умови* (19) *та* (20) *і* $\{\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0\} \subset \mathbf{W}$, $\varphi_2^\pm \in \mathbf{E}_0^q(\Omega)$, $\varphi_1^+ \in \mathbf{E}_{(-2\sigma-C)\tau}^q(\Omega)$, $\varphi_3^+ \in \mathbf{E}_{C(T-\tau)}^q(\Omega)$, $\varphi_1^- \in \mathbf{E}_{(A_1-2\sigma)\tau}^q(\Omega)$, $\varphi_3^- \in \mathbf{E}_{-A_1(T-\tau)}^q(\Omega)$. *Тоді у просторі* $\mathbf{E}_\beta^{3,q}(D)$, *де*

$$\beta = \beta(t) = \min\left(\beta^+(t), \beta^-(t)\right),$$

$$\beta^+(t) = (t-\tau)\begin{cases} -A_1, & t \in [0,\tau], \\ -A_1 + 2\sigma, & t \in [\tau, T], \end{cases}$$

$$\beta^-(t) = (t-\tau)\begin{cases} C, & t \in [0,\tau], \\ 2\sigma + C, & t \in [\tau, T], \end{cases}$$

існує єдиний розв'язок задачі (1), (2). *Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин умов* (2) *і подається у вигляді суми*

$$u = u^0 + u^+ + u^-,$$

причому

$$u^0 \in \mathbf{C}^3\left([0,T];\mathbf{W}\right), \qquad u^+ \in \mathbf{E}_{\beta^+}^{3,q}(D), \qquad u^- \in \mathbf{E}_{\beta^-}^{3,q}(D).$$

Д о в е д е н н я. Якщо $k \in \tilde{\mathrm{K}}$, то за умовою (20) розв'язок u_k існує та належить до простору $\mathbf{C}^3[0,T]$. Зі скінченності множини $\tilde{\mathrm{K}}$ випливає, що $u^0 \in \mathbf{C}^3([0,T];\mathbf{W})$

Якщо ж $k \in \mathbb{Z} \setminus \tilde{\mathrm{K}}$, то з умови (20) випливають оцінки (17) і (18) розв'язку u_k задачі (4), (5) при $t \in [0,\tau]$, $t \in [\tau, T]$ відповідно.

За умови $\nu_1^+ < 0$ з формул (6), (13), (14) отримуємо такі співвідношення:

$$-A_1 + 2\sigma < \nu_1^+ = -\nu_3^- < -C,$$

$$-A_1 + 2\sigma < \nu_2^+ = -\nu_2^- < -\sigma - C,$$

$$-A_1 < \nu_3^+ = -\nu_1^- < -2\sigma - C.$$

Використаємо ці формули у нерівностях (17) та (18). Тоді за формулою (11) отримаємо шукані оцінки зверху доданків u^+ та u^- розв'язку u задачі (1), (2) у відповідних просторах:

$$\left\|u^+\right\|^2_{\mathbf{E}^{3,q}_{\beta^+}(D)} \le \sum_{r=0}^{3} \max\left[\max_{[0,\tau]} \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\tilde{\mathrm{K}}} \left|u_k^{(r)}(t)\right|^2 \tilde{k}^{2q-2r} e^{2\tilde{k}A_1(t-\tau)},\right.$$

$$\left.\max_{[\tau,T]} \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\tilde{\mathrm{K}}} \left|u_k^{(r)}(t)\right|^2 \tilde{k}^{2q-2r} e^{2\tilde{k}(A_1-2\sigma)(t-\tau)}\right] \le$$

$$\le \bar{C}_1 \left\|\varphi_1^+\right\|^2_{\mathbf{E}^q_{(-2\sigma-C)\tau}(\Omega)} + \bar{C}_2 \left\|\varphi_2^+\right\|^2_{\mathbf{E}^q_0(\Omega)} + \bar{C}_3 \left\|\varphi_3^+\right\|^2_{\mathbf{E}^q_{C(T-\tau)}(\Omega)},$$

$$\left\| u^- \right\|^2_{\mathbf{E}^{3,q}_{\beta^-}(D)} \le \sum_{r=0}^{3} \max\Bigg[\max_{[0,\tau]} \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus(\tilde{\mathrm{K}}\cup\mathbb{N})} \left| u_k^{(r)}(t) \right|^2 \tilde{k}^{2q-2r} e^{2\tilde{k}C(t-\tau)} ,$$

$$\max_{[\tau,T]} \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus(\tilde{\mathrm{K}}\cup\mathbb{N})} \left| u_k^{(r)}(t) \right|^2 \tilde{k}^{2q-2r} e^{-2\tilde{k}(2\sigma+C)(t-\tau)} \Bigg] \le$$

$$\le \bar{C}_1 \left\| \varphi_1^- \right\|^2_{\mathbf{E}^q_{(A_1-2\sigma)\tau}(\Omega)} + \bar{C}_2 \left\| \varphi_2^- \right\|^2_{\mathbf{E}^q_0(\Omega)} + \bar{C}_3 \left\| \varphi_3^- \right\|^2_{\mathbf{E}^q_{-A_1(T-\tau)}(\Omega)} .$$

Із цих оцінок випливає неперервність розв'язку від правих частин умов (2). Єдиність розв'язку задачі дають умови (19) і (20). Теорему доведено. ♦

Теорема 4. *Нехай* $\nu_2^+ < 0 < \nu_1^+$, *виконуються умови* (19) *та* (20) *і* $\{\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0\} \subset \mathbf{W}$, $\varphi_2^\pm \in \mathbf{E}^q_0(\Omega)$, $\varphi_3^\pm \in \mathbf{E}^q_{-A_1(T-\tau)}(\Omega)$, $\varphi_1^+ \in \mathbf{E}^q_{(-\sigma-C)\tau}(\Omega)$, $\varphi_1^- \in \mathbf{E}^q_{-C\tau}(\Omega)$. *Тоді у просторі* $\mathbf{E}^{3,q}_\beta(D)$, *де*

$$\beta = \beta(t) = \min\left(\beta^+(t),\ \beta^-(t)\right),$$

$$\beta^+(t) = (t-\tau)\begin{cases} -A_1, & t\in[0,\tau], \\ C, & t\in[\tau,T], \end{cases}$$

$$\beta^-(t) = (t-\tau)\begin{cases} -A_1, & t\in[0,\tau], \\ \sigma + C, & t\in[\tau,T], \end{cases}$$

існує єдиний розв'язок u_k *задачі* (1), (2). *Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин умов* (2) *і подається у вигляді суми* $u = u^0 + u^+ + u^-$, *причому* $u^0 \in \mathbf{C}^3\left([0,T];\mathbf{W}\right)$, $u^\pm \in \mathbf{E}^{3,q}_{\beta^\pm}(D)$.

Д о в е д е н н я цієї теореми проводиться аналогічно до доведення теореми 3. При цьому використовуються нерівності

$$C < \nu_1^+ = -\nu_3^- < A_1 ,$$

$$-A_1 + \sigma < \nu_2^+ = -\nu_2^- < -C ,$$

$$-A_1 < \nu_3^+ = -\nu_1^- < -\sigma - C ,$$

які випливають з формул (6), (13), (14) за умови $\nu_2^+ < 0 < \nu_1^+$.

Формулювання двох наступних теорем про існування єдиного розв'язку задачі (1), (2) у двох інших випадках розташування дійсних частин коренів многочленів $P^\pm(\lambda)$ є симетричними щодо індексів "+" і "–" до теорем 3 і 4, тому їх доведення аналогічне до доведення теореми 3.

Теорема 5. *Нехай* $\nu_3^+ > 0$, *виконуються умови* (19) *та* (20) *і* $\{\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0\} \subset \mathbf{W}$, $\varphi_2^\pm \in \mathbf{E}^q_0(\Omega)$, $\varphi_1^+ \in \mathbf{E}^q_{(A_1-2\sigma)\tau}(\Omega)$, $\varphi_3^+ \in \mathbf{E}^q_{-A_1(T-\tau)}(\Omega)$, a $\varphi_1^- \in \mathbf{E}^q_{(-2\sigma-C)\tau}(\Omega)$, $\varphi_3^- \in \mathbf{E}^q_{C(T-\tau)}(\Omega)$. *Тоді у просторі* $\mathbf{E}^{3,q}_\beta(D)$, *де*

$$\beta = \beta(t) = \min\left(\beta^+(t),\ \beta^-(t)\right),$$

$$\beta^+(t) = (t-\tau)\begin{cases} C, & t\in[0,\tau], \\ 2\sigma + C, & t\in[\tau,T], \end{cases}$$

$$\beta^-(t) = (t-\tau)\begin{cases} -A_1, & t\in[0,\tau], \\ -A_1 + 2\sigma, & t\in[\tau,T], \end{cases}$$

існує єдиний розв'язок u *задачі* (1), (2). *Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин умов* (2) *і подається у вигляді суми* $u = u^0 + u^+ + u^-$, *причому* $u^0 \in \mathbf{C}^3([0,T];\mathbf{W})$, $u^+ \in \mathbf{E}^{3,q}_{\beta^+}(D)$, $u^- \in \mathbf{E}^{3,q}_{\beta^-}(D)$.

Теорема 6. *Нехай* $\nu_3^+ < 0 < \nu_2^+$, *виконуються умови* (19) *та* (20) *і* $\{\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0\} \subset \mathbf{W}$, $\varphi_2^{\pm} \in \mathbf{E}_0^q(\Omega)\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\varphi_3^{\pm} \in \mathbf{E}^q_{-A_1(T-\tau)}(\Omega)$, $\varphi_1^+ \in \mathbf{E}^q_{-C\tau}(\Omega)$, $\varphi_1^- \in \mathbf{E}^q_{(-\sigma-C)\tau}(\Omega)$. *Тоді у просторі* $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta}(D)$, *де*

$$\beta = \beta(t) = \min\left(\beta^+(t),\ \beta^-(t)\right),$$

$$\beta^+(t) = (t-\tau)\begin{cases} A_1, & t \in [0,\tau], \\ \sigma + C, & t \in [\tau, T], \end{cases}$$

$$\beta^-(t) = (t-\tau)\begin{cases} -A_1, & t \in [0,\tau], \\ C, & t \in [\tau, T], \end{cases}$$

існує єдиний розв'язок u *задачі* (1), (2). *Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин умов* (2) *і подається у вигляді суми* $u = u^0 + u^+ + u^-$, *причому* $u^0 \in \mathbf{C}^3\left([0,T];\mathbf{W}\right)$, $u^+ \in \mathbf{E}^{3,q}_{\beta^+}(D)$, $u^- \in \mathbf{E}^{3,q}_{\beta^-}(D)$.

Висновки. У роботі вивчено триточкову задачу для диференціального рівняння з частинними похідними у випадку однієї просторової змінної. Встановлено умови однозначної розв'язності досліджуваної задачі у просторах функцій експоненційного типу. Доведено, що на відміну від умовно коректної задачі з багатьма просторовими змінними, задача у двовимірній області є коректною за Адамаром, оскільки відповідні вирази оцінюються знизу константами. Отримані результати можна узагальнити на випадок, коли кількість точок n перевищує три і є довільною.

1. *Василишин П. Б., Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11.– С. 1468–1476.
2. *Волянська І. І., Ільків В. С.* Умови розв'язності триточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними у двовимірному циліндрі // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 74–100.
3. *Дикополов Г. В., Шилов Г. Е.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1960. – **24**, № 3. – С. 369–380.
4. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 4. – С. 7–17.
   Те саме: *Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M.* An investigation into a problem with homogeneous local two-point conditions for a homogeneous system of partial differential equations // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 2. – P. 121–135. – https://doi.org/10.1007/s10958-011-0285-y
5. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Про індукований узагальненим відокремленням змінних операційний метод розв'язування початкових задач для рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 1. – С. 136–145.
   Те саме: *Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M.* On an operational method of solving initial-value problems for partial differential equations induced by generalized separation of variables // J. Math. Sci. – 1999. – **97**, No. 1. – P. 3879–3887. https://doi.org/10.1007/BF02364928
6. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.
7. *Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Триточкова задача для хвильового рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1996. – **45**. – С. 78–85.

8. *Ланкастер П.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1973. – 280 с.
9. *Нитребич З. М.* Крайова задача в безмежній смузі // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – № 37. – С. 16–21.
   Те саме: *Nitrebich Z. M.* A boundary-value problem in an unbounded strip // J. Math. Sci. – 1996. – **79**, No. 6. – P. 1388–1392.
10. *Паламодов В. П.* О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1960. – **24**, № 3. – С. 381–386.
11. *Покорный Ю. В.* О вторых решениях нелинейной задачи Валле – Пуссена // Дифференц. уравнения. – 1970. – **6**, № 9 – С. 1599–1605.
12. *Пташник Б. Й.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наукова думка, 1984. – 264 с.
13. *Пташник Б. Й., Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для безтипних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Доповіді НАН України. – 1996. – № 3. – С. 10–14.
14. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241–254.
    Те саме: *Ptashnyk B. I., Symotyuk M. M.* Multipoint Problem for nonisotropic partial differential equations with constant coefficients // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 2. – P. 293–310. – https://doi.org/10.1023/A:1025468413500
15. *Пташник Б. Й., Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 1. – С. 15–26.
    Те саме: *Ptashnyk B. Yo., Tymkiv I. R.* A multipoint problem for a parabolic equation with variable coefficients in a cylindrical domain // J. Math. Sci. – 2012. – **183**, No. 1. – P. 1–16. – https://doi.org/10.1007/s10958-012-0793-4
16. *Пташник Б. И., Штабалюк П. И.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 4 – С. 669–678.
17. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – Москва: Мир, 1989. – 655 с.
18. *Boucherif A., Precup R.* Semilinear evolution equations with nonlocal initial conditions // Dynam. Syst. Appl. – 2007. – **16**. – 507–516.
19. *Byszewski L.* Abstract nonlinear nonlocal problems and their physical interpretation / In: Akca H., Covachev V., Litsyn E. (eds.) Proc. of the Int. Conf. “Biomathematics, bioinformatics and applications of functional differential difference equations”, Alanya, July 14–19, 1999. – Antalya: Akdeniz Univ. Pres., 2000. – P. 77–86.
20. *Deng K.* Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions // J. Math. Anal. Appl. – 1993. – **179**, No. 2. – P. 630–637. – https://doi.org/10.1006/jmaa.1993.1373
21. *Il’kiv V. S., Nytrebych Z. M., Pukach P. Ya.* Boundary-value problems with integral conditions for a system of Lame equations in the space of almost periodic functions // Electron. J. Differ. Eq. – 2016. – **2016**, No. 304. – P. 1–12.
22. *Il’kiv V. S., Nytrebych Z. M., Pukach P. Ya.* Nonlocal problem with moment conditions for hyperbolic equations // Electron. J. Differ. Eq. – 2017. – **2017**, No. 265. – P. 1–9.
23. *Jackson D.* Existence and uniqueness of solutions to semilinear nonlocal parabolic equations // J. Math. Anal. Appl. – 1993. – **172**, No. 1. – P. 256–265.
    https://doi.org/10.1006/jmaa.1993.1022
24. *Loayza M.* Global existence and blow up results for a heat equation with nonlinear nonlocal term // Differ. Integral Equ. – 2012. – **25**, No. 7-8. – P. 665–683.
    https://projecteuclid.org/euclid.die/1356012657
25. *Malanchuk O., Nytrebych Z.* Homogeneous two-point froblem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables // Open Mathematics. – 2017. – **15**, No. 1. – P. 101–110. – https://doi.org/10.1515/math-2017-0009
26. *Ntouyas S. K., Tsamatos P. Ch.* Global existence for semilinear evolution equations with nonlocal conditions // J. Math. Anal. Appl. – 1997. – **210**, No. 2. – P. 679–687.
    https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5425
27. *Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M., Il’kiv V. S., Pukach P. Ya.* Homogeneous problem with two-point conditions in time for some equations of mathematical physics // Azerb. J. Math. – 2017. – **7**, No. 2. – P. 180–196.

28. *Nytrebych Z., Malanchuk O., Ilkiv V., Pukach P.* On the solvability of two-point in time problem for PDE // Italian J. Pure Appl. Math. – 2017. – **38**. – P. 715–726.
29. *Souplet Ph.* Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source // J. Differ. Equat. – 1999. – **153**. – P. 374–406. – https://doi.org/10.1002/mma.567
30. *Symotyuk M. M., Tymkiv I. R.* Problem with two-point conditions for parabolic equation of second order on time // Карпат. мат. публ. – 2014. – **6**, No. 2. – P. 351–359. – https://doi.org/10.15330/cmp.6.2.351-359
31. *Walker C.* Global continua of positive solutions for some quasilinear parabolic equation with a nonlocal initial condition // J. Dyn. Differ. Eq. – 2013. – **25**, No. 1. – P. 159–172. – https://doi.org/10.1007/s10884-013-9292-7

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Исследована задача с трехточечными условиями по временной переменной для однородного дифференциального уравнения с частными производными в плоской области. Показана корректность по Адамару задачи, отличающая ее от условно корректной задачи со многими пространственными переменными, разрешимость которой связана с проблемой малых знаменателей. Доказана теорема единственности и установлены условия существования решения задачи со значениями в пространствах периодических функций с экспоненциальным изменением коэффициентов Фурье.

ON UNIQUE SOLVABILITY OF THREE-POINT PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN A TWO-DIMENSIONAL DOMAIN

The problem with three-point conditions with respect to time for homogeneous partial differentional equation in a plane domain is investigated. Correctness by Hadamard of the problem is shown, which distinguishes it from the conditionally correct problem with many spatial variables whose solvability is connected with the problem of small denominators. The theorem on the uniqueness is proved and the conditions for the existence of the solution of the problem are established in the spaces of periodic functions with exponential change in Fourier coefficients.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
21.03.17