УДК 517.98

Т. В. Василишин[*], М. М. Струтинський

АЛГЕБРИ СИМЕТРИЧНИХ $*$-ПОЛІНОМІВ НА ПРОСТОРІ $\mathbb{C}^2$

Досліджено симетричні $*$-поліноми на просторі $\mathbb{C}^2$. Зокрема, побудовано систему твірних елементів алгебри симетричних $*$-поліномів на просторі $\mathbb{C}^2$ і показано, що елементи цієї системи є алгебраїчно залежними. Також досліджено алгебри, які є поповненнями алгебри симетричних $*$-поліномів на просторі $\mathbb{C}^2$. Описано спектр, а також $*$-спектр алгебри Фреше абсолютно збіжних рядів із симетричних $*$-поліномів.

Ключові слова: **-поліном, симетричний *-поліном, алгебраїчна залежність, спектр алгебри Фреше, *-спектр алгебри Фреше.*

Вступ. Симетричні аналітичні функції і симетричні поліноми на банахових просторах вивчалися у роботах [3, 4, 6, 7, 9, 11–13] (див. також огляд [5]). З іншого боку, широкий клас, у загальному випадку неаналітичних функцій, близьких за своїми властивостями до аналітичних і названих $*$-поліномами у [2], вивчався у роботах [1, 2, 10, 14]. Симетричні $*$-поліноми на просторі $\mathbb{C}^2$ розглядалися в роботі [1]. У цій роботі авторами продовжується вивчення властивостей симетричних $*$-поліномів на просторі $\mathbb{C}^2$. Також вивчаються властивості алгебр, які є поповненнями алгебри симетричних $*$-поліномів на просторі $\mathbb{C}^2$. Зокрема, розглянуто алгебру Фреше симетричних функцій на $\mathbb{C}^2$, які можна подати у вигляді абсолютно збіжних рядів $*$-поліномів. Описано спектр, а також $*$-спектр цієї алгебри.

1. Симетричні $*$-поліноми на просторі $\mathbb{C}^2$. Позначимо через $\mathbb{Z}_+$ множину цілих невід'ємних чисел і через $\mathbb{N}$ – множину цілих додатних чисел.

Нехай X – комплексний банахів простір.

Означення 1. Відображення $A : X^{p+q} \to \mathbb{C}$, де $p, q \in \mathbb{Z}_+$, називають (p,q)*-лінійною формою,* якщо A є лінійним відносно перших p аргументів і антилінійним відносно останніх q аргументів, і (p,q)-лінійну форму A називають *симетричною,* якщо A є інваріантною відносно всіх можливих перестановок окремо перших p аргументів і останніх q аргументів. Зауважимо, що при $p = q = 0$ форма A є сталою.

Для скорочення форму $A(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{k_1},\ldots,\underbrace{x_m,\ldots,x_m}_{k_m})$ будемо записувати у вигляді $A(x_1^{k_1},\ldots,x_m^{k_m})$, де $x_1,\ldots,x_m \in X$ і $k_1+\ldots+k_m = p+q$.

Означення 2. Відображення $P : X \to \mathbb{C}$, для якого існують числа $p, q \in \mathbb{Z}_+$ та існує (p,q)-лінійна симетрична форма $A_P : X^{p+q} \to \mathbb{C}$ така, що $P(x) = A_P(x^{p+q})$ для всіх $x \in X$, називають (p,q)*-поліномом,* а форму A_P – (p,q)*-лінійною симетричною формою, асоційованою з* P.

Згідно з [14, Теорема 3.1], (p,q)-лінійну симетричну форму A_P, асоційовану з (p,q)-поліномом P, можна однозначно відновити за значеннями P за допомогою так званої поляризаційної формули.

Означення 3. Відображення $P : X \to \mathbb{C}$, яке можна подати у вигляді

[*] taras.v.vasylyshyn@gmail.com

$$P=\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{M}P_{pq},$$

де $N,M\in\mathbb{Z}_+$ і P_{pq} – (p,q)-поліноми для всіх $p\in\{0,\ldots,N\}$, $q\in\{0,\ldots,M\}$ називають $*$-*поліномом.*

Надалі обмежимося розглядом (p,q)-поліномів і $*$-поліномів на банаховому просторі $\mathbb{C}^2$ зі стандартною нормою і базисом $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$.

Нехай $p,q\in\mathbb{Z}_+$ такі, що $p\ge 1$ або $q\ge 1$. Нехай $P:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ – довільний (p,q)-поліном і A_P – (p,q)-лінійна симетрична форма, асоційована з P. Тоді для довільного $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$ отримаємо

$$P(z)=A_P(z,\ldots,z)=A_P(z_1e_1+z_2e_2,\ldots,z_1e_1+z_2e_2)=$$

$$=\sum_{p_1+p_2=p}\sum_{q_1+q_2=q}\frac{p!}{p_1!p_2!}\frac{q!}{q_1!q_2!}A_P(e_1^{p_1},e_2^{p_2},e_1^{q_1},e_2^{q_2})z_1^{p_1}z_2^{p_2}\overline{z}_1^{q_1}\overline{z}_2^{q_2}. \quad (1)$$

Означення 4. Функцію $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ називають *симетричною*, якщо $f((z_1,z_2))=f((z_2,z_1))$ для всіх $z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

Через $\mathcal{P}_s({}^{p,q}\mathbb{C}^2)$ позначимо лінійний простір усіх симетричних (p,q)-поліномів на $\mathbb{C}^2$, а через $\mathcal{P}_{*s}(\mathbb{C}^2)$ – алгебру усіх симетричних $*$-поліномів на $\mathbb{C}^2$.

Нехай $P\in\mathcal{P}_s({}^{p,q}\mathbb{C}^2)$. Згідно з формулою (1), враховуючи симетричність P, запишемо

$$P(z)=P((z_2,z_1))=\sum_{p_1+p_2=p}\sum_{q_1+q_2=q}\frac{p!}{p_1!p_2!}\frac{q!}{q_1!q_2!}\times$$

$$\times A_P(e_1^{p_1},e_2^{p_2},e_1^{q_1},e_2^{q_2})z_2^{p_1}z_1^{p_2}\overline{z}_2^{q_1}\overline{z}_1^{q_2} \quad (2)$$

для кожного $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$. Додамо формули (1) і (2). Поділивши обидві частини отриманої рівності на 2, отримаємо рівність

$$P(z)=\frac{1}{2}\sum_{p_1+p_2=p}\sum_{q_1+q_2=q}\frac{p!}{p_1!p_2!}\frac{q!}{q_1!q_2!}\times$$

$$\times A_P(e_1^{p_1},e_2^{p_2},e_1^{q_1},e_2^{q_2})(z_1^{p_1}z_2^{p_2}\overline{z}_1^{q_1}\overline{z}_2^{q_2}+z_2^{p_1}z_1^{p_2}\overline{z}_2^{q_1}\overline{z}_1^{q_2}).$$

Таким чином, кожен симетричний (p,q)-поліном P на $\mathbb{C}^2$ можна записати у вигляді

$$P(z)=\sum_{p_1+p_2=p}\sum_{q_1+q_2=q}\alpha_{p_1p_2q_1q_2}(z_1^{p_1}z_2^{p_2}\overline{z}_1^{q_1}\overline{z}_2^{q_2}+z_2^{p_1}z_1^{p_2}\overline{z}_2^{q_1}\overline{z}_1^{q_2}),$$

де

$$\alpha_{p_1p_2q_1q_2}=\frac{1}{2}\frac{p!}{p_1!p_2!}\frac{q!}{q_1!q_2!}A_P(e_1^{p_1},e_2^{p_2},e_1^{q_1},e_2^{q_2}).$$

Як наслідок, кожен симетричний $*$-поліном $P\in\mathcal{P}_{*s}(\mathbb{C}^2)$ можна подати у вигляді

$$P(z)=\sum_{k_1=0}^{K_1}\sum_{m_1=0}^{M_1}\sum_{k_2=0}^{K_2}\sum_{m_2=0}^{M_2}\beta_{k_1k_2m_1m_2}(z_1^{k_1}z_2^{k_2}\overline{z}_1^{m_1}\overline{z}_2^{m_2}+z_1^{k_2}z_2^{k_1}\overline{z}_1^{m_2}\overline{z}_2^{m_1}),$$

де K_1, K_2, M_1, M_2 – цілі невід'ємні числа.

Нехай

$$\tau_{10}(z) = z_1 + z_2, \qquad \tau_{01}(z) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \qquad \tau_{20}(z) = (z_1 - z_2)^2,$$

$$\tau_{02}(z) = (\overline{z}_1 - \overline{z}_2)^2, \qquad \tau_{11}(z) = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2). \tag{3}$$

Твердження 1. *Сукупність* $*$*-поліномів* (3) *є системою твірних елементів алгебри* $\mathcal{P}_{*s}(\mathbb{C}^2)$.

Д о в е д е н н я. Згідно з [1, Теорема 1], кожен симетричний $*$-поліном на $\mathbb{C}^2$ можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації так званих елементарних симетричних $*$-поліномів

$$\sigma_{10}(z_1, z_2) = z_1 + z_2, \qquad \sigma_{01}(z_1, z_2) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \qquad \sigma_{20}(z_1, z_2) = z_1 z_2,$$

$$\sigma_{02}(z_1, z_2) = \overline{z}_1 \overline{z}_2, \qquad \sigma_{11}(z_1, z_2) = z_1 \overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2. \tag{4}$$

Іншими словами, сукупність $*$-поліномів (4) є системою твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{*s}(\mathbb{C}^2)$. Можна безпосередньо переконатися у правильності таких рівностей:

$$\sigma_{10} = \tau_{10}, \qquad \sigma_{01} = \tau_{01}, \qquad \sigma_{20} = (\tau_{10}^2 - \tau_{20})/4,$$

$$\sigma_{02} = (\tau_{01}^2 - \tau_{02})/4, \qquad \sigma_{11} = (\tau_{10}\tau_{01} - \tau_{11})/2.$$

Таким чином, кожен симетричний $*$-поліном на $\mathbb{C}^2$ можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації $*$-поліномів (3). Твердження доведено. ♦

Зауважимо, що між елементами сукупності (3) існує алгебраїчна залежність

$$\tau_{11}^2 = \tau_{20}\tau_{02}. \tag{5}$$

Лема 1. *Нехай* Ω *− довільна нескінченна множина і* ω *− відображення із* Ω *в* $\mathbb{C}$, *для якого існують нескінченні множини* $A \subset [0, +\infty)$ *і* $\Phi \subset [0, 2\pi)$ *такі, що* $ae^{i\varphi} \in \omega(\Omega)$ *для всіх* $a \in A$ *і* $\varphi \in \Phi$. *Якщо для кожного* $t \in \Omega$

$$\sum_{k=0}^{K} \sum_{\ell=0}^{L} \alpha_{k\ell} (\omega(t))^k (\overline{\omega(t)})^\ell = 0,$$

де $K, L \in \mathbb{Z}_+$ *і* $\alpha_{k\ell} \in \mathbb{C}$, *то усі коефіцієнти* $\alpha_{k\ell}$ *дорівнюють нулеві.*

Д о в е д е н н я. Для $\varphi \in \Phi$ і $a \in A$ маємо

$$\sum_{k=0}^{K} \sum_{\ell=0}^{L} \alpha_{k\ell} (ae^{i\varphi})^k (ae^{-i\varphi})^\ell = 0.$$

Перепишемо цю рівність у вигляді

$$\sum_{k=0}^{K} \sum_{\ell=0}^{L} \alpha_{k\ell} e^{i\varphi(k-\ell)} a^{k+\ell} = 0.$$

При фіксованому φ ліва частина рівності є поліномом від a. Оскільки множина A є нескінченною, то такий поліном має нескінченну кількість коренів, тому тотожно дорівнює нулеві. Отже, усі коефіцієнти при степенях a дорівнюють нулеві. Коефіцієнт при a^m, де $m \in \{0, \ldots, K + L\}$, запишемо як

$$\sum_{k+\ell=m} \alpha_{k\ell} e^{i\varphi(k-\ell)}.$$

Отже, для кожного $\varphi \in \Phi$ маємо

$$\sum_{k+\ell=m} \alpha_{k\ell} e^{i\varphi(k-\ell)} = 0 .$$

Домноживши цю рівність на $e^{i\varphi m}$, отримаємо

$$\sum_{k+\ell=m} \alpha_{k\ell} e^{i\varphi\cdot 2k} = 0 .$$

Оскільки множина Φ є нескінченною, то звідси отримуємо, що поліном $\sum\limits_{k+\ell=m} \alpha_{k\ell} z^{2k}$ має нескінченну кількість коренів вигляду $z = e^{i\varphi}$. Тому усі коефіцієнти $\alpha_{k\ell}$ дорівнюють нулеві. Лему доведено. ♦

Теорема 1. *Кожен елемент f алгебри $\mathcal{P}_{*s}(\mathbb{C}^2)$ можна єдиним чином подати у вигляді*

$$f = p_1(\tau_{10}, \tau_{01}, \tau_{20}, \tau_{02}) + \tau_{11} p_2(\tau_{10}, \tau_{01}, \tau_{20}, \tau_{02}) , \tag{6}$$

де p_1 і p_2 − поліноми, які діють з $\mathbb{C}^4$ в $\mathbb{C}$.

Д о в е д е н н я. Згідно з твердженням 1, сукупність $*$-поліномів (3) є системою твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{*s}(\mathbb{C}^2)$. Тому кожен $f \in \mathcal{P}_{*s}(\mathbb{C}^2)$ можемо подати як суму доданків вигляду

$$\mu \tau_{10}^{k_1} \tau_{01}^{k_2} \tau_{20}^{k_3} \tau_{02}^{k_4} \tau_{11}^{k_5} ,$$

де $\mu \in \mathbb{C}$, $k_1, \ldots, k_5 \in \mathbb{Z}_+$. Враховуючи рівність (5), доданки, у яких k_5 є парним, можемо записати у вигляді

$$\mu \tau_{10}^{k_1} \tau_{01}^{k_2} \tau_{20}^{k_3 + k_5/2} \tau_{02}^{k_4 + k_5/2} ,$$

а доданки, у яких k_5 є непарним, − у вигляді

$$\mu \tau_{10}^{k_1} \tau_{01}^{k_2} \tau_{20}^{k_3 + (k_5-1)/2} \tau_{02}^{k_4 + (k_5-1)/2} \tau_{11} .$$

Таким чином, f можемо записати як

$$f = \sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{K} (\alpha_{k_1\ldots k_4} + \tau_{11}\beta_{k_1\ldots k_4}) \tau_{10}^{k_1} \tau_{01}^{k_2} \tau_{20}^{k_3} \tau_{02}^{k_4} , \tag{7}$$

де $K \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha_{k_1\ldots k_4}$, $\beta_{k_1\ldots k_4} \in \mathbb{C}$. Тепер доведемо єдиність такого подання. Припустимо, що існує також подання

$$f = \sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{K} (\gamma_{k_1\ldots k_4} + \tau_{11}\delta_{k_1\ldots k_4}) \tau_{10}^{k_1} \tau_{01}^{k_2} \tau_{20}^{k_3} \tau_{02}^{k_4} . \tag{8}$$

Віднявши тотожність (8) від тотожності (7) і ввівши позначення $\varepsilon_{k_1\ldots k_4} = \alpha_{k_1\ldots k_4} - \gamma_{k_1\ldots k_4}$ і $\eta_{k_1\ldots k_4} = \beta_{k_1\ldots k_4} - \delta_{k_1\ldots k_4}$, отримаємо тотожність

$$\sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{K} (\varepsilon_{k_1\ldots k_4} + \tau_{11}\eta_{k_1\ldots k_4}) \tau_{10}^{k_1} \tau_{01}^{k_2} \tau_{20}^{k_3} \tau_{02}^{k_4} = 0 . \tag{9}$$

Покажемо, що усі коефіцієнти $\varepsilon_{k_1\ldots k_4}$ і $\eta_{k_1\ldots k_4}$ є нульовими. Для кожного фіксованого $b \in \mathbb{C}$ формулою $g_b(t) = (t, t+b)$ введемо відображення $g_b : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$. Тоді

$$\tau_{10}(g_b(t)) = 2t + b, \qquad \tau_{01}(g_b(t)) = \overline{2t+b} ,$$

$$\tau_{20}(g_b(t)) = b^2, \qquad \tau_{02}(g_b(t)) = \overline{b}^2, \qquad \tau_{11}(g_b(t)) = b\overline{b} .$$

Підставивши знайдені значення у (9), отримаємо

$$\sum_{k_1,\dots,k_4=0}^{K}(\varepsilon_{k_1\dots k_4}+b\bar{b}\eta_{k_1\dots k_4})(2t+b)^{k_1}(\overline{2t+b})^{k_2}b^{2k_3}\bar{b}^{2k_4}=0.$$

Застосувавши лему 1, у якій покладемо $\Omega=\mathbb{C}$ і $\omega(t)=2t+b$, отримаємо, що

$$\sum_{k_3,k_4=0}^{K}(\varepsilon_{k_1\dots k_4}+b\bar{b}\eta_{k_1\dots k_4})b^{2k_3}\bar{b}^{2k_4}=0 \tag{10}$$

для всіх $k_1,k_2\in\{0,\dots,K\}$ і $b\in\mathbb{C}$. Перепишемо (10) у вигляді

$$\sum_{k_3,k_4=0}^{K}(\varepsilon_{k_1\dots k_4}b^{2k_3}\bar{b}^{2k_4}+\eta_{k_1\dots k_4}b^{2k_3+1}\bar{b}^{2k_4+1})=0. \tag{11}$$

Тепер застосуємо лему 1, поклавши $\Omega=\mathbb{C}$ і $\omega(b)=b$. Зважаючи на (11),

$$\sum_{k_3,k_4=0}^{K}\left(\varepsilon_{k_1\dots k_4}(\omega(b))^{2k_3}(\overline{\omega(b)})^{2k_4}+\eta_{k_1\dots k_4}(\omega(b))^{2k_3+1}(\overline{\omega(b)})^{2k_4+1}\right)=0$$

для всіх $b\in\mathbb{C}$. Тому, згідно з лемою 1, усі коефіцієнти $\varepsilon_{k_1\dots k_4}$ і $\eta_{k_1\dots k_4}$ дорівнюють нулеві. Теорему доведено. ♦

Наслідок 1. $*$*-поліноми* τ_{10}, τ_{01}, τ_{20}, τ_{02} *є алгебраїчно незалежними.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що існує поліном $q:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}$,

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{\ell_1,\dots,\ell_4=0}^{L}\alpha_{\ell_1\dots\ell_4}x_1^{\ell_1}x_2^{\ell_2}x_3^{\ell_3}x_4^{\ell_4}$$

такий, що

$$q(\tau_{10}(z),\tau_{01}(z),\tau_{20}(z),\tau_{02}(z))=0 \tag{12}$$

для кожного $z\in\mathbb{C}^2$. Покажемо, що q тотожно дорівнює нулеві. Зауважимо, що $*$-поліном $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$,

$$f=\sum_{\ell_1,\dots,\ell_4=0}^{L}\alpha_{\ell_1\dots\ell_4}\tau_{10}^{\ell_1}\tau_{01}^{\ell_2}\tau_{20}^{\ell_3}\tau_{02}^{\ell_4}$$

належить алгебрі $\mathcal{P}_{*s}(\mathbb{C}^2)$. З іншого боку, внаслідок рівності (12), f тотожно дорівнює нулеві:

$$f=\sum_{\ell_1,\dots,\ell_4=0}^{L}0\tau_{10}^{\ell_1}\tau_{01}^{\ell_2}\tau_{20}^{\ell_3}\tau_{02}^{\ell_4}.$$

Згідно з теоремою 1, подання (6) є єдиним, тому усі коефіцієнти $\alpha_{\ell_1\dots\ell_4}$ є нульовими. Отже, q тотожно дорівнює нулеві. Наслідок доведено. ♦

2. Спектр алгебри Фреше $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$. Для $r>0$ позначимо через $W_{*s}^{(r)}$ алгебру усіх функцій f вигляду

$$f=\sum_{k_1,\dots,k_4=0}^{\infty}(\alpha_{k_1\dots k_4}+\tau_{11}\beta_{k_1\dots k_4})\tau_{10}^{k_1}\tau_{01}^{k_2}\tau_{20}^{k_3}\tau_{02}^{k_4}, \tag{13}$$

для яких є скінченною норма

$$\|f\|_r=\sum_{k_1,\dots,k_4=0}^{\infty}\left(|\alpha_{k_1\dots k_4}|+r^2|\beta_{k_1\dots k_4}|\right)r^{k_1+k_2+2k_3+2k_4}.$$

Зі скінченності норми $\|f\|_r$ випливає, що функція f визначена, щонайменше, на полікрузі $\{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \max(|z_1|,|z_2|) < r/2\}$.

Зауважимо, що із теореми 1 випливає єдиність подання (13).

Твердження 2. *Алгебра* $W_{*s}^{(r)}$ *з нормою* $\|\cdot\|_r$ *є банаховою алгеброю.*

Д о в е д е н н я. Доведемо повноту алгебри $W_{*s}^{(r)}$. Нехай $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна послідовність в $W_{*s}^{(r)}$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує n_0 таке, що

$$\|f_m - f_n\|_r < \varepsilon \tag{14}$$

для всіх $m, n > n_0$. Нехай f_n має вигляд

$$f_n = \sum_{k_1,\dots,k_4=0}^{\infty} (\alpha_{k_1\dots k_4}^{(n)} + \tau_{11}\beta_{k_1\dots k_4}^{(n)})\tau_{10}^{k_1}\tau_{01}^{k_2}\tau_{20}^{k_3}\tau_{02}^{k_4} .$$

Тоді нерівність (14) запишемо як

$$\sum_{k_1,\dots,k_4=0}^{\infty} \left(\left|\alpha_{k_1\dots k_4}^{(m)} - \alpha_{k_1\dots k_4}^{(n)}\right| + r^2 \left|\beta_{k_1\dots k_4}^{(m)} - \beta_{k_1\dots k_4}^{(n)}\right| \right) r^{k_1+k_2+2k_3+2k_4} < \varepsilon . \tag{15}$$

Звідси для кожних фіксованих $k_1, \dots, k_4$ маємо

$$\left|\alpha_{k_1\dots k_4}^{(m)} - \alpha_{k_1\dots k_4}^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{r^{k_1+k_2+2k_3+2k_4}}$$

і

$$\left|\beta_{k_1\dots k_4}^{(m)} - \beta_{k_1\dots k_4}^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{r^{2+k_1+k_2+2k_3+2k_4}} .$$

Тому послідовності $\{\alpha_{k_1\dots k_4}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{\beta_{k_1\dots k_4}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальними в $\mathbb{C}$. Оскільки простір $\mathbb{C}$ є повним, то ці послідовності мають границі, які позначимо через $\alpha_{k_1\dots k_4}$ і $\beta_{k_1\dots k_4}$ відповідно. Покладемо

$$f = \sum_{k_1,\dots,k_4=0}^{\infty} (\alpha_{k_1\dots k_4} + \tau_{11}\beta_{k_1\dots k_4})\tau_{10}^{k_1}\tau_{01}^{k_2}\tau_{20}^{k_3}\tau_{02}^{k_4} .$$

Покажемо, що $f \in W_{*s}^{(r)}$. Зауважимо, що кожна фундаментальна послідовність у нормованому просторі є обмеженою. Тому існує стала $c > 0$ така, що $\|f_n\|_r \le c$ для кожного n, тобто

$$\sum_{k_1,\dots,k_4=0}^{\infty} \left(\left|\alpha_{k_1\dots k_4}^{(n)}\right| + r^2 \left|\beta_{k_1\dots k_4}^{(n)}\right|\right) r^{k_1+k_2+2k_3+2k_4} \le c .$$

Тому для кожного $M \in \mathbb{Z}_+$ буде виконуватися нерівність

$$\sum_{k_1,\dots,k_4=0}^{M} \left(\left|\alpha_{k_1\dots k_4}^{(n)}\right| + r^2 \left|\beta_{k_1\dots k_4}^{(n)}\right|\right) r^{k_1+k_2+2k_3+2k_4} \le c .$$

Перейшовши у цій нерівності до границі при $n \to \infty$, отримаємо нерівність

$$\sum_{k_1,\dots,k_4=0}^{M} \left(\left|\alpha_{k_1\dots k_4}\right| + r^2 \left|\beta_{k_1\dots k_4}\right|\right) r^{k_1+k_2+2k_3+2k_4} \le c .$$

Оскільки ця нерівність виконується для всіх $M \in \mathbb{Z}_+$, то

$$\sum_{k_1,\dots,k_4=0}^{\infty} \left(\left|\alpha_{k_1\dots k_4}\right| + r^2 \left|\beta_{k_1\dots k_4}\right|\right) r^{k_1+k_2+2k_3+2k_4} \le c ,$$

тобто $\|f\|_r \le c$. Тому $f \in W_{*s}^{(r)}$. Тепер покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Із нерівності (15) випливає, що для кожного $M \in \mathbb{Z}_+$ виконується

$$\sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{M} \left(\left| \alpha_{k_1\ldots k_4}^{(m)} - \alpha_{k_1\ldots k_4}^{(n)} \right| + r^2 \left| \beta_{k_1\ldots k_4}^{(m)} - \beta_{k_1\ldots k_4}^{(n)} \right| \right) r^{k_1+k_2+2k_3+2k_4} < \varepsilon$$

для всіх m, $n > n_0$. Перейшовши в цій нерівності до границі при $m \to \infty$, отримаємо нерівність

$$\sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{M} \left(\left| \alpha_{k_1\ldots k_4} - \alpha_{k_1\ldots k_4}^{(n)} \right| + r^2 \left| \beta_{k_1\ldots k_4} - \beta_{k_1\ldots k_4}^{(n)} \right| \right) r^{k_1+k_2+2k_3+2k_4} < \varepsilon .$$

Оскільки ця нерівність виконується для всіх $M \in \mathbb{Z}_+$, то

$$\sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{\infty} \left(\left| \alpha_{k_1\ldots k_4} - \alpha_{k_1\ldots k_4}^{(n)} \right| + r^2 \left| \beta_{k_1\ldots k_4} - \beta_{k_1\ldots k_4}^{(n)} \right| \right) r^{k_1+k_2+2k_3+2k_4} < \varepsilon ,$$

тобто $\|f - f_n\|_r < \varepsilon$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Отже, алгебра $W_{*s}^{(r)}$ є повною відносно норми $\|\cdot\|_r$.

Доведемо мультиплікативну опуклість норми $\|\cdot\|_r$, тобто покажемо, що $\|fg\|_r \le \|f\|_r \|g\|_r$ для всіх f, $g \in W_{*s}^{(r)}$. Нехай

$$f = \sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{\infty} (\alpha_{k_1\ldots k_4} + \tau_{11}\beta_{k_1\ldots k_4}) \tau_{10}^{k_1} \tau_{01}^{k_2} \tau_{20}^{k_3} \tau_{02}^{k_4} ,$$

$$g = \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_4=0}^{\infty} (\mu_{\ell_1\ldots\ell_4} + \tau_{11}\nu_{\ell_1\ldots\ell_4}) \tau_{10}^{\ell_1} \tau_{01}^{\ell_2} \tau_{20}^{\ell_3} \tau_{02}^{\ell_4} .$$

Тоді

$$fg = \sum_{m_1,\ldots,m_4=0}^{\infty} \sum_{k_1+\ell_1=m_1,\ldots,k_4+\ell_4=m_4} (\alpha_{k_1\ldots k_4}\mu_{\ell_1\ldots\ell_4} + \tau_{11}\alpha_{k_1\ldots k_4}\nu_{\ell_1\ldots\ell_4} +$$

$$+ \tau_{11}\beta_{k_1\ldots k_4}\mu_{\ell_1\ldots\ell_4} + \tau_{11}^2\beta_{k_1\ldots k_4}\nu_{\ell_1\ldots\ell_4}) \tau_{10}^{m_1} \tau_{01}^{m_2} \tau_{20}^{m_3} \tau_{02}^{m_4} .$$

Врахувавши рівність (5), отримуємо

$$\|fg\|_r \le \sum_{m_1,\ldots,m_4=0}^{\infty} \sum_{k_1+\ell_1=m_1,\ldots,k_4+\ell_4=m_4} \left(|\alpha_{k_1\ldots k_4}| |\mu_{\ell_1\ldots\ell_4}| + \right.$$

$$+ r^2 |\alpha_{k_1\ldots k_4}| |\nu_{\ell_1\ldots\ell_4}| + r^2 |\beta_{k_1\ldots k_4}| |\mu_{\ell_1\ldots\ell_4}| +$$

$$\left. + r^4 |\beta_{k_1\ldots k_4}| |\nu_{\ell_1\ldots\ell_4}| \right) r^{m_1+m_2+2m_3+2m_4} =$$

$$= \sum_{m_1,\ldots,m_4=0}^{\infty} \sum_{k_1+\ell_1=m_1,\ldots,k_4+\ell_4=m_4} \left(|\alpha_{k_1\ldots k_4}| + \right.$$

$$\left. + r^2 |\beta_{k_1\ldots k_4}| \right) r^{k_1+k_2+2k_3+2k_4} \left(|\mu_{\ell_1\ldots\ell_4}| + \right.$$

$$\left. + r^2 |\nu_{\ell_1\ldots\ell_4}| \right) r^{\ell_1+\ell_2+2\ell_3+2\ell_4} = \|f\|_r \|g\|_r .$$

Отже, $W_{*s}^{(r)}$ є банаховою алгеброю. Твердження доведено. ♦

Позначимо через $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ алгебру, яка є перетином усіх алгебр $W_{*s}^{(n)}$, де $n \in \mathbb{N}$. Елементи такої алгебри є визначеними на усьому просторі $\mathbb{C}^2$. Зауважимо, що алгебра $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ не є повною відносно жодної з норм $\|\cdot\|_n$. Наділимо $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ топологією, породженою зліченною системою норм

$$\{\|\cdot\|_n : n \in \mathbb{N}\}. \tag{16}$$

Така топологія породжується, наприклад, метрикою

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_n}{1+\|f-g\|_n}.$$

Твердження 3. *Алгебра* $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ *є повною відносно метрики* d.

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що послідовність є фундаментальною (відповідно, збіжною) відносно метрики d тоді й тільки тоді, коли ця послідовність є фундаментальною (відповідно, збіжною) відносно всіх норм із системи (16). Тому, якщо послідовність $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ елементів алгебри $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ є фундаментальною відносно метрики d, то $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною відносно кожної з норм із системи (16). Внаслідок повноти алгебр $W_{*s}^{(r)}$, послідовність $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ має границю у кожній із цих алгебр. Оскільки $\|f\|_{n_1} \le$ $\le \|f\|_{n_2}$ для всіх $f \in W_{*s}^{(n_2)}$ при $n_1 < n_2$, то границя єдина і належить всім алгебрам $W_{*s}^{(n)}$. Як наслідок, границя належить $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$. Отже, алгебра $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ є повною відносно метрики d. Твердження доведено. ♦

Наслідок 2. *Алгебра* $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ *є алгеброю Фреше.*

Спектром алгебри Фреше називають множину усіх характерів (неперервних комплекснозначних гомоморфізмів) цієї алгебри. Позначимо через $M(W_{*s}(\mathbb{C}^2))$ спектр алгебри $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$. Оскільки алгебра $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ є скінченнопородженою (означення скінченнопородженої алгебри див., наприклад, у [8, означення 2.29, с. 38]), то, згідно з [8, Теорема 2.35, с. 43], кожен комплекснозначний гомоморфізм на $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ автоматично є неперервним. Отже, спектр алгебри $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ збігається із множиною усіх комплекснозначних гомоморфізмів (лінійних мультиплікативних функціоналів) на $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$.

Нехай $\varphi \in M(W_{*s}(\mathbb{C}^2))$. Внаслідок неперервності, лінійності і мультиплікативності функціонала φ результат дії φ на функцію $f \in W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ вигляду (13) запишемо як

$$\varphi(f) = \sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{\infty} (\alpha_{k_1\ldots k_4} + \varphi(\tau_{11})\beta_{k_1\ldots k_4})\varphi(\tau_{10})^{k_1}\varphi(\tau_{01})^{k_2}\varphi(\tau_{20})^{k_3}\varphi(\tau_{02})^{k_4}. \tag{17}$$

Отже, φ визначається своїми значеннями на елементах множини (3): $\varphi(\tau_{10})$, $\varphi(\tau_{01})$, $\varphi(\tau_{20})$, $\varphi(\tau_{02})$, $\varphi(\tau_{11})$, які позначимо ξ_{10}, ξ_{01}, ξ_{20}, ξ_{02}, ξ_{11} відповідно. Згідно з наслідком 1, $*$-поліноми τ_{10}, τ_{01}, τ_{20}, τ_{02} є алгебраїчно незалежними, тому числа ξ_{10}, ξ_{01}, ξ_{20}, ξ_{02} можуть бути довільними. Внаслідок рівності (5) маємо

$$\xi_{11}^2 = \xi_{20}\xi_{02}.$$

Тому ξ_{11} визначається числами ξ_{20} і ξ_{02} з точністю до множника, який може набувати значень 1 або -1. Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 2. *Елементам множини* $M(W_{*s}(\mathbb{C}^2))$ *можна поставити у взаємно однозначну відповідність елементи ядра полінома* $p:\mathbb{C}^5\to\mathbb{C}$,

$$p(z_1,\dots,z_5)=z_5^2-z_3z_4$$

за допомогою відображення $\nu: M(W_{*s}(\mathbb{C}^2))\to\ker p$,

$$\nu:\varphi\mapsto(\varphi(\tau_{10}),\ \varphi(\tau_{01}),\ \varphi(\tau_{20}),\ \varphi(\tau_{02}),\ \varphi(\tau_{11})).$$

Множину характерів $\varphi\in M(W_{*s}(\mathbb{C}^2))$ таких, що

$$\varphi(\overline{f})=\overline{\varphi(f)} \tag{18}$$

для всіх $f\in W_{*s}(\mathbb{C}^2)$, назвемо $*$-спектром алгебри $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ і позначимо через $M_*(W_{*s}(\mathbb{C}^2))$.

Функціоналом обчислення значення у точці $z\in\mathbb{C}^2$ називають відображення $\delta_z: W_{*s}(\mathbb{C}^2)\to\mathbb{C}$, яке діє за правилом

$$\delta_z(f)=f(z).$$

Для $z\in\mathbb{C}^2$ також означимо відображення $\tilde{\delta}_z: W_{*s}(\mathbb{C}^2)\to\mathbb{C}$ формулою

$$\tilde{\delta}_z(f)=\delta_z\left(\sum_{k_1,\dots,k_4=0}^{\infty}\alpha_{k_1\dots k_4}\tau_{10}^{k_1}\tau_{01}^{k_2}\tau_{20}^{k_3}\tau_{02}^{k_4}\right)-$$

$$-\delta_z\left(\tau_{11}\sum_{k_1,\dots,k_4=0}^{\infty}\beta_{k_1\dots k_4}\tau_{10}^{k_1}\tau_{01}^{k_2}\tau_{20}^{k_3}\tau_{02}^{k_4}\right)$$

для $f\in W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ вигляду (13). За допомогою безпосередніх обчислень можна перевірити лінійність, мультиплікативність і властивість (18) для δ_z і $\tilde{\delta}_z$. Отже, δ_z і $\tilde{\delta}_z$ є $*$-характерами.

Позначимо $\Delta=\{\delta_z : z\in\mathbb{C}^2\}$ і $\tilde{\Delta}=\{\tilde{\delta}_z : z\in\mathbb{C}^2\}$. Зауважимо, що множини Δ і $\tilde{\Delta}$ мають спільний перетин $\Delta\bigcap\tilde{\Delta}=\{\delta_z : z=(z_0,z_0),\ z_0\in\mathbb{C}\}$.

Теорема 3. $*$*-спектр алгебри* $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ *є об'єднанням множин* Δ *і* $\tilde{\Delta}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\varphi\in M_*(W_{*s}(\mathbb{C}^2))$. Покажемо, що $\varphi\in\Delta$ або $\varphi\in\tilde{\Delta}$. Позначимо $\xi_1=\varphi(\tau_{10})$ і $\xi_2=\varphi(\tau_{20})$. Зауважимо, що $\tau_{01}=\overline{\tau}_{10}$ і $\tau_{02}=\overline{\tau}_{20}$, Тому, згідно з (18), $\varphi(\tau_{01})=\overline{\xi}_1$ і $\varphi(\tau_{02})=\overline{\xi}_2$. З огляду на (5),

$$\varphi(\tau_{11})^2=\xi_2\overline{\xi}_2=|\xi_2|^2.$$

Тому $\varphi(\tau_{11})=\eta|\xi_2|$, де $\eta=1$, якщо $\varphi(\tau_{11})\geq 0$, а в інших випадках $\eta=-1$.

Нехай $z=\left((\xi_1+\sqrt{\xi_2})/2,(\xi_1-\sqrt{\xi_2})/2\right)$. Тоді

$$\delta_z(\tau_{10})=\xi_1,\quad \delta_z(\tau_{01})=\overline{\xi}_1,\quad \delta_z(\tau_{20})=\xi_2,\quad \delta_z(\tau_{02})=\overline{\xi}_2,\quad \delta_z(\tau_{11})=|\xi_2|.$$

Отже,

$$\varphi(\tau_{10})=\delta_z(\tau_{10}),\qquad \varphi(\tau_{01})=\delta_z(\tau_{01}),\qquad \varphi(\tau_{20})=\delta_z(\tau_{20}),$$

$$\varphi(\tau_{02})=\delta_z(\tau_{02}),\qquad \varphi(\tau_{11})=\eta\delta_z(\tau_{11}).$$

Тому, зважаючи на (17),

$$\varphi(f) = \sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{\infty} \left(\alpha_{k_1\ldots k_4} + \eta\delta_z(\tau_{11})\beta_{k_1\ldots k_4}\right) \times$$

$$\times \delta_z(\tau_{10})^{k_1}\delta_z(\tau_{01})^{k_2}\delta_z(\tau_{20})^{k_3}\delta_z(\tau_{02})^{k_4} =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{\infty} \alpha_{k_1\ldots k_4}\delta_z(\tau_{10})^{k_1}\delta_z(\tau_{01})^{k_2}\delta_z(\tau_{20})^{k_3}\delta_z(\tau_{02})^{k_4} +$$

$$+ \eta\delta_z(\tau_{11}) \sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{\infty} \beta_{k_1\ldots k_4}\delta_z(\tau_{10})^{k_1} \times$$

$$\times \delta_z(\tau_{01})^{k_2}\delta_z(\tau_{20})^{k_3}\delta_z(\tau_{02})^{k_4} =$$

$$= \delta_z\left(\sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{\infty} \alpha_{k_1\ldots k_4}\tau_{10}^{k_1}\tau_{01}^{k_2}\tau_{20}^{k_3}\tau_{02}^{k_4}\right) +$$

$$+ \eta\delta_z\left(\tau_{11}\sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{\infty} \beta_{k_1\ldots k_4}\tau_{10}^{k_1}\tau_{01}^{k_2}\tau_{20}^{k_3}\tau_{02}^{k_4}\right).$$

Звідси при $\eta = 1$ маємо $\varphi(f) = \delta_z(f)$, а при $\eta = -1$ маємо $\varphi(f) = \tilde{\delta}_z(f)$. Отже, $\varphi = \delta_z$ або $\varphi = \tilde{\delta}_z$.

Теорему доведено. ♦

Зауважимо, що характер $\varphi \in M(W_{*s}(\mathbb{C}^2))$, для якого $\varphi(\tau_{01}) \neq \overline{\varphi(\tau_{10})}$, $\varphi(\tau_{02}) \neq \overline{\varphi(\tau_{20})}$ або $\varphi(\tau_{11}) \neq \overline{\varphi(\tau_{11})}$, не є $*$-характером. Тому $*$-спектр алгебри $W_{*s}(\mathbb{C}^2)$ строго міститься у спектрі цієї алгебри.

1. *Василишин Т. В., Струтинський М. М.* Про симетричні *-поліноми від двох комплексних змінних // Прикарпат. вісн. НТШ: Число. – 2016. – № 1(33). – С. 88–92.
2. *Митрофанов М. А.* Аппроксимация непрерывных функций на комплексных банаховых пространствах // Мат. заметки. – 2009. – **86**, № 4. – С. 557–570.
   Те саме: *Mitrofanov M. A.* Approximation of continuous functions on complex Banach spaces // Math. Notes. – 2009. – **86**, No. 4. – P. 530–541.
3. *Немировский А. С., Семенов С. М.* О полиномиальной аппроксимации функций на гильбертовом пространстве // Мат. сборник. – 1973. – **92**(**134**), № 2(10). – С. 257–281.
   Те саме: *Nemirovskii A. S., Semenov S. M.* On polynomial approximation of functions on Hilbert space // Math. USSR-Sb. – 1973. – **21**, No. 2. – P. 255–277.
4. *Aron R., Galindo P., Pinasco D., Zalduendo I.* Group-symmetric holomorphic functions on a Banach space // Bull. London Math. Soc. – 2016. – **48**, No. 5. – P. 779–796.
5. *Chernega I. V.* Symmetric polynomials and holomorphic functions on infinite dimensional spaces // J. Vasyl Stefanyk Precarpathian Nat. Univ. – 2015. – **2**, No. 4. – P. 23–49.
6. *Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A.* The algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. **A**. – 2017. – **147**, No. 4. – P. 743–761.
7. *González M., Gonzalo R., Jaramillo J. A.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // J. London Math. Soc. – 1999. – **59**, No. 2. – P. 681–697.
8. *Husain T.* Multiplicative functionals on topological algebras. – Boston etc.: Pitman, 1983. – 160 p.
9. *Kravtsiv V. V., Zagorodnyuk A. V.* Representation of spectra of algebras of block-symmetric analytic functions of bounded type // Карпат. мат. публікації. – 2016. – **8**, No. 2. – P. 263–271.

10. *Mujica J.* Complex analysis in Banach spaces: Holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions. – Amsterdam etc.: North-Holland, 1986. – viii+434 p.
11. *Vasylyshyn T. V.* Continuous block-symmetric polynomials of degree at most two on the space $(L_\infty)^2$ // Карпат. мат. публікації. – 2016. – **8**, No. 1. – P. 38–43.
12. *Vasylyshyn T. V.* Symmetric continuous linear functionals on complex space $L_\infty[0,1]$ // Карпат. мат. публікації. – 2014. – **6**, No. 1. – P. 8–10.
13. *Vasylyshyn T. V.* Topology on the spectrum of the algebra of entire symmetric functions of bounded type on the complex L_∞ // Карпат. мат. публікації. – 2017. – **9**, No. 1. – P. 22–27.
14. *Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V.* Polarization formula for (p,q)-polynomials on a complex normed space // Methods Funct. Anal. Topology. – 2011. – **17**, No. 1. – P. 75–83.

АЛГЕБРЫ СИММЕТРИЧЕСКИХ $*$-ПОЛИНОМОВ НА ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^2$

Исследованы симметрические $*$-полиномы на пространстве $\mathbb{C}^2$. В частности, построена система образующих элементов алгебры симметрических $*$-полиномов на пространстве $\mathbb{C}^2$ и показано, что элементы этой системы алгебраически зависимы. Также исследованы алгебры, которые являются пополнениями алгебры симметрических $*$-полиномов на пространстве $\mathbb{C}^2$. Описаны спектр и $*$-спектр алгебры Фреше абсолютно сходящихся рядов симметрических $*$-полиномов.

Ключевые слова: **-полином, симметрический *-полином, алгебраическая зависимость, спектр алгебры Фреше, *-спектр алгебры Фреше.*

ALGEBRAS OF SYMMETRIC $*$-POLYNOMIALS ON THE SPACE $\mathbb{C}^2$

The symmetric $*$-polynomials on the space $\mathbb{C}^2$ are investigated. Especially, a system of generators of the algebra of symmetric $*$-polynomials on $\mathbb{C}^2$ is constructed and it is shown that elements of this system are algebraically dependent. The algebras, which are completions of the algebra of symmetric $*$-polynomials on $\mathbb{C}^2$ are also studied. A spectrum and a $*$-spectrum of the Fréchet algebra of absolutely convergent series of symmetric $*$-polynomials are described.

Key words: **-polynomial, symmetric *-polynomial, algebraic dependency, spectrum of a Fréchet algebra, *-spectrum of a Fréchet algebra.*

Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
25.08.17