

РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ЧАСТИНКИ ЗІ СПІНОМ У ЗАГАЛЬНІЙ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Проаналізовано роль рівнянь Матіссона – Папапетру у виявленні закономірностей спінової гравітаційної взаємодії за умов ультрарелятивістських рухів спінової частинки в полях чорних дір і нейтронних зір. Останнім часом ці рівняння активно використовуються для дослідження спіно-гравітаційних ефектів. Водночас необхідно детальніше вивчити специфіку саме ультрарелятивістських рухів спінової частинки, на що звертаємо увагу у цій статті. Використано зображення рівнянь Матіссона – Папапетру у термінах супутніх тетрад, що дає змогу встановити фізичне підґрунтя особливостей спіно-гравітаційних ефектів для спінових частинок. Сформульовано висновки, які випливають з отриманих нових розв'язків рівнянь Матіссона – Папапетру.

Вступ. Для уточнення термінології зазначимо, що часто заради стислості словами “частинка зі спіном” (“spinning particle”) характеризують широкий клас об'єктів – від елементарних частинок із власне квантовим спіном до макроскопічних об'єктів із внутрішнім кутовим моментом: гіроскопів, планет, нейтронних зір, чорних дір та ін. Коли йдеться про опис поширення та рухів цих об'єктів у гравітаційному полі в загальній теорії відносності, то в першому випадку беруть до уваги загальноковаріантне рівняння Дірака, у другому – рівняння, вперше отримані Матіссоном [10] і згодом іншими авторами, чим і зумовлена їх поширена назва – рівняння Матіссона – Папапетру або ж Матіссона – Папапетру – Діксона [6, 15]. При цьому, починаючи з 1970-х років, у низці публікацій різних авторів було показано, що в певному сенсі рівняння Матіссона – Папапетру (МП) є класичним (неквантовим) наближенням рівняння Дірака.

Метою цієї статті є акцентування уваги на важливості рівнянь МП для опису впливу спіну частинки на її рух у гравітаційних полях масивних астрофізичних об'єктів – чорних дір і нейтронних зір.

Упродовж тривалого часу інтерес до дослідження розв'язків рівнянь МП у різних гравітаційних полях у контексті з'ясування їх можливих фізичних наслідків був незначним. На це були свої причини. З одного боку, при оцінці впливу обертання планети Меркурій навколо своєї осі на додаткове кутове зміщення його перигелію в статті [3] показано, що величина цього зміщення в 10^8 разів менша від 43 кутових секунд за 100 років – оцінки, яка випливає з рівнянь геодезійних ліній у метриці Шварцшильда (відомий класичний тест загальної теорії відносності). З іншого боку, висновок про малість впливу спіну на траєкторію частинки в гравітаційному полі випливає з певної інтерпретації принципу еквівалентності [16], зокрема, цей висновок закріпився у відомій фундаментальній монографії [12]. Все ж вирішальне значення має аналіз розв'язків рівнянь МП без апіорних припущень про їхню близькість до відповідних розв'язків рівнянь геодезійних ліній в усьому діапазоні швидкості частинки. При цьому саме рівняння МП дають змогу належним чином уточнити формулювання принципу еквівалентності [16].

1. Рівняння Матіссона–Папапетру у первісному зображенні. Первісне зображення рівнянь МП, отримане в [10], є таким:

$$\frac{D}{ds} \left(m u^\lambda + u_\mu \frac{DS^{\lambda\mu}}{ds} \right) = -\frac{1}{2} u^\pi S^{\rho\sigma} R_{\pi\rho\sigma}^\lambda, \quad (1)$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{ds} + u^\mu u_\sigma \frac{DS^{\nu\sigma}}{ds} - u^\nu u_\sigma \frac{DS^{\mu\sigma}}{ds} = 0, \quad (2)$$

$$S^{\lambda\nu} u_\nu = 0, \quad (3)$$

де $u^\lambda \equiv dx^\lambda/ds$ – 4-швидкість частинки, $S^{\mu\nu}$ – її тензор спіну, m і D/ds – відповідно маса і коваріантна похідна, $R_{\rho\sigma}^\lambda$ – тензор кривини простору-часу (використано систему одиниць, у якій $c = G = 1$). У випадку, коли спін у частинки відсутній, рівняння (2) і (3) стають тривіальними тотожностями, а рівняння (1) переходить у рівняння геодезійних ліній

$$\frac{D}{ds} u^\lambda = 0$$

(m є сталою величиною).

Система рівнянь (1)–(3) має інтеграл руху

$$S_0^2 = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = \text{const},$$

де $|S_0|$ – абсолютна величина спіну. Як наслідок фізичної умови пробності частинки, необхідно враховувати співвідношення [28]

$$\varepsilon \equiv \frac{S_0}{mr} \ll 1, \quad (4)$$

де r – характерна віддаль, на якій гравітаційне поле джерела суттєво змінюється, як правило це радіальна координата у відповідній метриці.

Оскільки компоненти $S^{\mu\nu}$ пропорційні до S_0 , то після ділення рівняння (1) на m маємо рівняння, яке внаслідок (4) явно містить малий параметр ε . Це відкриває можливість пошуку розв'язків системи рівнянь МП у вигляді відповідних невеликих поправок до розв'язків рівнянь геодезійних ліній, принаймні якщо початкові значення абсолютної величини компонент u^μ не є надто великими. Можна було б навіть припустити, що близькість розв'язків рівнянь МП до розв'язків рівнянь геодезійних ліній збережеться й тоді, коли для якоїсь із компонент u^μ виконується співвідношення $u^\mu \gg 1$, бо, можливо, права частина рівняння (1) за цієї умови зростає лише внаслідок кінематичного ефекту, зумовленого сповільненням власного часу частинки, яка швидко рухається, а при переході до системи відліку, пов'язаної з частинкою, відповідного зростання абсолютного значення правої частини (1) нема. Для перевірки цього припущення доцільно розглянути рівняння МП у зображенні супутніх тетрад, тобто коли поряд із глобальними координатами x^λ ввести локальні координати $x^{(\mu)}$ у відповідному ортонормованому репері.

2. Рівняння МП у зображенні супутніх тетрад. Після введення локальних величин з використанням супутніх тетрад із рівнянь (1) і (2) випливають співвідношення [25]

$$m\gamma_{(1)(4)(4)} = S_{(1)} R_{(1)(4)(2)(3)}, \quad (5)$$

$$m\gamma_{(2)(4)(4)} = S_{(1)} (R_{(2)(4)(2)(3)} - \dot{\gamma}_{(3)(4)(4)} - \gamma_{(2)(4)(4)} \gamma_{(2)(3)(4)}), \quad (6)$$

$$m\gamma_{(3)(4)(4)} = S_{(1)} (R_{(3)(4)(2)(3)} + \dot{\gamma}_{(2)(4)(4)} - \gamma_{(3)(4)(4)} \gamma_{(2)(3)(4)}), \quad (7)$$

$$\gamma_{(i)(k)(4)} = 0, \quad (8)$$

де $\gamma_{(\lambda)(\mu)(\nu)}$ – коефіцієнти обертання Річчі, $S_{(1)}$ і $R_{(i)(4)(2)(3)}$ – відповідно локальні компоненти 3-вектора спіну й тензора кривини. Перший локальний вектор орторепера виділено так, що його орієнтація збігається з орієнтацією спіну. Компоненти $\gamma_{(i)(4)(4)}$ мають безпосередній фізичний зміст 3-прискорення $a_{(i)}$ спінової частинки відносно безспінової за оцінкою супутнього спостерігача. Згідно з (5)–(8) у лінійному за спіном наближенні маємо

$$a_{(i)} = \frac{S_{(1)}}{m} R_{(i)(4)(2)(3)}. \quad (9)$$

Зазначимо, що права частина співвідношення (9) є безпосереднім наслідком правої частини рівняння (1).

Важливо, що локальні компоненти тензора кривини визначають важливі характеристики гравітаційного поля з точки зору спостерігача, який рухається відносно джерела цього поля. Цими характеристиками є так звані гравітоелектричні $E_{(k)}^{(i)}$ та гравітомагнітні $B_{(k)}^{(i)}$ компоненти поля, означені як

$$\begin{aligned} E_{(k)}^{(i)} &= R_{(k)(4)}^{(i)(4)}, \\ B_{(k)}^{(i)} &= -\frac{1}{2} R_{(m)(n)}^{(i)(4)} \varepsilon^{(m)(n)}{}_{(k)}. \end{aligned} \quad (10)$$

3. Залежність локальних компонент тензора кривини від швидкості спостерігача. Використовуємо метрику Шварцшильда в стандартних координатах $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, $x^4 = t$. Тоді ненульові компоненти метричного тензора $g_{\mu\nu}$ мають вигляд

$$\begin{aligned} g_{11} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, & g_{22} &= -r^2, \\ g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta, & g_{44} &= 1 - \frac{2M}{r}, \end{aligned}$$

де M є масою шварцшильдівського джерела поля.

Звернемо увагу на гравітомагнітні компоненти поля $B_{(k)}^{(i)}$. Нехай у полі Шварцшильда перебуває спостерігач, рух якого описується з допомогою локального орторепера. Не на шкоду загальності вважаємо, що цей рух відбувається у площині $\theta = \pi/2$, а перший просторовий вектор орторепера спрямований вздовж напрямку, ортогонального до площини, яка визначається напрямом руху спостерігача і радіальним напрямком. Другий просторовий вектор орторепера спрямуємо вздовж напрямку руху спостерігача. Тоді відмінні від нуля компоненти $B_{(k)}^{(i)}$ є такими [25]:

$$\begin{aligned} B_{(2)}^{(1)} &= B_{(1)}^{(2)} = \frac{3Mu_{\parallel}u_{\perp}}{r^3 \sqrt{u_4 u^4 - 1}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \\ B_{(3)}^{(1)} &= B_{(1)}^{(3)} = \frac{3Mu_{\perp}^2 u^4}{r^3 \sqrt{u_4 u^4 - 1}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (11)$$

де $u_{\parallel} = dr/ds$ і $u_{\perp} = rd\varphi/ds$ – відповідно радіальна і тангенціальна компоненти 4-швидкості спостерігача. Згідно з (11) усі гравітомагнітні компоненти поля дорівнюють нулеві лише у випадку радіального руху спостерігача. Якщо ж $u_{\perp} \neq 0$, то компоненти (11) суттєво залежать від швидкості. Справді, записуючи вирази (11) з використанням явного виразу релятивістського фактора Лоренца через компоненти швидкості рухомого спостерігача відносно нерухомого у полі Шварцшильда

$$\gamma = \sqrt{u_4 u^4},$$

отримуємо

$$B_{(2)}^{(1)} = B_{(1)}^{(2)} = \frac{3Mu_{\parallel}u_{\perp}}{r^3\sqrt{\gamma^2-1}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \quad (12)$$

$$B_{(3)}^{(1)} = B_{(1)}^{(3)} = \frac{3Mu_{\perp}^2\gamma}{r^3\sqrt{\gamma^2-1}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}. \quad (13)$$

Згідно з (12), (13) за невисоких швидкостей спільний множник $3M/r^3$ у цих виразах домножується на величини, малі порівняно з одиницею. Натомість за ультрарелятивістських швидкостей, коли $\gamma^2 \gg 1$ і u_{\parallel}^2 , u_{\perp}^2 мають порядок γ^2 , з (12), (13) випливає, що

$$B_{(2)}^{(1)} = B_{(1)}^{(2)} \sim \frac{3M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \gamma, \quad (14)$$

$$B_{(3)}^{(1)} = B_{(1)}^{(3)} \sim \frac{3M}{r^3} \gamma^2. \quad (15)$$

Якщо ж лише $u_{\perp}^2 \gg 1$ і $u_{\parallel}^2 \ll u_{\perp}^2$, то компоненти (14) пропорційні до u_{\parallel} , а компоненти (15) пропорційні до γ^2 . У випадку, коли $u_{\parallel}^2 \gg 1$ і $u_{\perp}^2 \ll u_{\parallel}^2$, величини (14) і (15) пропорційні відповідно до u_{\perp} і u_{\perp}^2 .

Тепер припустимо, що поряд із рухомим спостерігачем у полі Шварцшильда перебуває частинка зі спіном, тобто спостерігач є супутнім до неї. Якщо спін частинки орієнтований вздовж напрямку першого просторового вектора вибраного вище ортогонального репера, то згідно з (9), (11) для компонент 3-прискорення маємо

$$a_{(i)} = \frac{S_{(1)}}{m} B_{(i)}^{(1)}.$$

Абсолютна величина цього прискорення

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_{(1)}^2 + a_{(2)}^2 + a_{(3)}^2}$$

згідно з (12), (13) є такою:

$$|\mathbf{a}| = \frac{3M}{r^2} \frac{|S_0|}{mr} |u_{\perp}| \sqrt{1 + u_{\perp}^2}. \quad (16)$$

Згідно з (16) для випадку $u_{\perp} \gg 1$ маємо

$$|\mathbf{a}| = \frac{3M}{r^2} \varepsilon \gamma^2, \quad (17)$$

де γ є Лоренц-фактором, обчисленим за тангенціальною швидкістю u_{\perp} . Вираз (17) показує, що для довільного фіксованого малого значення ε можна вказати таке велике значення γ , за якого виконується співвідношення $|\mathbf{a}| \gg M/r^2$ (зазначимо, що величина M/r^2 дорівнює ньютонівському значенню прискорення вільного падіння).

Отже, із запису рівнянь МП у термінах локальних супутніх величин однозначно випливає, що вплив спін-гравітаційної взаємодії суттєво зростає для швидкостей частинки, близьких до швидкості світла.

4. Вплив спін-гравітаційної взаємодії на траєкторію частинки. Для оцінки впливу спін-гравітаційної взаємодії на траєкторії ультрарелятивістської частинки зі спіном необхідно вивчити розв'язки рівнянь МП (1)–(3) у різних метриках і цьому присвячена серія публікацій [1, 16–26]. Серед розв'язків рівнянь МП для ультрарелятивістських рухів спінової частинки

важливе місце посідають аналітичні розв'язки в полях Шварцшильда, Шварцшильда – де Сіттера і Керра, які описують колові орбіти. Такі орбіти існують, коли γ -фактор Лоренца частинки, обчислений за її швидкістю відносно джерела поля, є величиною, пропорційною до $1/\sqrt{\epsilon}$. Частина таких орбіт зумовлена сильною відштовхувальною дією спін-гравітаційної взаємодії (у випадку поля Шварцшильда це орбіти з $r \leq 3M$), інші забезпечуються додатковим притяганням порівняно з тим, що його зазнає безспінова частинка ($r > 3M$ для поля Шварцшильда).

Аналітичні розв'язки рівнянь МП для колових ультрарелятивістських орбіт частинки зі спіном важливі для їх подальшого узагальнення з метою вивчення впливу спін-гравітаційної взаємодії на ширший клас рухів частинки у різних гравітаційних полях. Числове інтегрування рівнянь МП дає змогу дослідити особливості неколових ультрарелятивістських рухів частинки зі спіном. Ці рівняння у метриці Керра представлено в [17] як системі 11 диференціальних рівнянь першого порядку, де невідомими функціями власного часу частинки є її координати – компоненти швидкості 3-вектор спіну. Зазначимо, що оскільки в рівнянні (1) є другі похідні від компонент спіну або, з урахуванням (3), другі похідні від компонент швидкості, фіксація лише початкових значень координат, швидкості та спіну частинки загалом не виділяє єдиного розв'язку усієї системи рівнянь (1)–(3). З фізичної точки зору така ситуація зумовлена тим, що співвідношення (3) справджується як для єдиного власного центра маси спінової частинки, так і для множини так званих невластних центрів маси [1]. При цьому рухам невластних центрів маси притаманна специфічна спіральність (осциляційність), на відміну від руху власного центра маси. Оскільки саме рух власного центра маси безпосередньо описує переміщення частинки в гравітаційному полі, важливо знати, як серед множини розв'язків рівнянь МП з фіксованими початковими значеннями координат, швидкості та спіну частинки виділити розв'язок, що не є спіральним у вказаному сенсі. У цьому контексті зазначимо, що рівняння, записані в [17], мають два параметри, асоційовані з інтегралами енергії та моменту кількості руху частинки в полі Керра, і для всякого руху власного центра маси існує єдине їх конкретне значення. Тобто для опису кожного часткового руху частинки необхідно вказати величини цих параметрів. Для їх пошуку можна використовувати деякі аналітичні співвідношення та оцінки у поєднанні з комп'ютерним пошуком.

Наприклад, у випадку невеликих збурень початкових умов, властивих ультрарелятивістській коловій орбіті, пошук параметрів для неосциляційного розв'язку можна обмежити областю поблизу їхніх значень на коловій орбіті. Один з отриманих таким чином графіків подано на рис. 1, що ілюструє форму орбіти частинки зі спіном, яка стартує з позиції $r = 2.5 M$ за годинниковою стрілкою при нульовому значенні полярного кута в екваторіальній площині метрики Шварцшильда з такою ж орбітальною швидкістю, як на коловій орбіті, маючи додатково невелику радіальну компоненту швидкості (спін ортогональний до площини руху).

Для порівняння штриховою лінією зображено орбіту частинки без спіну, яка починає рух з тими ж початковими значеннями, що й спінова частинка. Суттєва різниця орбіт, фрагменти яких зображено на графіку, полягає у тому, що безспінова частинка падає на поверхню шварцшильдівського горизонту за час, значно менший за період обертання частинки навколо джерела поля, тоді як спінова частинка встигає зробити

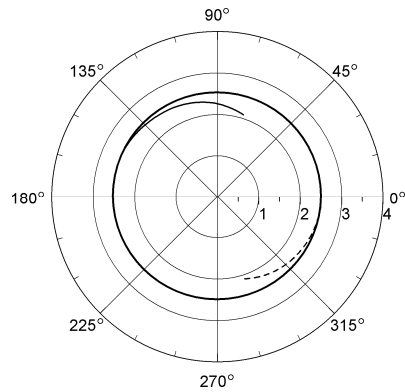


Рис. 1

багато повних обертів перед падінням на горизонт. Тобто, цей приклад ілюструє значну відштовхувальну дію спін-гравітаційної взаємодії. Зазначимо, що за іншого співвідношення орієнтацій спіну та напрямку руху частинки по орбіті спін-гравітаційна дія призводить до сильного додаткового притягання частинки до джерела поля [23].

Висновки. Публікації останніх років засвідчують активізацію досліджень спін-гравітаційних ефектів на основі аналізу фізичних наслідків, які випливають з рівнянь МП [2, 4–5, 7–9, 11, 13, 14, 27]. Передусім оцінюється роль взаємодії внутрішнього обертання макроскопічних тіл з гравітаційним полем, тобто об'єктів, чия швидкість відносно джерела поля не є близькою до швидкості світла (як-от, у системі подвійних нейтронних зір або чорних дір). Водночас становить інтерес вивчення специфіки рухів у гравітаційному полі мікроскопічних частинок зі спіном (електронів, протонів, нейтрино та ін.) у класичному, неквантовому, наближенні, оскільки саме рівняння МП дають таку можливість. Зазначимо, що швидкості, дуже близькі до швидкості світла, тобто ультрарелятивістські, є типовими для елементарних частинок, які беруть участь в астрофізичних процесах поблизу масивних джерел гравітаційного поля. У цьому контексті важливими є розглянуті вище властивості рухів ультрарелятивістської спінової частинки, які виявляють сильну антигравітаційну дію на неї спін-гравітаційної взаємодії або ж додаткову притягальну дію порівняно із впливом гравітації на безспінову частинку.

У подальшому актуальним завданням є дослідження впливу спін-гравітаційної взаємодії на поведінку ультрарелятивістської частинки під поверхнею шварцшильдівського горизонту з поєднанням аналітичних оцінок і комп'ютерного пошуку відповідних розв'язків рівнянь МП.

1. *Плячко Р. М.* Прояви гравітаційної ультрарелятивістської спін-орбітальної взаємодії. – Київ: Наук. думка, 1988. – 148 с.
2. *Bini D., Geralico A.* Hyperbolic-like elastic scattering of spinning particles by a Schwarzschild black hole // *Gen. Relativ. Gravit.* – 2017. – **49**, No. 6. – 84.
<https://doi.org/10.1007/s10714-017-2247-2>
3. *Corinaldesi E., Papapetrou A.* Spinning test-particles in general relativity. II // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* – 1951. – **209**. – P. 259–268.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1951.0201>
4. *Costa L. F. O., Natario J., Zilhão M.* Spacetime dynamics of spinning particles: Exact electromagnetic analogies // *Phys. Rev. D.* – 2016. – **93**, No. 10. – 104006.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.104006>
5. *D'Ambrosi G., Kumar S., Van de Vis J., Van Holten J. W.* Spinning bodies in curved spacetime // *Phys. Rev. D.* – 2016. – **93**, No. 4. – 044051.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.044051>
6. *Dixon W. G.* Dynamics of extended bodies in general relativity. I. Momentum and angular momentum // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* – 1970. – **314**, No. 1519. – P. 499–527. – <https://doi.org/10.1098/rspa.1970.0020>
7. *Kunst D., Ledvinka T., Lukes-Gerakopoulos G., Seyrich J.* Comparing Hamiltonians of a spinning test particle for different tetrad fields // *Phys. Rev. D.* – 2016. – **93**, No. 4. – 044004. – <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.044004>
8. *Kunst D., Perlick V., Lämmerzahl C.* Isofrequency pairing of spinning particles in Schwarzschild – de Sitter spacetime // *Phys. Rev. D.* – 2015. – **92**, No. 2. – 024029. – <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.024029>
9. *Lanzagorta M., Salgado M.* Detection of gravitational frame dragging using orbiting qubits // *Classical Quantum Gravity.* – 2016. – **33**, No. 10. – 105013.
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/10/105013>
10. *Mathisson M.* Neue Mechanik materialler Systeme // *Acta Phys. Polon.* – 1937. – **6**. – S. 163–200.
11. *Mikóczy B.* Spin supplementary conditions for spinning compact binaries // *Phys. Rev. D.* – 2017. – **95**, No. 6. – 064023.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.064023>
12. *Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.* *Gravitation.* – San Francisco: Freeman, 1973. – 1295 p.

13. *Nicolaevici N.* Bouncing Dirac particles: compatibility between MIT boundary conditions and Thomas precession // *Eur. Phys. J. Plus.* – 2017. – **132**, No. 1. – 21.
<https://doi.org/10.1140/epjp/i2017-11297-y>
14. *Obukhov Yu. N., Silenko A. J., Teryaev O. V.* General treatment of quantum and classical spinning particles in external fields // *Phys. Rev. D.* – 2017. – **96**, No. 10. – 105005. – <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.105005>
15. *Papapetrou A.* Spinning test-particles in general relativity. I // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* – 1951. – **209**. – P. 248–258. – <https://doi.org/10.1098/rspa.1951.0200>
16. *Plyatsko R.* Gravitational ultrarelativistic spin-orbit interaction and the weak equivalence principle // *Phys. Rev. D.* – 1998. – **58**, No. 8. – 084031.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.084031>
17. *Plyatsko R. M., Stefanyshyn O. B., Fenyk M. T.* Mathisson – Papapetrou – Dixon equations in the Schwarzschild and Kerr backgrounds // *Class. Quantum Grav.* – 2011. – **28**, No. 19. – 195025. – <https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/19/195025>
18. *Plyatsko R.* Ultrarelativistic circular orbits of spinning particles in a Schwarzschild field // *Class. Quantum Grav.* – 2005. – **22**, No. 9. – P. 1545–1551.
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/9/004>
19. *Plyatsko R., Bilaniuk O.* Gravitational ultrarelativistic interaction of classical particles in the context of unification of interactions // *Class. Quantum Grav.* – 2001. – **18**, No. 23. – P. 5187–5198. – <https://doi.org/10.1088/0264-9381/18/23/312>
20. *Plyatsko R., Fenyk M.* Antigravity: Spin-gravity coupling in action // *Phys. Rev. D.* – 2016. – **94**, No. 4. – 044047. – <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.044047>
21. *Plyatsko R., Fenyk M.* Highly relativistic circular orbits of spinning particle in the Kerr field // *Phys. Rev. D.* – 2013. – **87**, No. 4. – 044019.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.044019>
22. *Plyatsko R., Fenyk M.* Highly relativistic spin-gravity coupling for fermions // *Phys. Rev. D.* – 2015. – **91**, No. 6. – 064033.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.064033>
23. *Plyatsko R., Fenyk M.* Highly relativistic spinning particle in the Schwarzschild field: Circular and other orbits // *Phys. Rev. D.* – 2012. – **85**, No. 10. – 104023.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.104023>
24. *Plyatsko R., Fenyk M., Panat V.* Highly relativistic spin-gravity- Λ coupling // *Phys. Rev. D.* – 2017. – **96**, No. 6. – 064038.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.064038>
25. *Plyatsko R., Fenyk M., Stefanyshyn O.* Solutions of Mathisson – Papapetrou equations for highly relativistic spinning particles / In: *Equations of motion in relativistic gravity* / D. Puetzfeld et al. (eds.). – New York: Springer, 2015. – P. 165–190.
26. *Plyatsko R., Stefanyshyn O., Fenyk M.* Highly relativistic spinning particle starting near $r_{ph}^{(-)}$ in a Kerr field // *Phys. Rev. D.* – 2010. – **82**, No. 4. – 044015.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.044015>
27. *Tsupko O. Yu., Bisnovatyi-Kogan G. S., Jefremov P. I.* Parameters of innermost stable circular orbits of spinning test particles: Numerical and analytical calculations // *Gravitation Cosmol.* – 2016. – **22**, No. 2. – P. 138–147.
<https://doi.org/10.1134/S0202289316020158>
28. *Wald R.* Gravitational spin interaction // *Phys. Rev. D.* – 1972. – **6**, No. 2. – P. 406–413. – <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.6.406>

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Проанализирована роль уравнений Матиссона – Папаетру в выявлении закономерностей спин-гравитационного взаимодействия при условиях ультрарелятивистских движений спиновой частицы в полях черных дыр и нейтронных звезд. В последнее время эти уравнения активно используются для исследования спин-гравитационных эффектов. В то же время необходимо детальнее изучить специфику именно ультрарелятивистских движений спиновой частицы, на что обращаем внимание в этой статье. Использовано представление уравнений Матиссона – Папаетру в терминах сопутствующих тетрад, что позволяет установить физическое основание особенностей спин-гравитационных эффектов для спиновых частиц. Сформулированы выводы, следующие из полученных новых решений уравнений МП.

EQUATIONS OF DYNAMICS OF A SPINNING PARTICLE IN GENERAL RELATIVITY

The role of the Mathisson – Papapetrou equations in revealing the regularities of spin-gravitational interaction at the conditions of ultrarelativistic motions of a spinning particle in fields of black holes and neutron stars is analyzed. Recently, these equations are actively used in investigation of spin-gravitational effects. At the same time it is necessary to study in more detail the specificity just of the ultrarelativistic motions of a spinning particle, which is pointed out in this article. The representation of the Mathisson – Papapetrou equations in terms of the comoving tetrads is used which allows us to reveal the physical basis of the spin-gravitational effects for spinning particles. The conclusions are drawn from obtained new solutions of the Mathisson – Papapetrou equations.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.05.17