УДК 517.956.4

Г. П. Малицька, І. В. Буртняк✉

ВИРОДЖЕНІ ПАРАБОЛІЧНІ СИСТЕМИ ТИПУ ДИФУЗІЇ З ІНЕРЦІЄЮ

Для вироджених параболічних систем типу Колмогорова з довільною скінченною кількістю груп змінних виродження та залежними від часової змінної коефіцієнтами параболічної частини досліджено задачу Коші, побудовано її фундаментальну матрицю розв'язків та встановлено оцінки для її похідних.

Ключові слова: *система Колмогорова, рівняння дифузії з інерцією, вироджене параболічне рівняння, матриця Ґріна, фундаментальна матриця.*

Вступ. Системи типу Колмогорова, що мають виродження за однією змінною, досліджено в [5]. В [4] метод Леві застосовано до систем дифузії з інерцією, що мають коефіцієнти, залежні від часової і двох просторових змінних. Робота [3] присвячена одному класу систем типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною, коефіцієнтами, залежними від часової змінної, та двома групами змінних, за якими є виродження параболічності. Фундаментальну матрицю розв’язків задачі Коші (ФМРЗК) для систем другого порядку із трьома групами змінних виродження параболічності і коефіцієнтами, залежними від t, побудовано в [6]. Рівняння типу Колмогорова з двома групами змінних, які містять виродження параболічності, вивчалися багатьма науковцями. Їхні результати проаналізовано і розвинуто у праці [8]. Рівняння Колмогорова з трьома, чотирма та p групами змінних виродження розглянуто в роботах [2, 6, 9, 11]. Зазначимо, що ультрапараболічні рівняння мають широке застосування при дослідженні процесів ціноутворення на фондових ринках [7]. У цій статті побудовано ФМРЗК для одного класу вироджених параболічних систем з коефіцієнтами, залежними від часової змінної, і довільною скінченною кількістю груп змінних, за якими є виродження параболічності.

1. Формулювання задачі та основного результату. Розглянемо систему n рівнянь:

$$\partial_t u_j(t,x) - \sum_{s=1}^{p-1}\sum_{\mu=1}^{n_{s+1}} x_{s,\mu}\partial_{x_{s+1,\mu}} u_j(t,x) = \\ = \sum_{r=1}^{n}\sum_{|k|\le 2b} a_k^{(jr)}(t) D_{x_1}^k u_r(t,x), \quad j=1,\dots,n\,, \tag{1}$$

де $(t,x)\in \Pi_{(0,T]} = \{(t,x) : t\in(0,T], x\in \mathbb{R}^m\}$, $x := (x_1,\dots,x_p)$, $x_s := (x_{s,1},\dots,x_{s,n_s}) \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s=1,\dots,p$, $n_1 \ge n_2 \ge \dots \ge n_p$, $m = \sum_{s=1}^{p} n_s$; n_s, p, b, m – задані натуральні числа; $k := (k_1,\dots,k_{n_1})$, $k_j \ge 0$, $|k| = k_1 + \dots + k_{n_1}$,

$$\sum_{|k|\le 2b} a_k^{(jr)}(t)\, D_{x_1}^k u_r(t,x) = \sum_{|k|\le 2b} a_{k_1,\dots,k_{n_1}}^{(jr)}(t)(-i)^k \frac{\partial^k u_r}{\partial x_{1,1}^{k_1}\dots \partial x_{1,n_1}^{k_{n_1}}}.$$

Припускатимемо, що коефіцієнти $a_k^{(jr)}(t)$ – комплекснозначні неперервні функції на $t\in[0,T]$ такі, що система

$$\partial_t w_j(t,x) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{|k|\le 2b} a_k^{(jr)}(t) D_{x_1}^k w_r(t,x) \tag{2}$$

✉ bvanya@meta.ua

є рівномірно параболічною за Петровським у замиканні $\Pi_{[0,T]}$ множини $\Pi_{(0,T]}$. Для зручності запишемо систему (1) у матричній формі

$$\partial_t u - \sum_{s=1}^{p-1} x'_s \partial_{x_{s+1}} u = \sum_{|k|\le 2b} A_k(t) D_{x_1}^k u \,, \tag{3}$$

де $x'_s := (x_{s,1}, \ldots, x_{s,n_{s+1}})$. Задача Коші для системи (1) полягає у знаходженні розв'язку, що задовольняє початкову умову

$$u(t,x)\big|_{t=\tau} = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^m \,, \tag{4}$$

де $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $\tau \ge 0$ − фіксоване число. Будемо вважати, що $\varphi_j(x)$ − гладкі фінітні функції, які мають неперервні похідні до порядку $m+1$ включно.

Означення. Під ФМРЗК (1), (4) будемо розуміти квадратну матрицю $G(t,x;\tau,\xi)$ порядку n таку, що $G(t,x;\tau,\xi)$ є розв'язком системи (1) для будь-яких $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$, $t > \tau$ та $\xi \in \mathbb{R}^m$, і для будь-якої гладкої фінітної функції $\varphi(x)$ та довільного $\tau \in [0,T)$ формула

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^m} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi$$

визначає розв'язок системи (1) в $\Pi_{(\tau,T]}$, який справджує умову (4).

Будемо розглядати системи (1) такі, для яких виконуються умови

$$\sum_{|k|=2b} A_k(t)\,\sigma_1^k = \sum_{|k|=2b} \gamma_{k_1,k_2,\ldots,k_{n_1}}(t)\,\sigma_1^{k_1} \ldots \sigma_{n_1}^{k_{n_1}} A_0, \qquad t \in [0,T] \,, \tag{5}$$

де A_0 − матричний сталий множник, $\sum_{|k|=2b} \gamma_{k_1,k_2,\ldots,k_{n_1}}(t)\,\sigma_1^{k_1} \ldots \sigma_{n_1}^{k_{n_1}}$ − однорідна функція для всіх $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\sigma_1 \ne 0$.

Теорема 1. *Існує ФМРЗК* (1), (4) $G(t, x+iy; \tau,\xi)$, *який при* $t > \tau$ *є цілою функцією дійсних аргументів* $X_1, \ldots, X_p$,

$$X_{1,k} = \frac{x_{1,k} - \xi_{1,k}}{(t-\tau)^{1/(2b)}}, \qquad k = 1, \ldots, n_1 \,,$$

$$X_{2,k} = \frac{x_{2,k} - \xi_{2,k} + x_{1,k}(t-\tau)}{(t-\tau)^{(2b+1)/(2b)}}, \quad k = 1, \ldots, n_2 \,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$X_{p,k} = \frac{x_{p,k} - \xi_{p,k} + x_{p-1,k}(t-\tau) + x_{p-2,k}\dfrac{(t-\tau)^2}{2!} + \ldots + x_{1,k}\dfrac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!}}{(t-\tau)^{[(p-1)2b+1]/(2b)}},$$

$$k = 1, \ldots, n_p \,,$$

з порядком спадання $q = 2b/(2b-1)$ *і з таким самим порядком росту за змінною* y, $y \in \mathbb{R}^m$. *Справджуються оцінки*

$$\left|D_x^k G(t, x+iy; \tau,\xi)\right| \le C_k (t-\tau)^M \times$$

$$\times \exp\left\{ -c_0 \left(|X|^q - c_1 \sum_{j=1}^{p} \left| y_j (t-\tau)^{-[2b(j-1)+1]/(2b)} \right|^q \right) \right\},$$

$$t > \tau, \qquad x, y \in \mathbb{R}^m, \qquad c_0, c_1, C_k > 0 \,,$$

$$|k| = \sum_{j=1}^{p} |k_j|, \qquad M = -\sum_{j=1}^{p} \left(n_j + |k_j|\right) \frac{(j-1)2b+1}{2b},$$

де c_0, c_1, C_k *залежать від* m, k, T, $\max\left|a_k^{(jr)}\right|$, *а також від константи* δ_0 *параболічності системи* (2) (*див.* [10, 12]).

2. Побудова ФМРЗК.

2.1. Випадок сталих коефіцієнтів. Нехай система (1) містить тільки похідні порядку $|k| = 2b$ за x_1 і коефіцієнти $a_k^{(jr)}$ є сталими. Розглянемо для такої системи задачу Коші з початковими умовами при $t = \tau$:

$$\partial_t u_j(t,x) - \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{\mu=1}^{n_{s+1}} x_{s,\mu} \partial_{x_{s+1,\mu}} u_j(t,x) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{|k|=2b} a_k^{(jr)} D_{x_1}^k u_r(t,x),$$

$$j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$u_j(t,x)\big|_{t=\tau} = \varphi_j(x), \qquad x \in \mathbb{R}^m, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

де φ_j − гладкі фінітні функції. З умови рівномірної параболічності системи (2) маємо, що корені $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ рівняння $\det\left\| \sum_{|k|=2b} A_k \sigma_1^k - \lambda I \right\| = 0$, де A_k − коефіцієнти системи (3), I − одинична матриця порядку n, задовольняють умову

$$\max_j \operatorname{Re} \lambda_j(\sigma_1) \le -\delta_0, \qquad \sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \qquad |\sigma_1|^2 = \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^2 = 1, \tag{8}$$

з деякою константою параболічності $\delta_0 > 0$ для будь-якого $t \in [0, T]$. Зведемо задачу (6), (7) до задачі Коші для системи рівнянь із частинними похідними першого порядку. Для цього компоненти $u_1(t,x), \ldots, u_n(t,x)$ розв'язку задачі (6), (7) шукатимемо у вигляді оберненого перетворення Фур'є за x від невідомих функцій $v_1(t,\sigma), \ldots, v_n(t,\sigma)$, при цьому $u_j(t,x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} \int_{\mathbb{R}^m} v_j(t,\sigma) \exp\{i(x,\sigma)\}\, d\sigma$. Одержимо таку задачу Коші:

$$\partial_t v(t,\sigma) + \sum_{s=1}^{p-1} \sigma_{s+1} \partial_{\sigma_s'} v(t,\sigma) = \sum_{|k|=2b} A_k \sigma_1^k v(t,\sigma), \tag{9}$$

$$v(t,\sigma)\big|_{t=\tau} = \psi(\sigma), \qquad \sigma \in \mathbb{R}^m, \tag{10}$$

де

$$\psi(\sigma) := F[\varphi(x)](\sigma) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{-i(x,\sigma)\} \varphi(x)\, dx.$$

Оскільки функції φ_j є гладкими та фінітними, то їхні перетворення Фур'є ψ_j є аналітичними функціями, для яких справджуються нерівності

$$\left|\psi_j(\sigma)\right| \le C\left(1 + |\sigma|\right)^{-d}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

для досить великого натурального числа d, $d \ge m + 1$.

У задачі (9), (10) $\sigma := (\sigma_2, \ldots, \sigma_p)$ − параметр. Система (9) є системою диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку, еквівалентною до такої системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$dt = \frac{d\sigma_{1,1}}{\sigma_{2,1}} = \frac{d\sigma_{2,1}}{\sigma_{3,1}} = \ldots = \frac{d\sigma_{p-1,1}}{\sigma_{p,1}} = \frac{d\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}} = \frac{d\sigma_{2,2}}{\sigma_{3,2}} = \ldots =$$

$$= \frac{d\sigma_{p-1,2}}{\sigma_{p,2}} = \frac{d\sigma_{1,n_p}}{\sigma_{2,n_p}} = \ldots = \frac{d\sigma_{p-1,n_p}}{\sigma_{p,n_p}} = \ldots = \frac{d\sigma_{j-1,n_s}}{\sigma_{j,n_s}} =$$

$$= \frac{d\sigma_{1,n_2}}{\sigma_{2,n_2}} = \frac{dv_1}{\sum\limits_{r=1}^{n}\sum\limits_{|k|=2b} a_k^{(1r)}\sigma_1^k v_r} = \ldots = \frac{dv_n}{\sum\limits_{r=1}^{n}\sum\limits_{|k|=2b} a_k^{(nr)}\sigma_1^k v_r}.$$

Ця система містить $\sum\limits_{j=2}^{p} n_j + m + 1$ рівнянь. Запишемо її перші інтеграли:

$$\sigma_{1,j} = \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\sigma_{p,j} + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}c_{p-1,j}^{(1)} + \ldots + c_{1,j}^{(1)} := \rho_{1,j}, \quad j = 1,\ldots,n_2,$$

$$\sigma_{2,j} = \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\sigma_{p-1,j} + \frac{t^{p-3}}{(p-3)!}c_{p-2,j}^{(2)} + \ldots + c_{1,j}^{(2)} := \rho_{2,j}, \quad j = 1,\ldots,n_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sigma_{r,j} = \frac{t^{p-r+1}}{(p-r+1)!}\sigma_{r-1,j} + \frac{t^{p-r}}{(p-r)!}c_{p-(r-1),j}^{(r-1)} + \ldots + c_{r,j}^{(r-1)} := \rho_{r,j},$$
$$j = 1,\ldots,n_{r+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sigma_{p-1,j} = t\sigma_{p,j} + c_{p-1,j}^{(p-1)} := \rho_{p-1,j}, \quad j = 1,\ldots,n_p.$$

Позначимо

$$\rho(t,\sigma,c) := (\rho_{1,1},\ldots,\rho_{1,n_2},\sigma_{1,n_2+1},\ldots,\sigma_{1,n_1},\rho_{2,1},\ldots,\rho_{2,n_3},\sigma_{2,n_3+1},\ldots,$$
$$\sigma_{2,n_2},\ldots,\rho_{p-1,n_p},\sigma_{p-1,n_p+1},\ldots,\sigma_{p-1,n_{p-1}},\sigma_{p,1},\ldots,\sigma_{p,n_p}),$$

$$\rho_1(t,\sigma,c) := (\rho_{1,1},\ldots,\rho_{1,n_2},\sigma_{1,n_2+1},\ldots,\sigma_{1,n_1}).$$

Враховуючи позначення, одержимо систему рівнянь на характеристиках

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{|k|=2b} A_k \rho_1^k(t,\sigma,c)v \qquad (12)$$

з початковою умовою

$$v(t,\rho(t,\sigma,c))\big|_{t=\tau} = \psi(\rho(\tau,\sigma,c)). \qquad (13)$$

Задача (12), (13) має єдиний розв'язок при $0 \le \tau < t \le T < +\infty$. Оскільки, згідно з припущенням, виконуються умови Лаппо-Данилевського [1], то матриця $\left(\sum\limits_{|k|=2b} a_k^{(jr)}\rho_1^k\right)_{j,r}^n$ комутує з $\left(\sum\limits_{|k|=2b}\int\limits_{\tau}^{t} a_k^{(jr)}\rho_1^k\, d\theta\right)_{j,r}^n$ і розв'язок задачі має вигляд

$$v(t,\rho(t,\sigma,c)) = \exp\left\{\int\limits_{\tau}^{t}\sum_{|k|=2b} A_k\rho_1^k(\beta,\sigma,c)\,d\beta\right\}\psi(\rho(\tau,\sigma,c)).$$

Знайдемо $c_{1,1}^{(1)},\ldots,c_{p-1,n_p}^{(p-1)}$ з відповідних перших інтегралів

$$c_{1,j}^{(1)} = \sigma_{1,j} - \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\sigma_{p,j} - \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\sigma_{p-1,j} + \ldots + (-1)^{(p-1)}t\sigma_{2,j}, \quad j = 1,\ldots,n_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$c_{r,j}^{(r)} = \sigma_{r,j} - \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\sigma_{p,j} + \ldots + (-1)^{(r-1)}t\sigma_{2,j}, \quad j = 1,\ldots,n_{r+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$c_{p-1,j}^{(p-1)} = \sigma_{p-1,j} - t\sigma_{p,j}, \qquad j = 1,\ldots,n_p.$$

Враховуючи початкові умови, одержимо

$$v(t,\sigma)=\exp\left\{\int_{\tau}^{t}\sum_{|k|=2b}A_k\rho_{1*}^{k}(t-\beta,\sigma)\,d\beta\right\}\psi\bigl(\rho_*(t-\tau,\sigma)\bigr),$$

де

$$\begin{aligned}\rho_*(t-\tau,\sigma)=\Bigl(&\sigma_{1,1}+(\tau-t)\sigma_{2,1}+\ldots+\frac{(\tau-t)^{p-1}}{(p-1)!}\sigma_{p,1},\ldots,\\&\sigma_{1,n_2}+(\tau-t)\sigma_{2,n_2},\sigma_{1,n_2+1},\ldots,\sigma_{1,n_1},\\&\sigma_{2,1}+(\tau-t)\sigma_{3,1}+\ldots+\frac{(\tau-t)^{p-2}}{(p-2)!}\sigma_{p,n_1},\ldots,\\&\sigma_{2,n_3}+(\tau-t)\sigma_{3,n_3},\sigma_{2,n_3+1},\ldots,\sigma_{p-1,n_p}+(\tau-t)\sigma_{p,n_p},\\&\sigma_{p-1,n_p+1},\ldots,\sigma_{p-1,n_p-1},\sigma_{p,1},\ldots,\sigma_{p,n_p}\Bigr),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{1*}(t-\tau,\sigma)=\Bigl(&\sigma_{1,1}+(\tau-t)\sigma_{2,1}+\ldots+\frac{(\tau-t)^{p-1}}{(p-1)!}\sigma_{p,1},\ldots,\\&\sigma_{1,n_p}+(\tau-t)\sigma_{2,n_p}+\ldots+\frac{(\tau-t)^{p-1}}{(p-1)!}\sigma_{p,n_p},\\&\sigma_{1,n_2}+(\tau-t)\sigma_{2,n_2},\sigma_{1,n_2+1},\ldots,\sigma_{1,n_1}\Bigr).\end{aligned}$$

Знайдемо $u(t,x)$:

$$\begin{aligned}u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}}\int_{\mathbb{R}^m}\exp\Bigl\{&i(x,\sigma)+\\&+\int_{\tau}^{t}\sum_{|k|=2b}A_k\rho_{1*}^{k}(t-\beta,\sigma)\,d\beta\Bigr\}\psi(\rho_*(t-\tau,\sigma))\,d\sigma.\end{aligned}\tag{14}$$

В інтегралі (14) зробимо заміну змінних $\rho_*(t-\tau,\sigma)=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}}\int_{\mathbb{R}^m}\exp\Bigl\{&i\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1,j},\alpha_{1,j})+i\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2,j}+(t-\tau)x_{1,j},\alpha_{2,j})+\ldots+\\&+i\sum_{j=1}^{n_p}\Bigl(x_{p,j}+(t-\tau)x_{p-1,j}+\ldots+\frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!}x_{1,j},\alpha_{p,j}\Bigr)+\\&+\int_{\tau}^{t}\sum_{|k|=2b}A_k\rho_{1*}^{k}(\beta-\tau,\alpha)\,d\beta\,\psi(\alpha)\Bigr\}d\alpha.\end{aligned}\tag{15}$$

З (15) випливає, що ФМРЗК має вигляд

$$\begin{aligned}G(t,x;\tau,\xi)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}}\int_{\mathbb{R}^m}\exp\Bigl\{&i\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1,j}-\xi_{1,j},\alpha_{1,j})+\\&+i\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2,j}-\xi_{2,j}+(t-\tau)x_{1,j},\alpha_{2,j})+\ldots+\\&+i\sum_{j=1}^{n_p}\Bigl(x_{p,j}-\xi_{p,j}+(t-\tau)x_{p-1,j}+\ldots+\frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!}x_{1,j},\alpha_{p,j}\Bigr)+\\&+\int_{\tau}^{t}\sum_{|k|=2b}A_k\rho_{1*}^{k}(\beta-\tau,\alpha)\,d\beta\Bigr\}d\alpha.\end{aligned}\tag{16}$$

***2.2. Обґрунтування існування* (16)**. Щоб обґрунтувати існування (16) і дослідити властивості $G(t,x;\tau,\xi)$ при $t>\tau$, $x,\xi\in\mathbb{R}^m$, зробимо заміну змінних $\theta = \dfrac{\beta - \tau}{t - \tau}$, $\dfrac{\alpha_{\ell,j}(t-\tau)^{[2b(\ell-1)+1]/(2b)}}{(\ell-1)!} = \sigma_{\ell,j}$, $\ell = 1,\ldots,p$, $j = 1,\ldots,n_\ell$. Тоді $\int\limits_\tau^t \rho_{1*}^k(\beta-\tau,\alpha)\,d\beta = \int\limits_0^1 \rho_{1**}^k(\theta,\sigma)\,d\theta$, де $\rho_{1**}^k(\theta,\sigma) = (\sigma_{1,1} + \theta\sigma_{2,1} + \ldots + \theta^{p-1}\sigma_{p,1},\ldots,$ $\sigma_{1,n_2} + \theta\sigma_{1,n_2}, \sigma_{1,n_2+1},\ldots,\sigma_{1,n_1})$, тому

$$
\begin{aligned}
G(t,x;\tau,\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \exp\Bigg\{ & i\sum_{j=1}^{n_1}\left(x_{1,j} - \xi_{1,j}, \frac{\sigma_{1j}}{(t-\tau)^{1/(2b)}}\right) + \\
& + i\sum_{j=1}^{n_2}\left(x_{2,j} - \xi_{2,j} + (t-\tau)x_{1,j}, \frac{\sigma_{2j}}{(t-\tau)^{1+1/(2b)}}\right) + \ldots + \\
& + i\sum_{j=1}^{n_p}\Bigg(x_{p,j} - \xi_{p,j} + (t-\tau)x_{p-1,j} + \ldots + \\
& + \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!}x_{1,j}, \frac{\sigma_{pj}(p-1)!}{(t-\tau)^{(p-1)+1/(2b)}}\Bigg) + \\
& + \sum_{|k|=2b} A_k \int\limits_0^1 \rho_{1**}^k(\theta,\sigma)\,d\theta\Bigg\} d\sigma\,(t-\tau)^{-\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{2b(j-1)+1}{2b}n_j} \prod_{j=1}^{p-1}(j!)^{n_j},
\end{aligned}
$$

$$
t - \tau > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.
$$

Нехай λ_{0j}, $j = 1,\ldots,n$, – власні значення матриці A_0, $\lambda_j(\sigma_1)$, $j = 1,\ldots,n$, – власні значення матриці $\sum\limits_{|k|=2b} A_k\sigma_1^k$. Оскільки $\lambda_j(\sigma_1) = \lambda_{0j}\sum\limits_{|k|=2b}\gamma_k{\sigma_1}^k$, то $\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma_1) = \operatorname{Re}\lambda_{0j}\sum\limits_{|k|=2b}\gamma_k{\sigma_1}^k$. З умови параболічності (8) і формул (5) та (11) випливає, що $\max\limits_j \operatorname{Re}\lambda_j(\sigma_1) < -\delta_0\,|\sigma_1|^{2b}$, тому

$$
\max_j \operatorname{Re}\lambda_{0j}\sum_{|k|=2b}\gamma_k\rho_{1**}^k < -\delta_0\,|\rho_{1**}|^{2b}. \tag{17}
$$

Проінтегрувавши (17), одержимо

$$
\int\limits_0^1 \max_j \operatorname{Re}\lambda_j(\rho_{1**})\,d\theta = \max_j \operatorname{Re}\lambda_{0j}\int\limits_0^1 \sum_{|k|=2b}\gamma_k\rho_{1**}^k\,d\theta < -\delta_0\int\limits_0^1 |\rho_{1**}|^{2b}\,d\theta.
$$

Оскільки $\int\limits_0^1 |\rho_{1**}(\theta,\sigma)|^{2b}\,d\theta = |\sigma|^{2b}\int\limits_0^1 \left|\rho_{1**}\left(\theta,\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)\right|^{2b} d\theta$, то розглянемо $I = \int\limits_0^1 \left|\rho_{1**}\left(\theta,\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)\right|^{2b} d\theta$ як функцію від аргументів $\frac{\sigma}{|\sigma|}$ (тут $\left|\rho_{1**}\left(\theta,\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)\right|^{2b} > 0$ для всіх $\left|\frac{\sigma}{|\sigma|}\right|^2 = 1$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $\sigma \neq 0$). Інтеграл I як неперервна функція на компакті досягає свого найбільшого та найменшого значень w_1 і w_0 відповідно, $0 < w_0 < w_1$, тому запишемо

$$
\max_j \operatorname{Re}\lambda_{0j}\left(\int\limits_0^1 \rho_{1**}^k(\theta,\sigma)\,d\theta\right) < -\delta_0 w_0\,|\sigma|^{2b} = -\delta_1\,|\sigma|^{2b}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^m. \tag{18}
$$

Позначимо $\Lambda(\sigma + is) = \max\limits_j \operatorname{Re} \lambda_{0j} \sum\limits_{|k|=2b} \gamma_k \int\limits_0^1 \rho_{1**}^k(\theta, \sigma + is)\, d\theta$, врахувавши, що $\rho_{1**}(\theta, \sigma + is) = \rho_1(\theta, \sigma) + i\rho_1(\theta, s)$. Тоді, як і для випадку нерівності (18), одержимо оцінку

$$\Lambda(\sigma + is) < -\delta_2 |\sigma|^{2b} + B|s|^{2b},$$

$$\sigma, s \in \mathbb{R}^m, \qquad 0 < \delta_2 < \delta_1, \qquad B > 0. \tag{19}$$

Оскільки матриця

$$Q(\sigma) = \exp\left\{ \sum_{|k|=2b} A_k \int_0^1 \rho_{1**}^k(\theta, \sigma)\, d\theta \right\} A_0 = \exp\left\{ \sum_{|k|=2b} \gamma_k \int_0^1 \rho_{1**}^k(\theta, \sigma)\, d\theta\, A_0 \right\}$$

є цілою функцією, то з урахуванням оцінок (18), (19) отримаємо оцінку

$$|Q(\sigma + is)| < B_1 \exp\left\{ -\delta_3 |\sigma|^{2b} + B_2 |s|^{2b} \right\}, \qquad \sigma, s \in \mathbb{R}^m,$$

де B_1, B_2, δ_2 – додатні сталі, $0 < \delta_3 < \delta_2$. Перетворення Фур'є $Q(\sigma)$ є цілою функцією і справджується твердження теореми 1 з [10].

2.3. Випадок коефіцієнтів, залежних від t. Система (1) у цьому випадку має вигляд

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(t) \rho_1^k(t, \sigma, c) v \tag{20}$$

для будь-якого фіксованого $t_0 \in (0, T]$, $z = \sigma + is$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $s \in \mathbb{R}^m$,

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{|k|=2b} A_k(t_0) \rho_1^k(t, z, c) v +$$

$$+ \sum_{|k|=2b} \left(A_k(t) - A_k(t_0) \right) \rho_1^k(t, z, c) v + \sum_{|k|<2b} A_k(t) \rho_1^k(t, z, c) v.$$

Нехай $Q(t, \tau, \rho(t, z, c))$ – нормальна матриця системи (20),

$$Q(t, \tau, \rho(t, z, c))\big|_{t=\tau} = I,$$

$$v(t, \rho(t, \sigma, c)) = Q(t, \tau, \rho(t, \sigma, c)) \Psi(\rho(\tau, \sigma, c)). \tag{21}$$

Із (20) випливає, що

$$Q(t, \tau, \rho(t, z, c)) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} \sum\limits_{|k|=2b} A_k(t_0) \rho_1^k(\beta, z, c)\, d\beta} Q(t_0, \tau, \rho(t_0, z, c)) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e^{\int\limits_{\beta}^{t} \sum\limits_{|k|=2b} A_k(t_0) \rho_1^k(\theta, z, c)\, d\theta} \left\{ \sum_{|k|=2b} \left(A_k(t) - A_k(t_0) \right) \rho_1^k(\beta, z, c) + \right.$$

$$\left. + \sum_{|k|<2b} A_k(\beta) \rho_1^k(\beta, z, c) \right\} Q(\beta, \tau, \rho(\beta, z, c))\, d\beta.$$

Використавши лему Ґронуолла, одержимо оцінку для $|Q(t, \tau, \rho(t, z, c))|$:

$$|Q(t, \tau, \rho(t, z, c))| \le \left| Q(t_0, \tau, \rho(t, z, c)) \right| \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \sum_{|k|=2b} A_k(t_0) \rho_1^k(\theta, z, c) + \right.$$

$$+ \sum_{|k|=2b} |A_k(\beta) - A_k(t_0)| \left| \rho_1^k(\beta, z, c) \right| +$$

$$+ \sum_{|k|<2b} \left| A_k(\beta)\rho_1^k(\beta,z,c)\right| \Bigg\} d\beta \,\Bigg| . \qquad (22)$$

Оскільки

$$\max_j \operatorname{Re}\lambda_{0j} \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{|k|=2b} \gamma_k(t_0)\rho_1^k(\theta,z,c)d\theta <$$

$$< -\delta_4 \int\limits_{t_0}^{t} |\rho_1(\theta,\sigma,c)|^{2b}\, d\theta + B_5 \int\limits_{t_0}^{t} |\rho_1(\theta,s,c)|^{2b}\, d\theta$$

зі сталими $\delta_4 > 0$, $B_5 > 0$, то при $t_0 = \tau$, використавши рівномірну неперервність $A_k(t)$, з (22) одержимо

$$|Q(t,\tau,\rho(t,z,c))| \le$$

$$\le B \exp\left\{ -\delta_5 \int\limits_{t_0}^{t} |\rho_1(\theta,\sigma,c)|^{2b} d\theta + B_6 \int\limits_{t_0}^{t} |\rho_1(\theta,s,c)|^{2b} d\theta \right\} \qquad (23)$$

для $t \in (t_0, T]$, $B > 0$, $\delta_5 > 0$, $B_6 > 0$.

Підставивши у (21) замість змінної c значення перших інтегралів, одержимо

$$v(t,\sigma) = Q\big(t,\tau,\rho_*(t-\tau,\sigma)\big)\Psi\big(\rho_*(t-\tau,\sigma)\big).$$

Тому

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} Q\big(t,\tau,\rho_*(t-\tau,\sigma)\big)\Psi\big(\rho_*(t-\tau,\sigma)\big) \exp\{-i(x,\sigma)\}\, d\sigma .$$

Зробивши заміну змінних $\rho_*(t-\tau,\sigma) = \alpha$, матимемо

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \exp\Bigg\{ -i\sum_{j=1}^{n_1}(x_j,\alpha_j) - i\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2,j} + x_{2,j}(t-\tau),\alpha_j) -$$

$$- i\sum_{j=1}^{n_p}\Bigg(x_{p,j} + x_{p-1,j}(t-\tau) + \ldots +$$

$$+ x_{1,j}\frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!}, \alpha_{p,j} \Bigg)\Bigg\} Q(t,\tau,\alpha)\,\Psi(\alpha)\, d\alpha ,$$

тому $G(t,x;\tau,\xi)$ має вигляд

$$G(t,x;\tau,\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \exp\Bigg\{ i\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1,j} - \xi_{1,j}, \alpha_{1,j}) +$$

$$+ i\sum_{j=1}^{n_2}\big(x_{2,j} - \xi_{2,j} + (t-\tau)x_{1,j}, \alpha_{2,j}\big) + \ldots +$$

$$+ i\sum_{j=1}^{n_p}\Bigg(x_{p,j} - \xi_{p,j} + (t-\tau)x_{p-1,j} + \ldots +$$

$$+ \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!} x_{1,j}, \alpha_{p,j} \Bigg)\Bigg\} Q(t,\tau,\alpha)\, d\alpha .$$

Використавши (23), для $Q(t,\tau,\alpha + is)$ отримаємо оцінку

$$|Q(t,\tau,\alpha+is)| \le B_7 \exp\left\{ -\delta_6 \int_{t_0}^{t} |\rho_{1*}(t-\beta,\alpha)|^{2b} d\beta + \right.$$

$$\left. + B_8 \int_{t_0}^{t} |\rho_{1*}(t-\beta,s)|^{2b} d\theta \right\} \le$$

$$\le B^* \exp\left\{ -\delta \sum_{\ell=1}^{p} \left|\alpha_\ell (t-\tau)^{\ell-1}\right|^{2b} (t-\tau) + \right.$$

$$\left. + B^{**} \sum_{\ell=1}^{p} \left|s_\ell (t-\tau)^{\ell-1}\right|^{2b} (t-\tau) \right\}, \qquad (24)$$

де B_7, B_8, B^*, B^{**}, δ_6, δ – додатні сталі, $t > \tau$.

Для цілої функції $Q(t,\tau,\alpha+is)$, що задовольняє (24), її перетворення Фур'є за α, $F(Q) = G(t,x;\tau,\xi)$, є цілою функцією і виконується твердження теореми 1 з [8].

Висновки. У цій роботі розглянуто випадок, коли коефіцієнти виродженої параболічної системи залежать тільки від часу t. Цікавим для подальших досліджень є випадок, коли коефіцієнти системи залежать від (t,x).

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.
2. *Івасишен С. Д., Лаюк В. В.* Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 56–65.
3. *Литовченко В. А., Настасий Е. Б.* Вырожденные параболические системы уравнений типа Колмогорова векторного порядка // Сиб. мат. журн. – 2012. – **53**, № 1. – С. 148–164.
   Те саме: *Litovchenko V. A., Nastasiĭ E. B.* Degenerate parabolic systems of vector order Kolmogorov-type equations // Siberian Math. J. – 2012. – **53**, No. 1. – P. 119–133. – https://doi.org/10.1134/S0037446612010107.
4. *Малицкая А. П., Буртняк И. В.* Метод параметрикса для ультрапараболических систем // Карпат. мат. публікації. – 2010. – **2**, № 2. – С. 74–82.
5. *Малицька Г. П.* Системи рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 12. – С. 1650–1663.
   Те саме: *Malytska G. P.* Systems of equations of Kolmogorov type // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, No. 12. – P. 1937–1954.
6. *Burtnyak I. V., Malytska H. P.* Structure of the fundamental solution of Cauchy problem for Kolmogorov systems of second-order // J. Vasyl Stefanyk Precarpathian Nat. Univ. – 2015. – **2**, No. 4. – P. 9–22.
   https://doi.org/10.15330/jpnu.2.4.9-22.
7. *Burtnyak I., Malytska A.* Taylor expansion for derivative securities pricing as a precondition for strategic market decisions // Problems and Perspectives in Management. – 2018.– **16**, No. 1.– P. 224–231.
   https://doi.org/10.21511/ppm.16(1).2018.22.
8. *Cinti C., Pascucci A., Polidoro S.* Pointwise estimates for a class of non-homogeneous Kolmogorov equations // Math. Ann. – 2008. – **340**, No. 2.– P. 237–264.
   https://doi.org/10.1007/s00208-007-0147-6.
9. *Di Francesco M., Pascucci A.* On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // Appl. Math. Res. Express. – 2005. – **2005**, No. 3. – P. 77–116.
   https://doi.org/10.1155/AMRX.2005.77.
10. *Eidelman S. D.* Parabolic systems. – Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1969. – 475 p.
11. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.
12. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964. – xiv+347 p.

ВЫРОЖДЕННЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ТИПА ДИФФУЗИИ С ИНЕРЦИЕЙ

Для вырожденных параболических систем типа Колмогорова с произвольным конечным количеством групп переменных вырождения и зависящими от времени коэффициентами параболической части исследована задача Коши, построена ее фундаментальная матрица решений, установлены оценки для ее производных.

Ключевые слова: *система Колмогорова, уравнение диффузии с инерцией, вырожденное параболическое уравнение, матрица Грина, фундаментальная матрица.*

DEGENERATE PARABOLIC SYSTEM OF DIFFUSION TYPE WITH INERTIA

For a class of degenerate parabolic systems of Kolmogorov type with degeneration in an arbitrary finite number of groups of variables and time-dependent coefficients of the parabolic part, the Cauchy problem is investigated, its fundamental matrix of solutions is constructed, and estimates for its derivatives are established.

Key words: *Kolmogorov system, equation of diffusion with inertia, degenerate parabolic equation, Green matrix, fundamental matrix.*

Прикарпат. нац. ун-т
ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
04.03.18