УДК 539.3

М. В. Марчук, Р. І. Тучапський

АНАЛІЗ ІДЕНТИЧНИХ ЗА ФОРМОЮ РІВНЯНЬ ДЕЯКИХ ВАРІАНТІВ ТЕОРІЇ ПЛАСТИНОК У ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ

Побудовано рівняння термопружності трансверсально-ізотропних тонких пластинок сталої товщини, які є ідентичними за формою рівняннями деяких варіантів теорії пластинок у полярних координатах. Із цих рівнянь можна отримати рівняння окремих уточнених теорій пружності або термопружності ізотропних або трансверсально-ізотропних пластинок, а також рівняння класичної теорії термопружності ізотропних пластинок. Як приклад використання побудованих рівнянь розглянуто симетричне деформування кільцевої пластинки. Для деяких характерних видів симетричних механічних чи теплових навантажень наведено значення коефіцієнтів концентрації зусиль і моментів поблизу отвору.

Вступ. Тривалий час єдиною теорією, що застосовувалась для розрахунку тонких ізотропних пластинок, була класична теорія [1, 3, 13], заснована на гіпотезах Кірхгофа.

У сучасній техніці використовуються пластинки з композитних матеріалів зі значною анізотропією пружних і теплових властивостей. Для розв'язування задач про деформування таких пластинок класична теорія виявилась малопридатною. Це посприяло появі так званих уточнених теорій, у яких враховуються поперечні зсувні деформації, характерні для більшості композитних матеріалів. До таких теорій належать, наприклад, «зсувна модель» С. П. Тимошенка; варіант теорії, побудованої Б. Л. Пелехом у [9], для якої зсувна модель Тимошенка є базовою; варіанти, засновані на представленні шуканих функцій у вигляді рядів за поліномами Лежандра (побудовані методом І. Н. Векуа [7], методом $\{m,n\}$-апроксимації тощо); теорії Міндліна, Рейснера, Левінсона та ін.

Поява уточнених теорій пластинок привела до появи робіт, у яких проводилось порівняння цих теорій між собою і/або з класичною теорією пластинок. Серед численних публікацій з цієї проблематики відмітимо лише деякі ключові і порівняно недавні роботи.

У [15] наведено систему рівнянь теорії пластинок Рейснера і системи рівнянь пластинок, побудовані методом нормованих моментів поля напружень І. Н. Векуа і за допомогою спрощеної схеми І. Н. Векуа редукції тривимірних задач до двовимірних. У [16] проведено порівняння рівнянь теорії пластинок Кірхгофа, типу Тимошенка і теорії пластинок порядку $N = 1$, побудованої за допомогою спрощеної схеми І. Н. Векуа. У [17] наведено рівняння теорії пластинок Міндліна і Рейснера та отримано співвідношення між невідомими функціями в цих теоріях.

У [14] співвідношення, що пов'язують питомі зусилля і моменти з узагальненими переміщеннями в уточнених теоріях пластинок Міндліна, Рейснера і Левінсона, і співвідношення між невідомими функціями в цих теоріях і в класичній теорії пластинок, записано в канонічній формі. Це дозволяє із цих співвідношень відповідним підбором констант, що в них фігурують, отримати співвідношення тієї чи іншої з названих уточнених теорій.

Варіант теорії термопружного згину пластинок, побудований Б. Л. Пелехом у [9], а також варіант теорії термопружності оболонок на основі методу $\{m,n\}$-апроксимації [10, 11] уже давно застосовуються при розрахунках напружено-деформованого стану пластинок. Перший з цих варіантів створено для моделювання задач згину пластинок із сучасних матеріалів типу піролітичного графіту, у яких лінійний коефіцієнт нормального теплового розширення набагато перевищує цей же коефіцієнт у площині ізотропії. Другий варіант застосовують у випадку товстостінних пластинок і пластинок, що знаходяться під дією швидкозмінного за просторовими координатами навантаження [2, 4–6].

Однак кількість робіт, присвячених порівнянню цих варіантів теорії пластинок чи оболонок з іншими, є незначною.

З метою заповнити цю прогалину проведемо порівняння рівнянь $\{1,0\}$-апроксимації термопружного стану пластинок; теорії термопружності пластинок типу Тимошенка; варіанту термопружного згину пластинок, запропонованого в [9]; теорії пластинок з наближеннями порядку $N = 1$ для напружень, побудованої методом нормованих моментів І. Н. Векуа, і класичної теорії термопружності пластинок у полярній системі координат. Основну увагу приділено ідентичним за формою рівнянням всіх або окремих із цих варіантів теорії пластинок. Відповідним підбором деяких параметрів і лінійних однорідних операторів відносно відомих функцій із цих рівнянь легко можна отримати рівняння тієї чи іншої з порівнюваних теорій. На основі ідентичних за формою рівнянь усіх або деяких з варіантів порівнюваних теорій отримано розв'язок задачі про симетричне деформування кільцевої пластинки, який використано при розв'язуванні відповідних задач на основі рівнянь порівнюваних теорій (крім варіанту теорії Векуа, рівняння якого несумісні з крайовими умовами у відповідній задачі). Для деяких характерних видів симетричних механічних чи теплових навантажень проведено порівняння значень коефіцієнтів концентрації зусиль і моментів поблизу отвору на основі різних варіантів теорії.

1. Ідентичні за формою рівняння деяких варіантів теорії пластинок. Розглянемо термопружний стан трансверсально-ізотропної пластинки сталої товщини $2h$. Будемо вважати, що площини ізотропії пластинки співпадають з її серединною площиною S. Віднесемо S до полярної системи координат $Or\varphi$. Поперечну координату z будемо відраховувати в сторону зростання по нормалі до S, напрямок якої виберемо так, щоб координати r, φ, z утворювали праву систему координат. Введемо позначення: Γ – граничний контур S; $\mathbf{n}$ – орт нормалі до S; $\boldsymbol{\ell}$ і $\mathbf{s}$ – орти зовнішньої нормалі до граничного зрізу і дотичної до Γ, зорієнтовані так, що трійка векторів $\boldsymbol{\ell}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{n}$ утворює правий тріедр; E і ν – модуль Юнґа і коефіцієнт Пуассона у серединній площині; G' – модуль зсуву у площинах, перпендикулярних до серединної площини; α і α' – коефіцієнти лінійного теплового розширення у площинах, паралельній і перпендикулярних до серединної площини S; p_{zi}^{-} і p_{zi}^{+} – значення дотичних і нормальних напружень на лицьових площинах при $z = -h$ і $z = h$, $i, j = r, \varphi, z$; T – температура пластинки; u, v і w – величини, що характеризують тангенціальні і нормальне переміщення точок серединної площини; γ_r, γ_φ – величини, що характеризують кути повороту нормального волокна; N_r, $N_{r\varphi}$, N_φ, Q_r, Q_φ і M_r, $M_{r\varphi}$, M_φ – питомі зусилля і моменти; $T^{(0)}$ і $T^{(1)}$ – температурні моменти порядків $N = 0$ і $N = 1$ [7]. Температурне поле T пластинки відоме. У подальшому припускаємо, що E, ν, G', α і α' не залежать від z.

Зусилля і моменти виразимо через узагальнені переміщення за допомогою таких формул:

$$N_r = \frac{2hE}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\right)\right] - \frac{N}{1-\nu}, \quad N_{r\varphi} = \frac{hE}{1+\nu}\left[\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v\right)\right],$$

$$N_\varphi = \frac{2hE}{1-\nu^2}\left[\nu\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\right)\right] - \frac{N}{1-\nu}, \tag{1}$$

$$M_r = D\left[\frac{\partial\gamma_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r}\left(\frac{\partial\gamma_\varphi}{\partial\varphi} + \gamma_r\right)\right] - \frac{M}{1-\nu},$$

$$M_{r\varphi} = \frac{1-\nu}{2}D\left[\frac{\partial\gamma_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\gamma_r}{\partial\varphi} - \gamma_\varphi\right)\right],$$

$$M_\varphi = D\left[\nu\frac{\partial\gamma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\gamma_\varphi}{\partial\varphi} + \gamma_r\right)\right] - \frac{M}{1-\nu}, \tag{2}$$

$$Q_r = \Lambda'\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \gamma_r\right) + \tilde{Q}_r, \qquad Q_\varphi = \Lambda'\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + \gamma_\varphi\right) + \tilde{Q}_\varphi, \tag{3}$$

де $D = \dfrac{2h^3E}{3(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластинки; $\Lambda' = 2k'G'h$ – коефіцієнт поперечного зсуву; N, M, $\tilde{Q}_r$ і $\tilde{Q}_\varphi$ є лінійними однорідними операторами відносно пар функцій $p^\pm_{zz}$, $T^{(0)}$; $p^\pm_{zz}$, $T^{(1)}$; $p^\pm_{zr}$, $\dfrac{\partial T^{(1)}}{\partial r}$ і $p^\pm_{z\varphi}$, $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T^{(1)}}{\partial\varphi}$ відповідно.

Вирази для N, M, $\tilde{Q}_r$, $\tilde{Q}_\varphi$ і Λ' у деяких варіантах теорії пластинок наведемо нижче.

Рівняння рівноваги пластинки мають такий вигляд:

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}(N_r - N_\varphi) + p^+_{zr} - p^-_{zr} = 0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial N_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r}N_{r\varphi} + p^+_{z\varphi} - p^-_{z\varphi} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) - Q_r + h(p^+_{zr} + p^-_{zr}) = 0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial M_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r}M_{r\varphi} - Q_\varphi + h(p^+_{z\varphi} + p^-_{z\varphi}) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}Q_r + p^+_{zz} - p^-_{zz} = 0. \tag{6}$$

Важливо відмітити, що рівняння (4) і рівняння (5), (6) не є зв'язані. Рівняння (4) називають рівняннями розтягу – стиску пластинки, а рівняння (5) і (6) – рівняннями згину.

Граничні умови у випадку пластинки з криволінійним зрізом можемо записати у вигляді

$$u\ell_r + v\ell_\varphi = f_\ell \quad \text{або} \quad N_r\ell_r^2 + 2N_{r\varphi}\ell_r\ell_\varphi + N_\varphi\ell_\varphi^2 = N^*_\ell,$$

$$us_r + vs_\varphi = f_s \quad \text{або} \quad N_r\ell_r s_r + N_{r\varphi}(\ell_r s_\varphi + \ell_\varphi s_r) + N_\varphi\ell_\varphi s_\varphi = N^*_{\ell s}, \tag{7}$$

$$\gamma_r\ell_r + \gamma_\varphi\ell_\varphi = g_\ell \quad \text{або} \quad M_\ell \equiv M_r\ell_r^2 + 2M_{r\varphi}\ell_r\ell_\varphi + M_\varphi\ell_\varphi^2 = M^*_\ell, \tag{8}$$

$$\gamma_r s_r + \gamma_\varphi s_\varphi = g_s \quad \text{або} \quad M_{\ell s} \equiv M_r\ell_r s_r + M_{r\varphi}(\ell_r s_\varphi + \ell_\varphi s_r) + M_\varphi\ell_\varphi s_\varphi = M^*_{\ell s}, \tag{9}$$

$$w = w^* \quad \text{або} \quad Q_\ell \equiv Q_r\ell_r + Q_\varphi\ell_\varphi = Q^*_\ell, \tag{10}$$

де ℓ_r, ℓ_φ – компоненти вектора $\boldsymbol{\ell}$, $s_r = -\ell_\varphi$, $s_\varphi = \ell_r$ – компоненти вектора $\mathbf{s}$, а f_ℓ, f_s, g_ℓ, g_s, N^*_ℓ, $N^*_{\ell s}$, M^*_ℓ, $M^*_{\ell s}$, Q^*_ℓ – задані функції точок контуру Γ.

Кожне з рівнянь (1)–(6) і кожне зі співвідношень (7)–(10) ідентичні за формою з відповідним рівнянням чи співвідношенням того чи іншого з розглянутих нижче варіантів теорії пластинок.

У деяких з розглянутих нижче уточнених варіантах теорії пластинок входять вирази для переміщень лицьових поверхонь [6, 10, 11] або вирази для деяких лінійних комбінацій моментів компонент вектора переміщень відносно поліномів Лежандра порядків, більших від $N = 1$ [7]. Через громіздкість не будемо їх тут наводити.

2. Розв'язувальні рівняння. Виведемо розв'язувальні рівняння для пластинок. Припустимо, що величини $p_{zr}^{\pm}$ і $p_{z\varphi}^{\pm}$ у рівняннях (4) і (5) визначаються наступними співвідношеннями:

$$p_{zr}^{\pm} = \frac{\partial \ell^{\pm}}{\partial r}, \qquad p_{z\varphi}^{\pm} = \frac{1}{r}\frac{\partial \ell^{\pm}}{\partial \varphi}, \tag{11}$$

де ℓ^-, ℓ^+ – задані функції від r, φ.

Рівняння (4) будуть виконуватись, якщо подати N_r, $N_{r\varphi}$, N_φ через функцію напружень F:

$$N_r = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\right) - \ell^+ + \ell^-, \;\; N_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right), \;\; N_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \ell^+ + \ell^-, \tag{12}$$

Для однозв'язної пластинки функція F повинна задовольняти рівняння сумісності [1]

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial}{\partial r}\right)\left[\frac{N_r - \nu N_\varphi + N}{2hE}\right]\left[\frac{(1+\nu) r N_{r\varphi}}{hE}\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} +$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{N_\varphi - \nu N_r + N}{2hE}\right)\right] = 0 .$$

Підставивши у це рівняння вирази (12) для N_r, $N_{r\varphi}$, N_φ, отримаємо

$$\Delta\Delta F = \Delta\left[(1-\nu)(\ell^+ - \ell^-) - N\right], \tag{13}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ – оператор Лапласа в полярній системі координат.

Припустимо, що величини $\tilde{Q}_r$ і $\tilde{Q}_\varphi$ в рівняннях (3) визначаються такими співвідношеннями:

$$\tilde{Q}_r = \frac{\partial X}{\partial r}, \qquad \tilde{Q}_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial X}{\partial \varphi}, \tag{14}$$

де X – лінійний однорідний оператор відносно функцій $\ell^{\pm}$ і $T^{(1)}$.

Величини γ_r і γ_φ представимо у вигляді [9]

$$\gamma_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \qquad \gamma_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{15}$$

Підставивши значення γ_r і γ_φ з формул (15) у вирази для питомих зусиль і моментів (2), (3) і врахувавши при цьому співвідношення (14), отримаємо

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - (1-\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right) + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}\right)\right] - \frac{M}{1-\nu},$$

$$M_{r\varphi} = -(1-\nu) D\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{2}\Delta\psi\right],$$

$$M_\varphi = -D\left[\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right] - \frac{M}{1-\nu}, \tag{16}$$

$$Q_r = \Lambda'\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial X}{\partial r}, \quad Q_\varphi = \Lambda'\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial X}{\partial\varphi}. \tag{17}$$

Підставивши вирази для $p_{zr}^\pm$, $p_{z\varphi}^\pm$, M_r, $M_{r\varphi}$, M_φ, Q_r, Q_φ з (11), (16) і (17) у рівняння (5) і (6), переконуємось, що вони тотожно задовольняються в тому випадку, коли

$$\frac{(1-\nu)D}{2}\Delta\psi - \Lambda'\psi = 0, \tag{18}$$

$$D\Delta\phi + \Lambda'(w-\phi) = h(\ell^+ + \ell^-) - X - \frac{M}{1-\nu}, \tag{19}$$

$$\Lambda'\Delta(w-\phi) = -(\Delta X + p_{zz}^+ - p_{zz}^-). \tag{20}$$

Підставимо в рівняння (20) вираз $\Delta\phi$ з (19). З отриманого рівняння виразимо ϕ через w:

$$\phi = (1+\varepsilon\Delta)w + \tilde{\phi}, \tag{21}$$

де

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\Lambda'}\left[-h(\ell^+ + \ell^-) + \varepsilon(p_{zz}^+ - p_{zz}^-) + (1+\varepsilon\Delta)X + \frac{M}{1-\nu}\right], \tag{22}$$

$$\varepsilon = \frac{D}{\Lambda'}. \tag{23}$$

Внесемо вираз (21) у рівняння (20) і після простих перетворень отримаємо

$$D\Delta\Delta w = -f, \tag{24}$$

де

$$f = -h\Delta(\ell^+ + \ell^-) - (1-\varepsilon\Delta)(p_{zz}^+ - p_{zz}^-) + \varepsilon\Delta\Delta X + \frac{\Delta M}{1-\nu}. \tag{25}$$

Підставивши вирази (12) у рівняння (1) і (13), отримаємо розв'язувальну систему рівнянь для визначення F, u і v. Підставивши вирази (12) у (7), отримаємо граничні умови для цієї системи. За знайденими F, u і v з формул (1) або з формул (12) можна визначити N_r, $N_{r\varphi}$ і N_φ. Підставивши вирази (16) і (17) у (8)–(10) і взявши до уваги рівність (21), прийдемо до граничних умов для розв'язувальної системи рівнянь (18) і (24) стосовно невідомих функцій ψ і w. За знайденими ψ і w з формул (15)–(17), використовуючи (21), можемо визначити γ_r, γ_φ, M_r, $M_{r\varphi}$, M_φ, Q_r і Q_φ.

3. Процедури отримання ідентичних за формою рівнянь деяких варіантів теорії пластинок. Відповідним підбором операторів N, $\tilde{Q}_r$ і $\tilde{Q}_\varphi$ (якщо знадобиться), оператора M, параметра Λ' і деяких інших величин з відповідних рівнянь групи (1)–(6) можна отримати рівняння деяких відомих варіантів теорії пластинок. Аналогічно відповідним підбором оператора N (якщо знадобиться), операторів M, X і деяких інших величин з відповідних рівнянь групи (1), (12), (13), (15)–(18), (21) і (24) можна отримати розв'язувальні рівняння деяких варіантів теорій пластинок.

3.1. Підставивши в рівняння (1)–(6) вирази

$$N = -\nu h(p_{zz}^+ + p_{zz}^-) + 2hE\alpha T^{(0)}, \qquad M = -\frac{\nu h^2}{3}(p_{zz}^+ - p_{zz}^-) + \frac{2}{3}h^2 E\alpha T^{(1)}, \tag{26}$$

$$\tilde{Q}_r = \frac{h}{6}(p^+_{zr} + p^-_{zr}), \quad \tilde{Q}_\varphi = \frac{h}{6}(p^+_{z\varphi} + p^-_{z\varphi}), \tag{27}$$

$$\Lambda' = \frac{5}{3}hG', \tag{28}$$

отримаємо систему рівнянь $\{m, n\}$-апроксимації термопружного стану трансверсально-ізотропних пластинок при $m = 1$, $n = 0$ [11]. До цієї системи рівнянь (позначимо її через $(*_1)$) можна приєднати крайові умови виду (7)–(10).

Якщо тепер розглянемо співвідношення (22), (25), внесемо туди другий із виразів (26) і додатково покладемо

$$X = \frac{h}{6}(\ell^+ + \ell^-), \tag{29}$$

то отримаємо

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\Lambda'}\left\{-\frac{h}{6}(5 - \varepsilon\Delta)(\ell^+ + \ell^-) + \left[\varepsilon - \frac{\nu h^2}{3(1-\nu)}\right](p^+_{zz} - p^-_{zz}) + \frac{2h^2 E\alpha T^{(1)}}{3(1-\nu)}\right\},$$

$$f = -h\left(1 - \frac{\varepsilon}{6}\Delta\right)\Delta(\ell^+ + \ell^-) - \left\{1 - \left[\varepsilon - \frac{\nu h^2}{3(1-\nu)}\right]\Delta\right\}(p^+_{zz} - p^-_{zz}) +$$

$$+ \frac{2h^2 E\alpha\Delta T^{(1)}}{3(1-\nu)}. \tag{30}$$

Після підстановки виразів (26), (29) і (30) у рівняння (1), (12), (13), (15)–(18), (21) і (24) з наступним використанням співвідношень (23) і (28) отримаємо розв'язувальні рівняння методу $\{m, n\}$-апроксимації при $m = 1$, $n = 0$.

Відмітимо, що (29) не суперечить (11), (14) і (27).

3.2. Підставивши Λ' за формулою (28) у рівняння (1)–(6) і поклавши

$$p^\pm_{zr} = p^\pm_{z\varphi} = p^-_{zz} = 0, \qquad p^+_{zz} = -p, \tag{31}$$

$$N = 2hE\alpha T^{(0)}, \qquad M = \frac{2}{3}h^2 E\alpha T^{(1)}, \tag{32}$$

$$\tilde{Q}_r = \tilde{Q}_\varphi = 0, \tag{33}$$

отримаємо систему рівнянь теорії термопружності трансверсально-ізотропних пластинок типу Тимошенка [12, 16]. До цієї системи рівнянь (позначимо її $(*_2)$) можна приєднати крайові умови виду (7)–(10).

Якщо у виразах (22) і (25) покласти

$$\ell^\pm = 0, \qquad X = 0 \tag{34}$$

і взяти до уваги дві останні з рівностей (31) і другу з рівностей (32), то отримаємо

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\Lambda'}\left[-\varepsilon p + \frac{2h^2 E\alpha T^{(1)}}{3(1-\nu)}\right], \qquad f = (1 - \varepsilon\Delta)p + \frac{2h^2 E\alpha\Delta T^{(1)}}{3(1-\nu)}. \tag{35}$$

Відмітимо, що перша із рівностей (34) не суперечить (11) і (31), а друга – не суперечить (14) і (33).

Якщо розглянути рівняння (1), (12), (13), (15)–(18), (21) і (24) і внести в них вирази (32), (34) і (35) з подальшим використанням співвідношень (23) і (28), то отримаємо систему розв'язувальних рівнянь теорії пластинок типу Тимошенка [12, 16].

3.3. Підставивши в рівняння (2), (3), (5) і (6) вирази

$$p^\pm_{zr} = p^\pm_{z\varphi} = p^-_{zz} = 0, \qquad p^+_{zz} = -p, \tag{36}$$

$$M = \frac{2}{3}h^2 E\alpha T^{(1)}\,, \tag{37}$$

$$\tilde{Q}_r = \frac{h}{10}\Lambda'\alpha'\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}, \qquad \tilde{Q}_\varphi = \frac{h}{10}\Lambda'\alpha'\frac{1}{r}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \varphi}\,, \tag{38}$$

а далі в уже перетворені рівняння (2), (3), (5) і (6) підставивши вираз (28), отримаємо систему рівнянь термопружного згину трансверсально-ізотропних пластинок, отриману Б. Л. Пелехом у [9]. До цієї системи рівнянь (позначимо її ($*_3$)) можна приєднати крайові умови виду (8)–(10).

Підставивши в співвідношення (22) і (25) два останні з виразів (36), формулу (37), а також

$$\ell^{\pm} = 0, \qquad X = \frac{h}{10}\Lambda'\alpha' T^{(1)}\,, \tag{39}$$

отримаємо

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\Lambda'}\left[-\varepsilon p + \frac{2h^2 E\alpha T^{(1)}}{3(1-\nu)}\right] + \frac{h\alpha'}{10}(1+\varepsilon\Delta)T^{(1)}\,,$$

$$f = (1-\varepsilon\Delta)p + \left[\frac{2h^2 E\alpha}{3(1-\nu)} + \frac{hD\alpha'}{10}\Delta\right]\Delta T^{(1)}. \tag{40}$$

Відмітимо, що перша з рівностей (39) не суперечить (11) і (36), а друга – не суперечить (14) і (38).

Якщо підставити вирази (37), (39) і (40) у рівняння (15)–(18), (21), (24) і використати далі співвідношення (23) і (28), то отримаємо розв'язувальні рівняння згину пластинок, отримані у [9].

Розглянемо граничні випадки, коли $\Lambda' = 0$ і $\Lambda' \to \infty$.

3.4. Підставивши в рівняння (1)–(6) вирази

$$N = -\nu h(p_{zz}^{+} + p_{zz}^{-}), \qquad M = -\frac{\nu h^2}{3}(p_{zz}^{+} - p_{zz}^{-})\,, \tag{41}$$

$$\tilde{Q}_r = h(p_{zr}^{+} + p_{zr}^{-}), \qquad \tilde{Q}_\varphi = h(p_{z\varphi}^{+} + p_{z\varphi}^{-})\,, \tag{42}$$

$$\Lambda' = 0\,, \tag{43}$$

отримаємо систему рівнянь теорії ізотропних пластинок з наближеннями для напружень порядку $N = 1$ методу нормованих моментів І. Н. Векуа [7]. У цьому випадку w залишається невизначеним. Для цієї системи рівнянь (позначимо її ($*_4$)) можна розглядати крайову задачу із чотирма граничними умовами виду (7)–(9). До граничних умов такого виду приводять крайові задачі для абсолютно гладких жорстких втулкових зв'язків [7].

Нехай виконується умова (43) і співвідношення

$$\Delta(\ell^{+} - \ell^{-}) = 0\,, \tag{44}$$

$$X = h(\ell^{+} + \ell^{-})\,. \tag{45}$$

(рівність (44) наведена у [7]). Тоді рівняння (13), (18)–(20) набудуть вигляду

$$\Delta\Delta F = -\Delta N, \qquad \Delta\psi = 0, \qquad (1-\nu)D\Delta\phi = -M\,, \tag{46}$$

$$h\Delta(\ell^{+} + \ell^{-}) + p_{zz}^{+} - p_{zz}^{-} = 0\,. \tag{47}$$

Відмітимо, що (45) не суперечить (11), (14) і (42).

Підставивши вирази (41), (43) і (45) у рівняння (1), (12), (15)–(17) і (46), отримаємо систему розв'язувальних рівнянь методу нормованих моментів І. Н. Векуа з наближеннями для напружень порядку $N = 1$.

3.5. Якщо в рівняннях (1), (2), (4)–(6) покласти

$$p_{zr}^{\pm} = p_{z\varphi}^{\pm} = p_{zz}^{-} = 0, \qquad p_{zz}^{+} = -\,p\,, \tag{48}$$

$$N = 2hE\alpha T^{(0)}, \qquad M = \frac{2}{3}h^2 E\alpha T^{(1)}, \tag{49}$$

$$\gamma_r = -\frac{\partial w}{\partial r}, \qquad \gamma_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi},$$

то отримаємо систему рівнянь класичної теорії термопружності ізотропних пластинок [3, 13]. Система граничних умов (7)–(10) для цієї системи рівнянь (позначимо її ($*_5$)) є перевизначеною. Замість граничної умови (8) і граничних умов (9), (10) приймемо відповідно граничні умови [1, 3]

$$-\frac{\partial w}{\partial \ell} = g_\ell \qquad \text{або} \qquad M_\ell = M_\ell^*,$$

$$w = w^* \qquad \text{або} \qquad Q_\ell + \frac{\partial M_{\ell s}}{\partial s} = Q_\ell^* + \frac{\partial M_{\ell s}^*}{\partial s}, \tag{50}$$

де $\quad \dfrac{\partial}{\partial \ell} = \dfrac{\partial}{\partial r}\ell_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\ell_\varphi, \qquad \dfrac{\partial}{\partial s} = \dfrac{\partial}{\partial r}s_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}s_\varphi.$

Нехай

$$\ell^\pm = 0, \qquad X = 0. \tag{51}$$

Підставивши далі два останні вирази з (48), другий із виразів (49) і рівності (51) у (18), (19), (22) і (25) і прийнявши в отриманих співвідношеннях $\Lambda' \to \infty$ і $\varepsilon \to 0$, отримаємо

$$\psi = 0, \quad w = \phi, \quad \tilde{\phi} = 0, \quad f = p + \frac{2h^2 E\alpha\Delta T^{(1)}}{3(1-\nu)}. \tag{52}$$

Відмітимо, що перша із рівностей (51) не суперечить (11) і (48).

Підставивши відповідні вирази із (48), (49), (51) і (52) у рівняння (1), (5), (12), (13), (15), (16) і (24), отримаємо розв'язувальні рівняння класичної теорії пластинок.

Нижче використаємо формулу

$$\frac{\tilde{\phi}}{\varepsilon} \to \frac{M}{(1-\nu)D} \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to 0, \tag{53}$$

яка безпосередньо випливає зі співвідношень (22), (23) і (51).

4. Симетричне деформування кільцевої пластинки. Розглянемо задачу про симетричне деформування кільцевої пластинки радіуса b з концентричним круговим отвором радіуса a, внутрішня бокова поверхня якої защемлена, а на зовнішній задано сталі значення напружень і моментів (***задача А***). Також вважаємо, що

$$p_{zr}^\pm = p_{zr}^\pm(r), \qquad p_{z\varphi}^\pm = 0, \qquad p_{zz}^- = p_{zz}^-(r), \tag{54}$$

$$-p_{zz}^+ = p(r) = p, \tag{55}$$

$$T^{(0)} = T^{(0)}(r), \tag{56}$$

$$T^{(1)} = T^{(1)}(r), \tag{57}$$

У цьому випадку пластинка деформується симетрично відносно центру. Тоді

$$u = u(r), \quad v = v(r), \quad w = w(r), \quad \gamma_r = \gamma_r(r), \quad \gamma_\varphi = \gamma_\varphi(r). \tag{58}$$

Оскільки N, M, $\tilde{Q}_r$ і $\tilde{Q}_\varphi$ є лінійними однорідними операторами відносно пар функцій $p_{zz}^\pm$, $T^{(0)}$; $p_{zz}^\pm$, $T^{(1)}$; $p_{zr}^\pm$, $\dfrac{\partial T^{(1)}}{\partial r}$ і $p_{z\varphi}^\pm$, $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T^{(1)}}{\partial \varphi}$ відповідно, то з огляду на формули (54)–(57) запишемо

$$N = N(r), \quad M = M(r), \quad \tilde{Q}_r = \tilde{Q}_r(r), \quad \tilde{Q}_\varphi = 0 . \tag{59}$$

З (1)–(3), (58) і (59) випливає, що

$$N_r = N_r(r), \quad N_{r\varphi} = N_{r\varphi}(r), \quad N_\varphi = N_\varphi(r) ,$$

$$M_r = M_r(r), \quad M_{r\varphi} = M_{r\varphi}(r), \quad M_\varphi = M_\varphi(r) ,$$

$$Q_r = Q_r(r), \quad Q_\varphi = Q_\varphi(r) . \tag{60}$$

Крім того, будемо вважати, що

$$\phi = \phi(r), \qquad \psi = \psi(r) , \tag{61}$$

що не суперечить (15) і двом останнім з формул (58).

З (11) і перших чотирьох з формул (54) випливає, що

$$\ell^{\pm} = \ell^{\pm}(r) . \tag{62}$$

Із (14) і двох останніх з формул (59) випливає, що

$$X = X(r) . \tag{63}$$

Відповідно до (22), (25), (54), (55), (59), (62) і (63) маємо

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(r), \qquad f = f(r) . \tag{64}$$

Прийнявши $\ell_r = s_\varphi = -1$, $\ell_\varphi = s_r = 0$ і $f_\ell = f_s = g_\ell = g_s = w^* = 0$ у перших зі співвідношень (7)–(10), а також прийнявши $\ell_r = s_\varphi = 1$, $\ell_\varphi = s_r = 0$ і виконавши заміну індексів ℓ і r та s і φ у других зі співвідношень (7)–(10), отримаємо граничні умови для *задачі* ***A***:

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad r = a , \tag{65}$$

$$N_r = N_r^*, \quad N_{r\varphi} = N_{r\varphi}^* \quad \text{при} \quad r = b , \tag{66}$$

$$\gamma_r = 0 \quad \text{при} \quad r = a , \qquad M_r = M_r^* \quad \text{при} \quad r = b , \tag{67}$$

$$\gamma_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad r = a , \qquad M_{r\varphi} = M_{r\varphi}^* \quad \text{при} \quad r = b , \tag{68}$$

$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = a , \qquad Q_r = Q_r^* \quad \text{при} \quad r = b . \tag{69}$$

Тут величини N_r^*, $N_{r\varphi}^*$, M_r^*, $M_{r\varphi}^*$ і Q_r^* є заданими сталими.

Підставивши в рівняння (1) і (13) вирази (12) і врахувавши відповідні формули з (58)–(60) і формули (62), отримаємо систему рівнянь, яка містить функції F, u і v. Позначимо її через ($*_6$). Підставивши відповідні вирази з (12) у (66) і об’єднавши отримані співвідношення і співвідношення (65), отримаємо граничні умови для системи рівнянь ($*_6$)). Позначимо ці граничні умови через ($*_7$)). Розв’язок системи рівнянь ($*_6$)), що задовольняє граничні умови ($*_7$), виберемо у вигляді

$$F(r,\varphi) = C_{F1} + C_{F2} \ln r + C_{F3} r^2 + C_{F4}\varphi + F_{\mathrm{part}}(r) , \tag{70}$$

$$u(r) = -\frac{r}{2hE}\left\{(1+\nu)\frac{C_{F2}}{r^2} - 2(1-\nu)C_{F3} - F_{\mathrm{part}}^{(2)}(r) + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu}{r} F_{\mathrm{part}}^{(1)}(r) + (1-\nu)[\ell^+(r) - \ell^-(r)] - N(r)\right\},$$

$$v(r) = \frac{1+\nu}{2hE}\left(\frac{r}{a^2} - \frac{1}{r}\right) C_{F4} . \tag{71}$$

Тут C_{F1} – сталий доданок, який залишається невизначеним, а C_{Fj}, $j = 2,3,4$, є такими:

$$C_{F2} = \frac{(1-\nu)a^2b^2}{a^2+b^2+\nu(b^2-a^2)}\left[-\frac{1}{b}F^{(1)}_{\text{part}}(b)+\ell^+(b)-\ell^-(b)+N_r^*\right],$$

$$C_{F3} = \frac{(1+\nu)b^2}{2[a^2+b^2+\nu(b^2-a^2)]}\left[-\frac{1}{b}F^{(1)}_{\text{part}}(b)+\ell^+(b)-\ell^-(b)+N_r^*\right],$$

$$C_{F4} = b^2N^*_{r\varphi},$$

$$F_{\text{part}}(r) = \int_a^r \frac{1}{r_2}\int_a^{r_2} r_1\{(1-\nu)[\ell^+(r_1)-\ell^-(r_1)]-N(r_1)\}\,dr_1\,dr_2\,. \qquad (72)$$

У (71) і (72) використано позначення

$$F^{(i)}_{\text{part}}(r) = \frac{d^iF_{\text{part}}(r)}{dr^i}, \qquad i=1,2\,.$$

(Тут замість частинних введено повні похідні.)

Підставивши тепер вираз F із (70) у (12) і зважаючи на відповідні формули із (60) і формули (62), отримаємо вирази для N_r, $N_{r\varphi}$ і N_φ (позначимо їх ($*_8$)). Слід відмітити, що у виразах ($*_8$) стала C_{F1} відсутня.

Підставивши в рівняння (24) відповідні формули з (58) і (64), отримаємо звичайне диференціальне рівняння для w. Розв’язок цього рівняння шукатимемо у вигляді

$$w(r) = C_{w1}+C_{w2}\ln\frac{r}{a}+C_{w3}(r^2-a^2)+C_{w4}r^2\ln\frac{r}{a}+w_{\text{part}}(r)\,, \qquad (73)$$

де $w_{\text{part}}(r)$ – частковий розв’язок неоднорідного рівняння (24):

$$w_{\text{part}}(r) = -\int_a^r\frac{1}{r_4}\int_a^{r_4} r_3\int_a^{r_3}\frac{1}{r_2}\int_a^{r_2}\frac{r_1f(r_1)}{D}\,dr_1\,dr_2\,dr_3\,dr_4\,. \qquad (74)$$

Підставивши вираз (21) у перші формули (15)–(17) і врахувавши відповідні формули з (58)–(61), (64) і формулу (63), отримаємо вирази для γ_r, M_r і Q_r через w. Підставивши ці вирази в (67), (69) і врахувавши (73), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів C_{w1}, C_{w2}, C_{w3} і C_{w4}. Розв’язавши цю систему рівнянь, отримаємо

$$C_{w1} = 0\,,$$

$$\begin{aligned} C_{w2} = \frac{ab^2}{a^2+b^2+\nu(b^2-a^2)}\Big\langle -2a\left[(1+\nu)\left(\frac{2\varepsilon}{a^2}-\ln\frac{b}{a}\right)+2(1-\nu)\frac{\varepsilon}{b^2}-1\right]C_{w4} - \\ -(1+\nu)\tilde\varphi^{(1)}(a)+a\left\{\frac{1}{b}\left[\nu+(2-\nu)\frac{\varepsilon}{b^2}\right]w^{(1)}_{\text{part}}(b)+\right. \\ +\left[1-(2-\nu)\frac{\varepsilon}{b^2}\right]w^{(2)}_{\text{part}}(b)+(1+\nu)\frac{\varepsilon}{b}w^{(3)}_{\text{part}}(b)+\varepsilon w^{(4)}_{\text{part}}(b)+ \\ \left.+\tilde\varphi^{(2)}(b)+\frac{\nu}{b}\tilde\varphi^{(1)}(b)+\frac{1}{(1-\nu)D}M(b)+\frac{1}{D}M_r^*\right\}\Big\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{w3} = -\frac{ab^2}{2[a^2+b^2+\nu(b^2-a^2)]}\Big\langle\left\{(1-\nu)\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}\left[(1+\nu)\left(2\ln\frac{b}{a}+1\right)+2\right]\right\}C_{w4}+ \\ +\frac{1-\nu}{b^2}\tilde\varphi^{(1)}(a)+\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{b}\left[\nu+(2-\nu)\frac{\varepsilon}{b^2}\right]w^{(1)}_{\text{part}}(b)+\right. \end{aligned}$$

$$+\left[1-(2-\nu)\frac{\varepsilon}{b^2}\right]w_{\text{part}}^{(2)}(b)+(1+\nu)\frac{\varepsilon}{b}w_{\text{part}}^{(3)}(b)+\varepsilon w_{\text{part}}^{(4)}(b)+$$

$$+\tilde{\phi}^{(2)}(b)+\frac{\nu}{b}\tilde{\phi}^{(1)}(b)+\frac{1}{(1-\nu)D}M(b)+\frac{1}{D}M_r^*\Bigg\}\Bigg\rangle,$$

$$C_{w4}=\frac{b}{4}\left[\frac{1}{b^2}w_{\text{part}}^{(1)}(b)-\frac{1}{b}w_{\text{part}}^{(2)}(b)-w_{\text{part}}^{(3)}(b)-\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\phi}^{(1)}(b)+\frac{1}{D}X^{(1)}(b)-\frac{1}{D}Q_r^*\right]. \tag{75}$$

Тут використано такі позначення:

$$\tilde{\phi}^{(i)}(r)=\frac{d^i\tilde{\phi}(r)}{dr^i},\quad i=1,2,$$

$$w_{\text{part}}^{(j)}(r)=\frac{d^j w_{\text{part}}(r)}{dr^j},\quad j=1,\ldots,4$$

$$X^{(1)}(r)=\frac{dX(r)}{dr}.$$

Підставивши другу з формул (61) у рівняння (18), отримаємо звичайне диференціальне рівняння для визначення ψ (позначимо його ($*_9$)). Якщо тепер розглянемо співвідношення (68) і внесемо туди відповідні вирази з (15) і (16) з урахуванням припущень (61), то отримаємо граничні умови для рівняння ($*_9$) (позначимо їх ($*_{10}$)). Розв'язок рівняння ($*_9$)), що задовольняє граничні умови ($*_{10}$), запишемо у вигляді

$$\psi(r)=-\frac{2M_{r\varphi}^*[K_1(ka)I_0(kr)+I_1(ka)K_0(kr)]}{(1-\nu)k^2D[K_1(ka)I_2(kb)+I_1(ka)K_2(kb)]}, \tag{76}$$

де $k^2=\dfrac{2}{(1-\nu)\varepsilon}$; I_m і K_m, $m=0,1,2$, – відповідно функції Бесселя другого роду і функції Макдональда m-го порядку [8].

Підставивши вираз w із (73) у (21) і взявши до уваги першу з формул (64), отримаємо вираз для ϕ. Підставивши цей вираз і вираз для ψ із (76) у (15)–(17) і взявши до уваги відповідні формули з (58)–(60) і формулу (63), отримаємо вирази для γ_r, γ_φ, M_r, $M_{r\varphi}$, M_φ, Q_r і Q_φ (позначимо їх ($*_{11}$)).

Побудову процедури розв'язування задачі про симетричне деформування кільцевої пластинки на основі ідентичних за формою рівнянь деяких варіантів теорії пластинок завершено. Співвідношення, що фігурують у цій процедурі, використаємо при розв'язуванні відповідних задач на основі окремих варіантів теорії пластинок.

Якщо виконуються (28), (54)–(57), то для визначення u, v, N_r, $N_{r\varphi}$, N_φ, γ_r, γ_φ, w, M_r, $M_{r\varphi}$, M_φ, Q_r і Q_φ в задачі ($*_1$), (54)–(57), (65)–(69) скористаємось (23), (26), (29), (30), (71)–(75), ($*_8$) і ($*_{11}$) (позначимо цю групу формул ($*_{12}$)).

Якщо виконуються (28), (55)–(57), то для визначення u, v, N_r, $N_{r\varphi}$, N_φ, γ_r, γ_φ, w, M_r, $M_{r\varphi}$, M_φ, Q_r і Q_φ в задачі ($*_2$), (55)–(57), (65)–(69) скористаємось (23), (32), (34), (35), (71)–(75), ($*_8$) і ($*_{11}$) (позначимо цю групу формул ($*_{13}$)).

Якщо виконуються (23), (55) і (57), то для визначення γ_r, γ_φ, w, M_r, $M_{r\varphi}$, M_φ, Q_r і Q_φ в задачі ($*_3$), (55), (57), (67)–(69) скористаємось (37), (39), (40), (73)–(75) і ($*_{11}$) (позначимо цю групу формул ($*_{14}$)).

Розглянемо тепер випадок класичної теорії пластинок.

Підставивши $\gamma_r = -\frac{dw}{dr}$ у співвідношення (65)−(67) і (69), отримаємо граничні умови для <u>*задачі **A***</u> для класичної теорії пластинок. Ці співвідношення (позначимо їх ($*_{15}$)) можна отримати із (7) і (50) подібно до того, як було отримано співвідношення (65)−(67) і (69), коли $M_{\ell s} = M^*_{\ell s} = 0$ при $r = b$.

Покажемо тепер, як отримати вирази для C_{w2}, C_{w3} C_{w4} і моментів для <u>*задачі **A***</u> у випадку класичної теорії пластинок (C_{w1} визначено в (75), $C_{w1} = 0$). Приймаючи в (75), що параметр $\varepsilon \to 0$, і враховуючи другу з формул (51), третю з формул (52) і формулу (53), приходимо до виразів для C_{w2}, C_{w3} і C_{w4} (позначимо їх ($*_{16}$)). Підставивши перші два вирази з (52) у (16), а потім підставивши в отримані співвідношення вираз для w із (73) і врахувавши відповідні формули з (59) і (60), отримаємо рівність $M_{r\varphi} = 0$ і вирази для M_r і M_φ (позначимо їх ($*_{17}$)). Якщо підставити ці вирази в рівняння (5) і врахувати відповідні формули із (48) і (60), прийдемо до співвідношень, з яких легко можна отримати рівність $Q_\varphi = 0$ і вираз для Q_r (позначимо його ($*_{18}$)).

Якщо виконуються (55)−(57), то для визначення u, v, N_r, $N_{r\varphi}$, N_φ, w, M_r, M_φ і Q_r в задачі ($*_5$), (55)−(57), ($*_{15}$) скористаємося (49), (51), (52), (71)−(74), ($*_8$), ($*_{16}$), ($*_{17}$) і ($*_{18}$) (позначимо цю групу формул ($*_{19}$)).

Розглянемо тепер задачу ($*_4$), (54), (55), (65)−(68) і будемо вимагати, щоб виконувались умови (44) і (47). У цій задачі вирази для u, v, N_r, $N_{r\varphi}$ і N_φ співпадають з відповідними виразами в задачі ($*_1$), (54)−(57), (65)−(69), коли $T^{(0)} = 0$, проте на процес визначення γ_r, γ_φ, M_r, $M_{r\varphi}$, M_φ, Q_r і Q_φ наведені вище схеми, очевидно, не поширюються.

5. Концентрація зусиль і моментів біля отвору. Визначимо коефіцієнти концентрації зусиль і моментів поблизу отвору для <u>*задачі **A***</u> у випадках, коли серед величин, що характеризують вид механічних і теплових навантажень у задачі ($*_1$), (54)−(57), (65)−(69) або в задачі ($*_2$), (55)−(57), (65)−(69), або в задачі ($*_3$), (55), (57), (67)−(69), або в задачі ($*_5$), (55)−(57), ($*_{15}$), одна буде сталою, відмінною від нуля, або функцією, яка не дорівнює тотожно нулеві, що змінюється лише в напрямку r, а інші параметри будуть приймати нульові значення.

У задачі ($*_1$), (54)−(57), (65)−(69) вид механічних і теплових навантажень повністю характеризується величинами

$$\ell^-,\ \ell^+,\ p^-_{zz},\ p,\ T^{(0)},\ T^{(1)},\ N^*_r,\ N^*_{r\varphi},\ M^*_r,\ M^*_{r\varphi},\ Q^*_r. \tag{77}$$

У задачі ($*_2$), (55)−(57), (65)−(69) опускаємо величини ℓ^-, ℓ^+ і p^-_{zz}, у задачі ($*_3$), (55), (57), (67)−(69) − величини ℓ^-, ℓ^+, p^-_{zz}, $T^{(0)}$, N^*_r і $N^*_{r\varphi}$, у задачі ($*_5$), (55)−(57), ($*_{15}$) − величини ℓ^-, ℓ^+, p^-_{zz} і $M^*_{r\varphi}$.

У тому чи іншому випадку будемо порівнювати результати для тих варіантів теорії пластинок, що містять величину із (77), яку в розглядуваному випадку не вважаємо тотожно рівною нулеві. При цьому не будемо аналізувати результати для теорії пластинок, побудованої методом нормованих моментів І. Н. Векуа, оскільки в її рамках неможливо забезпечити виконання першої з умов (69).

Розглянемо такі випадки.

1°. Нехай у формулах ($*_{12}$) усі величини з (77) дорівнюють нулеві, за винятком $\ell^{+} = \tau r$, де $\tau = \text{const} \neq 0$. Тоді на основі формул ($*_{12}$) коефіцієнти концентрації зусиль і моментів будуть такими:

$$k_r^{(0)} = \frac{6N_r(a)}{h\tau} = -\frac{2[(1-\nu)a^3 + 3(1+\nu)ab^2 - 2(2+\nu)b^3]}{h[a^2 + b^2 + \nu(b^2 - a^2)]},$$

$$k_\varphi^{(0)} = \frac{6N_\varphi(a)}{h\tau} = \nu k_r^{(0)},$$

$$k_r^{(1)} = \frac{18M_r(a)}{h^2\tau} = 3k_r^{(0)},$$

$$k_\varphi^{(1)} = \frac{18M_\varphi(a)}{h^2\tau} = \nu k_r^{(1)}.$$

2°. Нехай $p = \text{const} \neq 0$ у формулах ($*_{12}$), ($*_{13}$), ($*_{14}$) і ($*_{19}$), а інші величини з (77) там або відсутні, або приймаються рівними нулеві. Тоді на основі формул ($*_{12}$) для коефіцієнтів концентрації зусиль і моментів маємо

$$k_r^{(0)} = \frac{N_r(a)}{\nu hp} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2 + \nu(b^2 - a^2)},$$

$$k_\varphi^{(0)} = \frac{N_\varphi(a)}{\nu hp} = -\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + \nu(b^2 - a^2)},$$

$$k_r^{(1)} = \frac{3M_r(a)}{\nu h^2 p} = -\Big\{(b^2 - a^2)[3(a^2 + b^2) + 3\nu(3b^2 - a^2) - 8\nu h^2] -$$

$$- 12b^4(1+\nu)\ln\frac{b}{a}\Big\}\{8\nu h^2[a^2 + b^2 + \nu(b^2 - a^2)]\}^{-1}, \qquad (78)$$

$$k_\varphi^{(1)} = \frac{3M_\varphi(a)}{\nu h^2 p} = -\Big\{3(b^2 - a^2)[a^2 + b^2 + \nu(3b^2 - a^2)] + 8h^2(a^2 + b^2) -$$

$$- 12b^4(1+\nu)\ln\frac{b}{a}\Big\}\{8h^2[a^2 + b^2 + \nu(b^2 - a^2)]\}^{-1},$$

$$k_{rz}^{(0)} = \frac{Q_r(a)}{\nu hp} = \frac{a^2 - b^2}{2\nu ah}, \qquad (79)$$

а на основі формул ($*_{13}$), ($*_{14}$) і ($*_{19}$) маємо

$$k_r^{(1)} = \frac{3M_r(a)}{\nu h^2 p} = -\Big\{3(b^2 - a^2)[a^2 + b^2 + \nu(3b^2 - a^2)] -$$

$$- 12b^4(1+\nu)\ln\frac{b}{a}\Big\}\{8\nu h^2[a^2 + b^2 + \nu(b^2 - a^2)]\}^{-1}, \qquad (80)$$

$$k_\varphi^{(1)} = \frac{3M_\varphi(a)}{\nu h^2 p} = \nu k_r^{(1)},$$

$$k_{rz}^{(0)} = \frac{Q_r(a)}{\nu hp} = -\frac{b^2 - a^2}{2\nu ah}. \qquad (81)$$

3°. Нехай $T^{(0)} = T^{*} = \text{const} \neq 0$ у формулах ($*_{12}$), ($*_{13}$) і ($*_{19}$), а інші величини з (77) там або відсутні, або приймаються рівними нулеві. Тоді з огляду на ці формули коефіцієнти концентрації зусиль будуть такими:

$$k_r^{(0)} = \frac{N_r(a)}{2hE\alpha T^*} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2 + \nu(b^2 - a^2)},$$

$$k_\varphi^{(0)} = \frac{N_\varphi(a)}{2hE\alpha T^*} = -\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + \nu(b^2 - a^2)}.$$

4°. Нехай $T^{(1)} = T^* = \text{const} \neq 0$ у формулах ($*_{12}$), ($*_{13}$), ($*_{14}$) і ($*_{19}$), а інші величини з (77) там або відсутні, або приймаються рівними нулеві. Тоді на основі цих формул для коефіцієнтів концентрації моментів маємо

$$k_r^{(1)} = \frac{3M_r(a)}{2h^2 E\alpha T^*} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2 + \nu(b^2 - a^2)},$$

$$k_\varphi^{(1)} = \frac{3M_\varphi(a)(a)}{2h^2 E\alpha T^*} = -\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + \nu(b^2 - a^2)}.$$

5°. Нехай $N_r^* \neq 0$ у формулах ($*_{12}$), ($*_{13}$) і ($*_{19}$), а інші величини з (77) там або відсутні, або приймаються рівними нулеві. Тоді з огляду на ці формули коефіцієнти концентрації зусиль будуть такими:

$$k_r^{(0)} = \frac{N_r(a)}{N_r^*} = \frac{2b^2}{a^2 + b^2 + \nu(b^2 - a^2)},$$

$$k_\varphi^{(0)} = \frac{N_\varphi(a)}{N_r^*} = \nu k_r^{(0)}.$$

6°. Нехай $M_r^* \neq 0$ у формулах ($*_{12}$), ($*_{13}$), ($*_{14}$) і ($*_{19}$), а інші величини з (77) там або відсутні, або приймаються рівними нулеві. Тоді на основі цих формул для коефіцієнтів концентрації моментів маємо

$$k_r^{(1)} = \frac{M_r(a)}{M_r^*} = \frac{2b^2}{a^2 + b^2 + \nu(b^2 - a^2)},$$

$$k_\varphi^{(1)} = \frac{M_\varphi(a)}{M_r^*} = \nu k_r^{(1)}.$$

7°. Нехай $M_{r\varphi}^* \neq 0$ у формулах ($*_{12}$), ($*_{13}$) і ($*_{14}$), а інші величини з (77) там або відсутні, або приймаються рівними нулеві. Тоді з огляду на ці формули отримуємо значення коефіцієнта концентрації

$$k_{r\varphi}^{(1)} = \frac{M_{r\varphi}(a)}{M_{r\varphi}^*} = \frac{1}{ka[K_1(ka)I_2(kb) + I_1(ka)K_2(kb)]}.$$

В усіх розглянутих випадках наведено значення величин коефіцієнтів концентрації тільки для тих зусиль і моментів, що не дорівнюють тотожно нулеві при $r = a$.

З наведених результатів випливає, що

- значення коефіцієнтів концентрації для розглянутих теорій для випадків ***3°*** − ***7°*** співпадають;
- для випадку ***2°*** значення коефіцієнтів концентрації для N_r, N_φ, M_r і M_φ за методом $\{m, n\}$-апроксимації при $m = 1$, $n = 0$ і за теорією типу Тимошенка, теорією, запропонованою Пелехом у [9], і класичною теорією, відрізняються. Порівнюючи формули (78) і (80) та (79) і (81), помічаємо, що додаткові члени, що входять у вирази (78) і (79), є малими у випадку, коли товщина пластинки є малою порівняно з радіусом отвору.

Висновки. Побудовано рівняння тонких пластинок сталої товщини в полярних координатах, з яких можна отримати рівняння $\{1,0\}$-апроксимації термопружного стану трансверсально-ізотропних пластинок, теорії термопружності трансверсально-ізотропних пластинок типу Тимошенка, теорії термопружного згину трансверсально-ізотропних пластинок, побудованої у [9], теорії ізотропних пластинок з наближеннями для напружень порядку $N = 1$ методу нормованих моментів І. Н. Векуа і класичної теорії термопружності ізотропних пластинок. Як приклад використання побудованих рівнянь розглянуто задачу про симетричне деформування кільцевої пластинки, коли внутрішня бокова поверхня пластинки защемлена, а на зовнішній задано сталі значення напружень і моментів. Для деяких характерних видів симетричних механічних чи теплових навантажень наведено значення коефіцієнтів концентрації зусиль і моментів поблизу отвору.

1. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. – Москва: Высш. шк., 1976. – 272 с.
2. *Боков И. П., Бондаренко Н. С., Стрельникова Е. А.* Анализ фундаментальных решений уравнений статики, построенных для трансверсально-изотропных пластин // Сх.-Євр. журн. передових технологій. – 2017. – **2**, № 7(86). – С. 4–12.
3. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 517 с.
   Те саме: *Boley B. A., Weiner J. H.* Theory of thermal stresses. – New York–London: J. Wiley & Sons, Inc., 1960. – 586 p.
4. *Бондаренко Н. С.* Изотропная пластина с теплопроницаемым разрезом при действии температурных градиентов, приводящих к изгибу // Проблеми обчисл. механіки і міцності конструкцій. – 2014. – Вип. 23. – С. 52–63.
5. *Бондаренко Н. С., Гольцев А. С.* Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплоизолированным разрезом в случае симметричного теплообмена // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2013. – № 2. – С. 20–26.
6. *Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А.* Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтелект-Захід, 2007. – 240 с
7. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – Москва: Наука, 1982. – 288 с.
8. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. – Москва: Высш. шк., 1970. – 712 с.
9. *Пелех Б. Л.* Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. – Киев: Наук. думка, 1977. – 182 с.
10. *Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 280 с.
11. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 216 с.
12. *Рикардс Р. Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
13. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
    Те саме: *Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. – New York [etc.]: McGraw Hill, 1959. – xiv+580 p.
14. *Lim G. T., Reddy J. N.* On canonical bending relationships for plates // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40**, No. 12. – P. 3039–3067.
    https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00084-2.
15. *Meunargia T.* On the refined theories of elastic plates // Appl. Mathematics, Informatics, Mechanics (Georgia). – 2014. – **19**, No. 1. – P. 53–67.
16. *Zozulya V. V.* A high order theory for linear thermoelastic shells: comparison with classical theories // J. Eng. – 2013. – **2013**, Article ID 590480. – 19 p.
    http://dx.doi.org/10.1155/2013/590480.
17. *Wang C. M., Lim G. T., Reddy J. N., Lee K. H.* Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories // Eng. Struct. – 2001. – **23**, No. 7. – P. 838–849.
    https://doi.org/10.1016/S0141-0296(00)00092-4.

АНАЛИЗ ИДЕНТИЧНЫХ ПО ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ВАРИАНТОВ ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Построены уравнения термоупругости трансверсально-изотропных тонких пластинок постоянной толщины, являющиеся идентичными по форме уравнениями некоторых вариантов теории пластинок в полярных координатах. Из этих уравнений можно получить уравнения отдельных уточненных теорий упругости или термоупругости изотропных или трансверсально-изотропных пластинок, а также уравнения классической теории термоупругости изотропных пластинок. В качестве примера использования построенных уравнений рассмотрено симметричное деформирование кольцевой пластинки. Для некоторых характерных видов симметричных механических или тепловых нагрузок приведены значения коэффициентов концентрации усилий и моментов около отверстия.

ANALYSIS OF THE IDENTICAL IN FORM EQUATIONS OF SOME VARIANTS OF THE THEORY OF PLATES IN POLAR COORDINATES

The thermoelasticity equations for transversely isotropic thin plates of constant thickness, which are identical in form to the equations of some variants of the theory of plates in polar coordinates, are constructed. From these equations it is available to obtain the equations of certain refined theories of the elasticity or thermoelasticity of isotropic or transversely isotropic plates as well as the equations of the classical theory of the thermoelasticity of isotropic plates. As an example of the use of the derived equations, a symmetric deformation of an annular plate is considered. For some characteristic types of symmetric mechanical or thermal loads, the values of the stresses and moments concentration coefficients near the hole are given.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.08.17