

О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький, Р. О. Івасько*

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ, ТЕПЛОВИХ І МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У МАГНІТНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЗА ВРАХУВАННЯ МОМЕНТНИХ ЧИННИКІВ

Висвітлено специфіку побудови моделей термомеханіки феромагнітних (феритових) тіл з урахуванням моментних силових чинників, обумовлених взаємодією з електромагнітним полем. Отримано, зокрема, вихідні співвідношення моделей за дії зовнішнього поля, що є комбінацію постійного магнітного та змінного електромагнітного полів. Вони можуть бути використані при розгляді конкретних практично важливих задач про термомеханічну поведінку таких тіл в умовах феромагнітного резонансу, індукційного нагріву за підмагнічування, а також поширення в них магнітостатичних хвиль.

Ключові слова: моделі електромагнітотермопружності, моментні силові чинники, феромагнетики і ферити, магнітостатичне наближення, резонансні явища.

Вдосконалення існуючих і розробка нових ефективних способів технологічної обробки виробів з магнітних матеріалів з ускладненими властивостями (феромагнітних, феритових) з використанням індукційного нагрівання; вибір раціональних режимів експлуатації енергетичних установок та електротехнічних пристроїв, які містять такі магнітні елементи; розробка приладів, що використовують явища феромагнітного, ядерного магнітного та електронного парамагнітного резонансів і особливості поширення магнітостатичних хвиль, пов'язані з математичним моделюванням і дослідженням взаємозв'язаних нестационарних електромагнітних, теплових і механічних процесів у магнітних середовищах за комплексних зовнішніх навантажень – електромагнітних, теплових і механічних. Особливість такого моделювання полягає в необхідності залучення і розвитку теорій електромеханічної взаємодії, які враховували би моментні силові чинники на основі підходів класичної чи моментної теорії пружності [24, 32, 33].

Постановка та отримання розв'язків відповідних задач електромагніто-термомеханіки дають можливість провести оцінку теплового та механічного станів виробів з магнітних матеріалів при електромагнітному способі обробки (зокрема, в умовах феромагнітного резонансу) залежно від амплітудно-частотних характеристик електромагнітної дії і їх електрофізичних властивостей, а також вивчити виникнення і поширення в них магнітопружних та електромагнітних хвиль, зокрема магнітостатичних (у конкретних плівкових структурах) і розрахувати їх термомеханічні характеристики.

1. Модель взаємодії деформівного твердого тіла з електромагнітним полем. Оскільки процеси намагнічування в тілі можуть бути взаємопов'язані з процесами поляризації, виходимо з загальної моделі взаємодії деформівного твердого тіла з електромагнітним полем (ЕМП). При її побудові використовуємо підходи механіки суцільного середовища, які базуються на континуальних уявленнях і методах нерівноважної (раціональної) термодинаміки. Тіло розглядаємо як просторово неоднорідну нерівноважну відкриту термодинамічну систему, яка може обмінюватися енергією (теплообмін, дія зовнішнього ЕМП) із навколишнім середовищем.

Використовуючи прийняті у літературі засади, вважаємо, що зовнішнє відносно тіла ЕМП є сторонньою дією, яка проявляється зумовленими ним 1) силовими та 2) енергетичними чинниками [1, 8, 10, 13, 16, 19, 32]. Перші за наявності в розглядуваних середовищах моментних ефектів враховуємо не лише через об'ємні (пондеромоторні) сили \mathbf{F} , але й об'ємні пари сил \mathbf{L}

* dept13@iapmm.lviv.ua

(пондеромоторні моменти) [8, 16, 32]. Другі визначаються процесами обміну енергією між ЕМП та тілом і визначаються притоком енергії ψ від поля до тіла, розподіл якої в тілі має об'ємний характер, і тепловиділеннями Q внаслідок процесів внутрішньої дисипації. При цьому $\psi = \psi_s + Q$, де ψ_s – енергія наявного в тілі ЕМП.

У континуальній моделі рух тіла описують законами $x_i = x_i(X_\alpha, t)$ руху його матеріальних точок зі швидкостями $\dot{x}_i = \frac{\partial}{\partial t}[x_i(X_\alpha, t)]$, $i, \alpha = 1, 2, 3$ [18, 32]. Тут x_i , X_α – декартові просторові (ейлерові) та матеріальні (лагранжеві) координати точок, t – час. Тоді $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ – вектор переміщення. Надалі приймаємо допущення теорії малих деформацій і швидкостей [1, 18, 24], за яких координати x_i , що індивідуалізують матеріальні точки тіла в процесі їх руху, та їхні координати X_α у недеформованому стані тіла, не розрізняють.

Виходимо з відомих континуальних характеристик [1, 18, 32]: ρ , U – густина маси та густина внутрішньої енергії; σ_{ij} – компоненти тензора напружень Коші; q_i – компоненти вектора теплового потоку; η , T – густина ентропії та температура у тілі. Тоді, використовуючи фізичні закони збереження маси, кількості руху, моменту кількості руху та енергії (які формулюємо в інтегральній формі) та введені чинники дії зовнішнього ЕМП на тіло, отримуємо систему балансових рівнянь механіки деформованого твердого тіла за дії ЕМП в такій локальній (диференціальній) формі:

$$\rho \frac{d\dot{x}_i}{dt} = \sigma_{ij,j} + F_i, \quad (1)$$

$$\sigma_{[ij]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij\ell} L_\ell, \quad (2)$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = \sigma_{ij} \dot{x}_{i,j} - q_{j,j} + \psi, \quad (3)$$

а також умови в стрибках (окремі механічні і теплові граничні умови) на поверхні S тіла

$$\sigma_{ij} n_j = P_i^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t), \quad q_j n_j = q^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S. \quad (4)$$

Тут $\varepsilon_{ij\ell}$ – тензор Леві-Чівіта; $P_i^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t)$, $q^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t)$ – задані компоненти вектора поверхневого навантаження і зовнішнього теплового потоку, який підводиться/відводиться до/від поверхні, n_i – компоненти вектора зовнішньої нормалі до тіла. Індексами в квадратних дужках позначено несиметричні тензори, повторювані індекси означають підсумовування, а кома перед індексом – диференціювання за відповідною координатою.

Зауважимо, що співвідношення (2), яке слідує з рівняння балансу моменту імпульсу, виражає несиметричність тензора напружень у рамках класичної теорії пружності. За врахування інерційних моментних ефектів, пов'язаних з обертальним рухом точок тіла, в несиметричній теорії пружності рівняння балансу моменту імпульсу (2) отримуємо у вигляді [24]

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{ik} + \mu_{ji,j} + L_i = J \frac{d\dot{\omega}_i}{dt}, \quad (5)$$

де μ_{ij} – компоненти тензора моментних напружень, $\dot{\omega}_i$ – компоненти швидкості повороту точок тіла, J – динамічна характеристика середовища (міра інерції при обертанні). За такого підходу дослідження електромагніто-термопружних процесів проводилося в роботах [4, 5, 27 та ін].

Для опису локально нерівноважних станів у фізично малих елементах тіла використовуємо підходи нерівноважної (раціональної) термодинаміки континууму. При цьому другий закон термодинаміки сформулюємо у формі нерівності Клаузіуса – Дюгема [18, 19, 30]:

$$\rho \frac{d\eta}{dt} + (q_i T^{-1})_{,i} - Q T^{-1} \geq 0. \quad (6)$$

Нерівність (6) доцільно подати у наведеному вигляді, коли наявні величини, які характеризують дисипацію електромагнітної енергії в тілі за дії ЕМП. Так, виключаючи з цієї нерівності величину $q_{i,i}$ за допомогою співвідношення (3), яке виражає перший закон термодинаміки, приходимо до так званої дисипативної нерівності [1, 18, 19]:

$$\rho \left(\frac{d\eta}{dt} - \frac{dU}{dt} \right) - \frac{1}{T} q_i T_{,i} + t_{ij} x_{i,j} + \psi - Q \geq 0. \quad (7)$$

Для отримання повної системи співвідношень, яку повинні задовольняти характеристики досліджуваних електромагнітних, теплових і механічних процесів у тілі, що знаходиться за дії зовнішнього ЕМП, необхідно записати систему рівнянь Максвелла для характеристик ЕМП в такому тілі. При цьому опис електромагнітних процесів у ньому ускладнюється через необхідність врахування поляризації, намагнічування і виникнення в тілі «власного» поля, яке змінює зовнішнє.

Моделювання електромеханічної взаємодії поля і матеріалу тіла шляхом побудови певних мікро- та макромоделей, які описують процеси електропровідності, поляризації і намагнічування в зв'язку з іншими фізичними процесами в тілі за дії ЕМП [12, 32], дозволяє (при відповідному означенні введених за континуального опису характеристик теплових і механічних процесів) виразити чинники дії поля (об'ємні сили \mathbf{F} , пари сил \mathbf{L} , притік енергії ψ і тепловиділення Q) через означені в тілі характеристики ЕМП, які задовольняють систему рівнянь Максвелла в тому чи іншому формулюванні [13, 32].

При описі електромагнітних процесів у тілі вважатимемо, що в зовнішньому середовищі (яке приймаємо в наближенні вакууму) існують джерела ЕМП, які задані відомими конфігураціями тонких лінійних провідників зі струмом $j^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t)$ і поверхонь з розподіленими зарядами $\sigma^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t)$. Створюване такими джерелами у вакуумі ЕМП описуємо системою рівнянь Максвелла – Лоренца [16, 29]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E_{i,i}^{(e)} &= \sigma^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t), & -\varepsilon_0 \frac{\partial E_i^{(e)}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} B_{k,j}^{(e)} &= j_i^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t), \\ B_{i,i}^{(e)} &= 0, & -\frac{\partial B_i^{(e)}}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} E_{k,j}^{(e)} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут $\mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{B}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ – вектори напруженості електричного та індукції магнітного полів у точці \mathbf{x} простору в момент часу t . При цьому співвідношення

$$\mathbf{H}^{(e)} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{(e)}, \quad \mathbf{D}^{(e)} = \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(e)} \quad (9)$$

визначають вектори напруженості магнітного поля і електричного зміщення у вакуумі; ε_0 , μ_0 – діелектрична і магнітна сталі.

Для отримання рівнянь, які описують ЕМП у твердому тілі, і визначення чинників його дії скористаємося відомим в літературі статистичним підходом до формулювання рівнянь електродинаміки і опису електромеханічних взаємодій (статистичне формулювання) [8, 16]. Воно дозволяє на основі

відомих фізичних уявлень про будову твердого тіла наглядно означити такі його характеристики, як електропровідність, поляризацію і намагніченість. У статистичній моделі послідовно реалізується фізичне наближення методами статистичної механіки [20]. Постулюється, що на мікрорівні ЕМП в тілі створюється точковими зарядженими фізичними частинками (електронами, ядрами), які рухаються у вакуумі за дії зовнішніх чинників (в тому числі й зовнішнього ЕМП) і утворюють в тілі стабільні групи (атоми, іони, молекули). Макроскопічні рівняння Максвелла та вирази для величин, які характеризують взаємодію тіла з полем, встановлюють шляхом статистичного усереднення за точками простору мікрорівнянь поля і механіки для згаданих груп. Поляризацію і намагніченість у тілі визначають через статистично усереднені величини від мультипольних електричних і магнітних моментів, які характеризують стабільні групи.

Система макроскопічних рівняння Максвелла в статистичному формулюванні має вигляд [16]

$$\begin{aligned} -\varepsilon_0 \frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} B_{k,j} &= J_i + \frac{\partial P_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} M_{k,j}, & \varepsilon_0 E_{i,i} &= \Omega - P_{i,i}, \\ B_{i,i} &= 0, & \frac{\partial B_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} E_{k,j} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут \mathbf{E} , \mathbf{B} – вектори макроскопічних напруженості електричного та індукції магнітного полів тілі; Ω , \mathbf{P} – густина заряду і вектор поляризації, які визначаються як статистично усереднені від введених мікрохарактеристик стабільних груп; \mathbf{J} , \mathbf{M} – вектори густини струму і густини намагніченості, які подаються у вигляді

$$\mathbf{J} = \Omega \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{I}^{(c)}, \quad \mathbf{M} = \mathcal{M} + \mathbf{P} \times \dot{\mathbf{x}} + \mathcal{M}_\Phi, \quad (11)$$

де $\dot{\mathbf{x}}$ – усереднені швидкості. Із (11) випливає, що густина повного струму \mathbf{J} в тілі складається з густини конвективного струму $\Omega \dot{\mathbf{x}}$, зумовленого рухом заряду, та струму провідності $\mathbf{I}^{(c)}$, що пов'язується з флуктуаціями швидкостей стабільних груп відносно середньої, які можуть бути викликані, зокрема, рухом вільних електронів. Густина намагніченості \mathbf{M} містить три складові: складова \mathcal{M} , викликана наявністю магнітних дипольних моментів у групах, друга складова $\mathbf{P} \times \dot{\mathbf{x}}$, зумовлена рухом поляризованих груп, а третя \mathcal{M}_Φ – флуктуаціями швидкостей груп, які мають електричні дипольні моменти.

Якщо ввести величини електричного зміщення \mathbf{D} і напруженості магнітного поля \mathbf{H} за допомогою співвідношень

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i, \quad H_i = \frac{1}{\mu_0} B_i - M_i, \quad (12)$$

прийдемо до макроскопічної системи рівнянь Максвелла у формулюванні Мінковського:

$$\begin{aligned} D_{i,i} &= \Omega, & \varepsilon_{ijk} H_{k,j} &= \frac{\partial D_i}{\partial t} + J_i, \\ B_{i,i} &= 0, & \varepsilon_{ijk} E_{k,j} &= -\frac{\partial B_i}{\partial t}. \end{aligned} \quad (13)$$

Статистичним усередненням мікрорівнянь руху, моменту імпульсу та енергії (з використанням одночастинкових функцій розподілу [16, 20]) при відповідним чином означених макроскопічних густинах ρ та імпульсах $\rho \dot{\mathbf{x}}$, механічних (тензор напружень σ_{ij}) та енергетичних (внутрішня енергія U , потік тепла \mathbf{q}) параметрах отримуємо макроскопічні балансові рівняння

механіки. Порівняння цих рівнянь зі співвідношеннями (1)–(3) континуальної моделі дає такі вирази для чинників дії ЕМП:

$$\begin{aligned} F_i &= \Omega E_i + \varepsilon_{ijk} J_j B_k + P_j E_{j,i} + M_j B_{j,i} + \varepsilon_{ijk} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} P_j B_k \right), \\ L_i &= \varepsilon_{ijk} [P_j E_k + M_j B_k + \dot{x}_j (\varepsilon_{kpl} P_p B_l)], \\ \psi &= J_i E_i + E_i \frac{\partial P_i}{\partial t} - M_i \frac{\partial B_i}{\partial t} + (\dot{x}_i P_l E_l)_{,i} - \dot{x}_i F_i. \end{aligned} \quad (14)$$

Бачимо, що наявність пондеромоторних моментів може бути обумовлена непаралельністю в тілі векторів напруженості електричного поля \mathbf{E} та поляризації \mathbf{P} чи векторів напруженості магнітного поля \mathbf{H} та намагніченості \mathbf{M} .

Системи рівнянь Максвелла (10), (13) і вирази (14) для чинників дії ЕМП на тіло записані для рухомого тіла в нерелятивістському наближенні (наближенні повільно рухомих середовищ [16, 28, 29]). Тоді струми у власній системі відліку (\mathbf{x}', t') ($\dot{\mathbf{x}} = 0$), пов'язаній з рухомими точками тіла, є струмами провідності $\mathbf{I}^{(c)}$ в тілі, а вираз для притоку енергії ЕМП до тіла в цій системі має вигляд

$$\begin{aligned} \psi &= J'_i E'_i + \rho \frac{d}{dt'} (\rho^{-1} P'_i) E'_i - M'_i \frac{dB'_i}{dt'}, \\ J'_i &= I_i^{(c)}, \quad \mathbf{M}' = \mathcal{M}' + \mathcal{M}'_{\Phi}, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}, & \mathbf{D}' &\approx \mathbf{D}, & \mathbf{V}' &\approx \mathbf{V}, & \mathbf{H}' &= \mathbf{H} - \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{D}, \\ \mathbf{P}' &= \mathbf{P}, & \Omega' &\approx \Omega, & \mathbf{M}' &= \mathbf{M} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{P}, & \mathbf{J}' &= \mathbf{J} - \Omega \dot{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Із системи рівнянь Максвелла (10), записаної для рухомого тіла, слідує відоме співвідношення – теорема Умова – Пойнтінга [28]:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d}{dt'} [\varepsilon_0 (\mathbf{E}')^2 + \mu_0^{-1} (\mathbf{B}')^2] - \nabla' \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}') &= \\ = \mathbf{J}' \cdot \mathbf{E}' + \mathbf{E}' \frac{d}{dt'} (\mathbf{P}') - \mathbf{M}' \frac{d}{dt'} (\mathbf{B}'). \end{aligned} \quad (17)$$

Якщо означити енергію і потік енергії ЕМП у власній системі відліку наступним чином [1, 30]:

$$w'^{(em)} = \varepsilon_0 (\mathbf{E}')^2 + \mu_0^{-1} (\mathbf{B}')^2, \quad \mathbf{S} = \mathbf{E}' \times \mathbf{H}', \quad (18)$$

то з (17), враховуючи (18), отримаємо закон збереження електромагнітної енергії у вигляді

$$\psi = -\frac{d}{dt'} [w'^{(em)}] - \nabla' \cdot \mathbf{S}'. \quad (19)$$

Отже, з (19) випливає, що притік енергії (15) включає як енергію, запасену в полі в тілі, так і дисиповану енергію (яка переходить в енергію теплових коливань у тілі). При циклічному ЕМП зміна енергії поля за один цикл Γ дорівнює нулеві. Тому співвідношення (15) можна використати для визначення об'ємних тепловиділень Q_{cycl} в тілі за один цикл:

$$Q_{\text{cycl}} = \oint_{\Gamma} \psi dt'. \quad (20)$$

Для усереднених Q^{av} за період $T = 2\pi/\omega$ (де ω – кругова частота) тепловиділень [1] згідно з (20) отримаємо:

$$Q^{av} = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega} \psi dt'.$$

Оскільки всі вимірювання електромагнітних величин проводять для нерухомого тіла, то за допомогою зв'язків (16) і отриманих експериментально фізичних співвідношень для електромагнітних величин можна встановити визначальні рівняння моделі електропровідного твердого тіла, які пов'язують густину струму \mathbf{J} , індукції електричного \mathbf{D} (електричне зміщення) і магнітного \mathbf{B} полів у ньому з величинами напруженостей електричного \mathbf{E} і магнітного \mathbf{H} полів.

Базуючись на інтегральній формі запису рівнянь електродинаміки, яку отримуємо з інтегрування рівнянь (13), встановлюємо такі умови спряження на межі поділу тверде тіло – зовнішнє середовище:

$$\begin{aligned} \langle D_i n_i \rangle &= \Omega^*, & \langle \varepsilon_{ijk} H_j n_k \rangle - \dot{x} \langle D_i \rangle &= 0, \\ \langle B_i n_i \rangle &= 0, & \langle \varepsilon_{ijk} E_j n_k \rangle - \dot{x} \langle B_i \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\langle J_i n_i \rangle - \dot{x} \langle \Omega \rangle + \dot{x} (n_i \Omega^*)_{,i} = - \frac{\partial \Omega^*}{\partial t}. \quad (22)$$

Тут символ $\langle \cdot \rangle$ означає стрибок величини, $\dot{x} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}$ – нормальна складова швидкості точок поверхні тіла; Ω^* – поверхнева густина зарядів. Зауважимо, що при формулюванні задач електродинаміки для конкретного матеріального середовища у рівняннях (8), (13) і умовах спряження (21), (22) використовуємо співвідношення (9), (12).

Записані балансові співвідношення механіки, другий закон термодинаміки (нерівність Клаузіуса – Дюгема) та рівняння електродинаміки (16) рівнянь і одна нерівність, які містять 38 невідомих величин – введених характеристик механічних, теплових та електромагнітних процесів) дають можливість описати термомеханічну поведінку тіл за дії ЕМП.

При конкретизації моделі тіла ці співвідношення слід доповнити визначальними (фізичними) рівняннями (рівняннями стану та кінетичними), які описують взаємозв'язок введених параметрів електромагнітних, теплових і механічних процесів у деформованих твердих тілах за дії зовнішнього ЕМП. Ці рівняння враховують специфічні електрофізичні властивості таких тіл і особливості термомеханічної поведінки їх матеріалу за розглядуваних комплексних навантажень (електромагнітних, теплових і механічних) і замикають сформульовану систему співвідношень.

Почнемо з того, що розглядуваний у твердому тілі тензор напружень Коші σ_{ij} (внаслідок моментної дії ЕМП) є несиметричним. При встановленні визначальних рівнянь для тензора напружень, зокрема при означенні експериментально вимірюваних пружних характеристик, формулюванні системи ключових рівнянь електромагнітотермомеханіки у рамках безмоментної теорії пружності, вихідним є симетричний тензор напружень. Для побудови визначальних рівнянь з використанням наведеної вище теорії здійснимо симетризацію наявного тензора напружень. Skorистаємось відомим в літературі поданням для пондеромоторної сили \mathbf{F} [28, 29]:

$$F_i = \sigma_{ij,j}^{(M)} - \frac{\partial G_i}{\partial t}, \quad G_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_0 E_j B_k, \quad (23)$$

де

$$\sigma_{ij}^{(M)} = E'_i P_j - M'_i B_j + \varepsilon_0 E_i E_j + \mu_0^{-1} B_i B_j - (w^{(em)}/2 - M'_k B_k) \delta_{ij} \quad (24)$$

– компоненти тензора натягів Максвелла. Тоді тензор напружень Коші

отримуємо у вигляді суми симетричного тензора $\sigma_{ij}^{(s')}$ і несиметричного тензора $\sigma_{ij}^{(as)}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(s')} + \sigma_{ij}^{(as)}, \\ \sigma_{ij}^{(s')} &= (\sigma_{ij} + \sigma_{ji})/2, \quad \sigma_{ij}^{(as)} = (\sigma_{ij} - \sigma_{ji})/2 \equiv \sigma_{[ij]}/2,\end{aligned}\quad (25)$$

а враховуючи вираз (14) для об'ємного пондеромоторного моменту, знайдемо

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(s')} + (M'_{[i}B_{j]} + P_{[i}E'_{j]})/2. \quad (26)$$

Тоді величини $\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{(M)}$ утворюють компоненти $\sigma_{ij}^{(e)}$ симетричного тензора:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{(M)} &\equiv \sigma_{ij}^{(e)} = \sigma_{ij}^{(s')} + (E'_i P_j + E'_j P_i)/2 - (M'_i B_j + M'_j B_i)/2 + \\ &+ \varepsilon_0 E_i E_j + \mu_0^{-1} B_i B_j - (w^{(em)}/2 - M'_k B_k) \delta_{ij}.\end{aligned}\quad (27)$$

Рівняння балансу імпульсу (1) за симетричного тензора напружень $\sigma_{ij}^{(e)}$ буде

$$\rho \frac{d\dot{x}_i}{dt} = \sigma_{ij,j}^{(e)} - \frac{\partial G_i}{\partial t}. \quad (28)$$

Граничні умови (4), сформульовані щодо компонент симетричного тензора $\sigma_{ij}^{(e)}$ напружень, запишемо у вигляді

$$\sigma_{ij}^{(e)} n_j = P_i^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t) + \sigma_{ij}^{(M)}(\mathbf{x}, t) n_j. \quad (29)$$

Отже, згідно з проведеною на основі співвідношень (23)–(29) процедурою симетризації, моментні фактори взаємодії можуть бути враховані в рамках симетричної теорії пружності при формулюванні механічних граничних умов додатковим електромагнітним навантаженням.

Беручи до уваги, що величини

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} + E'_i P_j - M'_i B_j + M'_k B_k \delta_{ij} &= \sigma_{ij}^{(s')} + (E'_j P_i + E'_i P_j - M'_i B_j - M'_j B_i)/2 + \\ &+ M'_k B_k \delta_{ij} = \sigma_{ij}^{(s'')}\end{aligned}\quad (30)$$

теж виражають компоненти $\sigma_{ij}^{(s'')}$ симетричного тензора, можна ввести симетричний тензор напружень за дії ЕМП і в іншому вигляді. Він пов'язаний з тензором σ_{ij} співвідношенням

$$\sigma_{ij}^{(E)} = \sigma_{ij} + E'_i P_j - M'_i B_j + M'_k B_k \delta_{ij}. \quad (31)$$

Враховавши вирази (14) для пондеромоторних сил і притоку енергії, рівняння балансу імпульсу запишемо так:

$$\rho \frac{d\dot{x}_i}{dt} = (\sigma_{ij}^{(E)})_{,j} + F_i^*, \quad (32)$$

де

$$F_i^* = (\Omega - P_{j,j}) E'_i + \varepsilon_{ijk} \left(J_j + \frac{dP_j}{dt} \right) B_k + (M'_{i,j} - M'_{j,i}) B_j.$$

Граничні умови (4) для компонент тензора $\sigma_{ij}^{(E)}$ будуть

$$\sigma_{ij}^{(E)} n_j = P_i^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t) + P_i^{(E)}(\mathbf{x}, t), \quad (33)$$

де $P_i^{(E)}(\mathbf{x}, t) = [E'_j P_i - M'_j B_i + M'_k B_k] n_j$.

За процедури симетризації згідно з (30)–(33) отримуємо відмінні від попереднього випадку вирази для пондеромоторної сили в рівнянні балансу імпульсу і додаткового електромагнітного навантаженням в граничній умові

При побудові визначальних рівнянь (рівнянь стану і кінетичних рівнянь) за незалежні параметри стану виберемо величини напруженості електричного та магнітного полів E'_i , H'_i , температуру T і компоненти $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ тензора малої деформації. Використаємо феноменологічний підхід і методи нерівноважної (раціональної) термодинаміки [1, 17, 30]. Отримаємо такі подання для внутрішньої енергії U , ентропії η , компонент тензора напружень $\sigma_{ij}^{(E)}$ та питомої теплоємності c_ε :

$$\begin{aligned} U &= U^0(\varepsilon_{ij}, T) - T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{I}{T} \right), \quad \eta = \eta^0 - \frac{\partial I}{\partial T}, \quad \sigma_{ij}^{(E)} = \sigma_{ij}^0 + 2\rho \frac{\partial I}{\partial \varepsilon_{ij}}, \\ c_\varepsilon &= c_\varepsilon^0 - \frac{\partial}{\partial T} \left[T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{I}{T} \right) \right], \quad c_\varepsilon^0 = \left(\frac{\partial U^0}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}}, \\ I &= x_A \int_0^1 f(sx_A, \varepsilon_{ij}, T), \quad x_A = \{\mathbf{P}', \mathbf{M}'\}, \\ I &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_A = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

які враховують вплив ЕМП на властивості тіла. У (34) складові U^0 , ψ^0 , σ_{ij}^0 , η^0 залежать лише від введених параметрів ε_{ij} , T стану. Отже, за нехтування спряженими ефектами 1-го порядку – п'єзоелектричним, п'єзомагнітним, та 2-го порядку – піроелектричним, піромагнітним [23] визначальні рівняння для компонент $\sigma_{ij}^{(E)}$ тензора напружень і густини ентропії η мають таку ж структуру, як і за відсутності ЕМП [17, 18, 24].

У випадку електропровідних теплопровідних тіл, термопружна поведінка матеріалу яких у межах пружності є лінійною [18], маємо

$$\sigma_{ij}^{(E)} \approx \sigma_{ij}^0 = \left\{ \left(K - \frac{2}{3} G \right) e_{kk} - K[\alpha(T - T_0)] \right\} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}, \quad (35)$$

$$\eta \approx \eta^0 = -c_\varepsilon(T_0)^{-1}(T - T_0) + \alpha K(\rho)^{-1} \varepsilon_{kk}, \quad (36)$$

де K , G – пружні сталі, α – коефіцієнт об'ємного температурного розширення.

Кінетичне рівняння для введеного потоку \mathbf{q} тепла встановлено [17] на основі узагальненої дисипативної нерівності (6) (у наближенні лінійного зв'язку між термодинамічним потоком і силою). За означеної в конкретній моделі електропровідного тіла швидкості дисипації енергії зовнішнього ЕМП внаслідок процесів поляризації, намагнічування та електропровідності (об'ємної густини сумарних тепловиділень \mathbf{Q}) це рівняння має вигляд закону теплопровідності Фур'є [17, 22]

$$q_i = -\alpha T_{,i}, \quad (37)$$

де α – коефіцієнт теплопровідності.

Оскільки метою статті є моделювання взаємозв'язаних електромагнітних, теплових і механічних процесів у тілах з матеріалів, для яких є характерними явища намагнічування при взаємодії з ЕМП, необхідно конкретизувати співвідношення, які описують процеси намагнічування залежно від типу матеріалів і характеру амплітудно-частотних параметрів зовнішнього поля.

Надалі розглянемо два типи тіл з магнітними властивостями – феромагнітні та феритові.

2. Феромагнітні та феритові тіла в зовнішніх однорідних полях. Спочатку розглянемо ізотропні (полікристалічні) *феромагнітні тіла*, для яких за дії зовнішнього ЕМП домінуючими є процеси електропровідності та намагнічування. Такі тіла характеризуємо високою електропровідністю, що визначається струмами провідності у власній системі відліку $\mathbf{J}' = \mathbf{I}'^{(c)}$, які описуємо законом Ома як для нерухомого тіла. Щодо поляризаційних властивостей, вони є звичайними лінійними діелектриками, процеси поляризації в яких мають миттєвий характер. При цьому вектор поляризації \mathbf{P}' збігається за напрямком з вектором напруженості \mathbf{E}' електричного поля. Визначальні рівняння, які описують електропровідні та поляризаційні характеристики таких тіл, мають вигляд

$$\mathbf{J}' = \lambda \mathbf{E}', \quad \mathbf{D}' = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}', \quad (38)$$

де λ – коефіцієнт електропровідності, ε – відносна діелектрична проникність.

Процеси намагнічування *феромагнетиків* мають гістерезисний характер (рис. 1), обумовлений доменною структурою їх будови. При цьому експериментально встановлювана залежність між індукцією \mathbf{B}' і напруженістю \mathbf{H}' (вектори \mathbf{B}' і \mathbf{H}' паралельні) магнітного поля описується співвідношенням

$$\mathbf{B}' = B(H) \mathbf{e}_H = \mu(H) \mathbf{H}', \quad (39)$$

де $\mu(H)$ – абсолютна магнітна проникність; $\mathbf{e}_H = \mathbf{H}'/H$ – орт у напрямку вектора \mathbf{H}' ; H і B – проекції векторів \mathbf{H}' і \mathbf{B}' на додатний напрям вектора \mathbf{H}' . За циклічного перемагнічування залежність (39) описує динамічну петлю гістерезису за насичення. Гістерезисну залежність $B(H)$ з урахуванням специфіки процесів намагнічування при періодичній зміні в часі магнітного поля $H = A \cos \omega t + C \sin \omega t$ апроксимуємо формальною аналітичною залежністю [6, 7, 26]:

$$B(H) = \mu_0 H + \beta_H \arctg \alpha_H H. \quad (40)$$

де $H = H$ для матеріалів, що мають вузькі петлі гістерезису, які моделюємо основними кривими намагнічування (магнітнотверді феромагнетики) [2];

$H = \sqrt{1 - \chi_H^2} H - \frac{\chi_H}{\omega} \frac{\partial H}{\partial t}$ для матеріалів, що мають широку петлю гістерезису (магнітотверді феромагнетики) [3]. Крім того, у співвідношенні (40) позначено $\beta_H = (2/\pi) M_s$, $M_s = \mu_0^{-1} B_s$ – намагніченість насичення; $\alpha_H = (\mu_1 - 1) \mu_0 \beta_H^{-1}$,

μ_1 – початкова відносна магнітна проникність; $\chi_H = \begin{cases} H_c/H_m, & H \leq H_m, \\ H_c/H_0, & H > H_m, \end{cases}$ де

H_0 і H_m – значення напруженостей на поверхні тіла та відповідне гістерезисному насиченню; H_c – коерцитивна сила.

При описі електрофізичних властивостей *ферит* вважаємо ізотропним матеріалом, що має низьку електропровідність ($\lambda = 10^{-6} \div 10^{-2}$ См/м), для якого характерними є процеси одночасно намагнічування і поляризації, а вектори намагнічування і поляризації паралельні відповідно до векторів напруженостей магнітного та електричного полів. Визначальні рівняння, які окреслюють електрофізичні властивості (як для нерухомого тіла), запишемо у вигляді [9]

$$\mathbf{B}' = B(H) \mathbf{e}_H = \mu(H) \mathbf{H}', \quad \mathbf{D}' = D(E) \mathbf{e}_E \equiv \varepsilon(E) \mathbf{E}', \quad \mathbf{J}' = \lambda \mathbf{E}'. \quad (41)$$

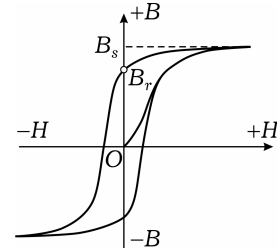


Рис. 1

Магнітні властивості фериту описуються аналогічно, як і у феромагнетика. У співвідношеннях (41) $\varepsilon(E)$ – діелектрична проникність; $\mathbf{e}_E = \mathbf{E}/E$ – орт у напрямку вектора \mathbf{E}' ; E і D – проекції векторів \mathbf{E}' і \mathbf{D}' на додатний напрям вектора \mathbf{E}' . За циклічних перемагнічування і переполяризації перші дві залежності із (41) описують динамічні петлі гістерезису, для яких є характерним насичення. Форми петель для конкретних матеріалів залежать від частоти і амплітуди зовнішнього поля. Для слабких полів і високих частот криві намагнічування і поляризації мають форму еліпса. Для окремих феритів відомі (виміряні експериментально) такі характеристики: B_s і D_s , B_r і D_r , H_c і E_c , H_{\max} і E_{\max} і відповідно μ_i , ε_i та μ_m , ε_m . Тут B_s , D_s – індукції насичення; B_r , D_r – залишкові індукції; H_c , E_c – коерцитивні сили; H_{\max} , E_{\max} – характерні величини напруженостей при насичених намагнічуванні та поляризації; μ_i , ε_i – початкові відносні проникності; μ_m , ε_m – максимальні відносні проникності. Гістерезисні залежності $B(H)$ і $D(E)$ за врахування специфіки процесів намагнічування і поляризації феритів при гармонічних в часі напруженостях магнітного і електричного полів $\{H, E\} = A_* \cos \omega t + C_* \sin \omega t$ отримуємо у вигляді [6, 9 та ін.]

$$B(H) = \mu_0 H + \beta_H \arctg \alpha_H H, \quad D(E) = \varepsilon_0 E + \beta_E \arctg \alpha_E E, \quad (42)$$

де $E = E$ для матеріалів з вузькими петлями гістерезису, які моделюємо основними кривими намагнічування і поляризації (м'які ферити), і $E = \sqrt{1 - \chi_E^2} E - \frac{\chi_E}{\omega} \frac{\partial E}{\partial t}$ для матеріалів, що мають широку петлю гістерезису

(тверді ферити). Крім того, в (42) позначено $\beta_E = (2/\pi)P_s$, $\alpha_E = (\varepsilon_i - 1)\varepsilon_0\beta_E^{-1}$ і

$$P_s = D_s - \text{поляризація насичення}; \quad \chi_E = \begin{cases} E_c/E_m, & E \leq E_m, \\ E_c/E_0, & E > E_m, \end{cases} \text{ де } E_0 - \text{значення}$$

напруженості на поверхні тіла.

У випадку еліптичної залежності між індукціями і напруженостями при гармонічних напруженостях магнітного і електричного полів в електротехнічній літературі використовують (за комплексного подання характеристик ЕМП і розгляді перших гармонік) комплексні проникності $\mu_* = \mu' - i\mu''$, $\varepsilon_* = \varepsilon' - i\varepsilon''$ та відповідні тангенси кутів втрат $\text{tg } \delta_m = \mu''/\mu'$ і $\text{tg } \delta_d = \varepsilon''/\varepsilon'$ (для характеристики гістерезисних тепловиділень). Їх отримуємо з (42) при

$$\begin{aligned} \mu' &= \mu_i \sqrt{1 - \chi_H^2}, \quad \mu'' = \mu_i \chi_H, \quad \chi_H = \frac{\text{tg } \delta_m}{\sqrt{1 + \text{tg } \delta_m}}, \quad \text{tg } \delta_m = \frac{\chi_H}{\sqrt{1 - \chi_H}}, \\ \varepsilon' &= \varepsilon_i \sqrt{1 - \chi_E^2}, \quad \varepsilon'' = \varepsilon_i \chi_E, \quad \chi_E = \frac{\text{tg } \delta_d}{\sqrt{1 + \text{tg } \delta_d}}, \quad \text{tg } \delta_d = \frac{\chi_E}{\sqrt{1 - \chi_E}}. \end{aligned} \quad (43)$$

При цьому комплексні проникності μ_* , ε_* (або тангенси втрат $\text{tg } \delta_m$, $\text{tg } \delta_d$) в (43) істотно залежать від частоти ω . У літературі відомі значення комплексних проникностей і відповідних тангенсів втрат як функцій від частоти для різних типів феритів [15], які описують залежності між напруженостями і індукціями при $\omega \geq 10^4 \text{ с}^{-1}$ і $H_{\max} \leq 10^3 \text{ А/м}$.

3. Феромагнітні та феритові тіла в зовнішніх комбінованих полях.

Для збудження резонансних явищ, що супроводжуються інтенсивним поглинанням електромагнітної енергії (у приладах, які використовують феромагнітний, ядерний магнітний та електронний парамагнітний резонанс), та магнітостатичних коливань і хвиль у системах типу магнітопроводів застосовують комбінацію постійного магнітного та змінного електромагнітного

полів. При цьому елемент з магнітними властивостями (зокрема, феромагнітний чи феритовий) знаходиться у взаємно перпендикулярних постійному та змінному магнітних полях, що забезпечує максимальний вплив моментних факторів взаємодії.

За згаданих умов вектор напруженості \mathbf{H}' магнітного поля, а також вектор \mathbf{M}' намагніченості у тілі здійснюють коливні рухи, а магнітні процеси описуються рівнянням гіромагнітних коливань у формах Гільберта чи Ландау – Лівшица [15]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}}' &= -\gamma_s \mathbf{M}' \times \mathbf{H}' + \frac{\alpha_s}{|\mathbf{M}'|} \mathbf{M}' \times \dot{\mathbf{M}}' = \\ &= -\frac{\gamma_s}{1 + \alpha_s^2} \left[\mathbf{M}' \times \mathbf{H}' + \frac{\alpha_s}{|\mathbf{M}'|} \mathbf{M}' \times (\mathbf{M}' \times \mathbf{H}') \right],\end{aligned}\quad (44)$$

де $\gamma_s = g_0 \mu_0 \frac{e_e}{2m_e}$ – магнітомеханічне (гіромагнітне) відношення; g_0 – фактор Ланде, e_e і m_e – відповідно заряд і маса електрона; α_s – параметр втрат, який визначається в експерименті.

Електропровідні, поляризаційні та магнітні властивості тіла залежно від його матеріалу означаємо наведеними вище співвідношеннями для феромагнітних чи феритових тіл.

Для розглядуваного випадку зовнішнього електромагнітного впливу на тіло запишемо рівняння електродинаміки та вирази для енергетичних і силових чинників дії в магнітостатичному наближенні, яке можна використати при дослідженні феромагнітного резонансу та виникнення і поширення магнітостатичних хвиль. Для цього напруженість магнітного поля $\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ у зовнішньому середовищі (на поверхні тіла) подамо у вигляді суми постійної в часі та гармонічної складових:

$$\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = H_0(x) + H_1(x) \cos vt, \quad \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) \perp \mathbf{H}_1(\mathbf{x}), \quad (45)$$

де $H_1(x)$ – амплітуда гармонічної складової напруженості магнітного поля, $v = \omega / 2\pi$ – частота коливань.

Використовуючи методи теорії подібності та розмірностей введемо відповідні характерні значення розглядуваних електромагнітних величин і зведемо систему рівнянь електродинаміки та вирази для енергетичних і силових чинників до безрозмірної форми (за нехтування рухомістю середовища). Надалі всі безрозмірні величини (крім часу $\tau = vt$) позначатимемо нижнім індексом «*».

Нехай ℓ – характерний розмір тіла. Тоді для безрозмірних часу, радіуса-вектора та оператора ∇ за символічного запису отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{x}_* = \mathbf{x}/\ell, \quad \nabla_* = \ell \nabla. \quad (46)$$

Безрозмірні функції (скалярні та векторні) введемо так:

$$Z_* = Z / Z_1,$$

де

$$Z = \{\Omega, \mathbf{j}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{M}, \mathbf{Q}, \mathbf{F}, \mathbf{L}\}. \quad (47)$$

Величини Z_1 пронормуємо на амплітуду напруженості магнітного поля H_1 :

$$\Omega_1 = \frac{\varepsilon v}{c_0^2} H_1, \quad J_1 = \lambda E_1, \quad E_1 = v \ell \mu_0 H_1, \quad D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon E_1, \quad B_1 = \mu_0 H_1,$$

$$P_1 = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_1, \quad M_1 = H_1, \quad Q_1 = \mu_0 v H_1^2, \quad F_1 = \frac{\mu_0}{\ell} H_1^2, \quad L_1 = \mu_0 H_1^2.$$

Тоді, враховуючи подання (46), (47), запишемо систему вихідних рівнянь електродинаміки та вирази для чинників дії поля у безрозмірних величинах

– співвідношення електродинаміки:

$$\begin{aligned}\nabla_* \cdot \mathbf{E}_* &= \Omega_*, & \nabla_* \cdot \mathbf{B}_* &= 0, & \nabla_* \times \mathbf{E}_* &= -\frac{\partial \mathbf{B}_*}{\partial \tau}, \\ \nabla_* \times \mathbf{H}_* &= \varepsilon \varepsilon_v \left(\frac{\partial \mathbf{E}_*}{\partial \tau} + \varepsilon_\varepsilon \mathbf{E}_* \right), & \frac{\partial \Omega_*}{\partial \tau} + \varepsilon_\varepsilon \Omega_* &= 0;\end{aligned}\quad (48)$$

– рівняння Гільберта (44) з урахуванням подання (45):

$$\frac{\partial \mathbf{M}_*}{\partial \tau} = -\frac{v_H}{v(1 + \alpha_s^2)} [\mathbf{M}_* \times \mathbf{H}_* + \alpha_s \mathbf{M}_* \times (\mathbf{M}_* \times \mathbf{H}_*)]; \quad (49)$$

– вираз для сумарних тепловиділень (джоулевих і гістерезисних):

$$Q_* = \varepsilon \varepsilon_\varepsilon \varepsilon_v \mathbf{E}_*^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha_s v_H}{v(1 + \alpha_s^2)} |\mathbf{M}_*| [\mathbf{M}_*^2 \mathbf{H}_*^2 - (\mathbf{M}_* \cdot \mathbf{H}_*)^2] - \mathbf{M}_* \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_*}{\partial \tau} \right\}, \quad (50)$$

– вираз для пондеромоторної сили:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_* &= \varepsilon \varepsilon_v (\Omega_* \mathbf{E}_* + \varepsilon_\varepsilon \mathbf{J}_* \times \mathbf{B}_*) + (\varepsilon - 1) \varepsilon_v [(\mathbf{E}_* \cdot \nabla_*) \mathbf{E}_* + \mathbf{E}_* \times (\nabla_* \times \mathbf{E}_*)] + \\ &+ [(\mathbf{M}_* \cdot \nabla_*) \mathbf{B}_* + \mathbf{M}_* \times (\nabla_* \times \mathbf{B}_*)];\end{aligned}\quad (51)$$

– зв'язок між пондеромоторною силою і тензором $\sigma_*^{(M)}$ натягів Максвелла:

$$F_{*i} = \sigma_{*ij}^{(M)} - \varepsilon \varepsilon_v \frac{\partial G_{*i}}{\partial \tau}; \quad (52)$$

– тензор натягів Максвелла:

$$\begin{aligned}\sigma_{*ij}^{(M)} &= \varepsilon \varepsilon_v E_{*i} E_{*j} + H_{*i} B_{*j} + w^{(em)} \delta_{ij}, \\ w^{(em)} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{M}_*^2 - \mathbf{H}_*^2) - \varepsilon_v \mathbf{E}_*^2];\end{aligned}\quad (53)$$

– вираз для пондеромоторного моменту:

$$\mathbf{L}_* = \mathbf{M}_* \times \mathbf{H}_*. \quad (54)$$

Тут введено такі позначення: $\varepsilon_\varepsilon = \frac{v_\varepsilon}{v}$, $v_\varepsilon = \lambda \varepsilon \varepsilon_0 = \frac{2\pi}{\tau_\varepsilon}$, τ_ε – характер-

ний час електродифузії електричного заряду; $\varepsilon_v = \left(\frac{v\ell}{c_0} \right)^2$ – параметр, який

характеризує струми зміщення в неелектропровідних тілах; $v_H = \gamma_s H_1$ – характерна частота гіромагнітних коливань (частота прецесії).

Оцінимо наведені вище критерії (у феромагнітному наближенні) для типового феритового матеріалу, характеристики якого є такими: $\varepsilon = 10$ в області надвисоких частот, $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$ С/м. При цьому прийємо: $\ell = 2 \cdot 10^{-5}$ м (тонка плівка), $\alpha_s = 0.01$, $g_0 = 2$, $H_1 = 2 \cdot 10^5$ А/м. Тоді $v_\varepsilon = 2.26 \cdot 10^6$ Гц, $\tau_\varepsilon = 2.78 \cdot 10^{-6}$ с, $\gamma_s = 2.21 \cdot 10^5$ м/С, $v_H = 4.42 \cdot 10^{10}$ Гц. Значення ще двох параметрів, залежних від частоти поля v , оцінимо для характерної частоти гіромагнітних коливань v_H . Тоді отримаємо $\varepsilon_\varepsilon = 5.11 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_v = 8.68 \cdot 10^{-6}$.

Зі співвідношень електродинаміки (48) випливає, що параметри ε_e і ε_v відповідають за електричні процеси у п'єзових матеріалах. Оскільки цими параметрами з огляду на їхню малість порівняно з одиницею нехтуватимемо, то в рівняннях електродинаміки опустимо члени з напруженістю електричного поля та густиною електричного заряду, тобто рівняння Максвелла (48) розглядатимемо у відомому в літературі так званому магнітостатичному наближенні [21, 28, 31]. Тоді у виразах (50), (51) та (53) відповідно для сумарних тепловиділень, пондеромоторної сили та тензора натягів Максвелла, а також у виразі (52), що встановлює зв'язок між ними, опустимо члени, в які входять \mathbf{E}_* , Ω_* та \mathbf{J}_* .

Таким чином, загальні співвідношення електродинаміки та вирази для чинників дії ЕМП на феромагнітне середовище в розмірних величинах за нехтування наведеними вище критеріями мають вигляд

– співвідношення електродинаміки:

$$B_{i,i} = 0, \quad \varepsilon_{ijk} \mathbf{H}_{j,k} = 0, \quad (55)$$

– вираз для сумарних тепловиділень:

$$Q = \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{M}} - \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{H}}), \quad (56)$$

– вираз для пондеромоторної сили та тензора натягів Максвелла:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{V}), \quad F_i = \sigma_{ij,j}^{(M)}, \quad (57)$$

$$\sigma_{ij}^{(M)} = H_i B_j + w^{(m)} \delta_{ij}, \quad w^{(m)} = \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M}^2 - \mathbf{H}^2). \quad (58)$$

Зазначимо, що рівняння Гільберта (49) і вираз для пондеромоторного моменту (54) залишаються без змін. Співвідношення (49), (54)–(58) визначають рівняння електродинаміки та вирази для енергетичних і силових чинників дії електромагнітного поля на феромагнетик у магнітостатичному наближенні,

4. Система ключових рівнянь моделі. Використовуючи сформульовані вище балансові співвідношення механіки (1)–(3), рівняння електродинаміки (рівняння Максвелла) (13) чи рівняння магнітостатики (48), визначальні рівняння для теплопровідного лінійно пружного тіла (35)–(37), фізичні рівняння моделі феромагнітних (38), (39) чи феритових (41) тіл та отримані вирази для енергетичних та силових чинників дії ЕМП, записано систему ключових диференціальних рівнянь моделі відносно параметрів, які вибрані за незалежні (визначальні). Вона описує взаємозв'язані електромагнітні, теплові та механічні процеси у феритових та феромагнітних тілах за дії зовнішнього ЕМП, яке задовольняє у зовнішньому середовищі систему рівнянь (8). Систему ключових рівнянь доповнено крайовими (контактними) умовами на поверхні розглядуваного тіла при певній конкретизації властивостей зовнішнього середовища. Сформульовано початкові умови на визначальні параметри.

Вигляд рівнянь електродинаміки в загальному випадку в області тіла залежить від фізичних співвідношень, які описують його властивості. Наприклад, для тіла з м'якого фериту система незалежних рівнянь буде

$$\varepsilon_{ijk} H_{k,j} = \varepsilon_d(E) \frac{\partial E_i}{\partial t} + \lambda E_i, \quad \varepsilon_{ijk} H_{k,j} = -\mu_d(H) \frac{\partial H_i}{\partial t}. \quad (59)$$

Тут

$$\varepsilon_d(E) = \varepsilon_0 + \frac{\alpha_E \beta_E}{1 + (\alpha_E E)^2} \equiv \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\varepsilon_i - 1}{1 + (\alpha_E E)^2} \right],$$

$$\mu_d(H) = \mu_0 + \frac{\alpha_H \beta_H}{1 + (\alpha_H H)^2} \equiv \mu_0 \left[1 + \frac{\mu_i - 1}{1 + (\alpha_H H)^2} \right].$$

Систему (59) доповнюємо системою рівнянь (8) для області зовнішнього середовища та контактними умовами (21), (22).

Рівняння, які описують механічні поля (рівняння теорії пружності), отримуємо на основі рівняння руху (32) і співвідношень (35). Якщо за визначальний параметр вибрати вектор переміщень \mathbf{u} , то враховуючи, що $\dot{x}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$, маємо такі рівняння для компонент вектора переміщень (механічні характеристики нетермочутливі):

$$(\lambda + \mu)u_{,jj,i} + \mu u_{,i,jj} - \frac{\alpha}{3} T_{,i} + F_i^* = \rho \frac{\partial^2 u_i}{dt^2}, \quad (60)$$

де $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, а E , ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона.

Механічні граничні умови можуть відповідати заданню на поверхні тіла вектора переміщень $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ чи прикладених до цієї поверхні зусиль $\mathbf{P}^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t)$ (у цьому випадку граничну умову записуємо у вигляді (33)). Можуть бути також і умови змішаного типу, коли на одній частині поверхні задаються переміщення, а на іншій – зусилля.

Рівняння, яке описує теплові процеси, отримаємо виходячи з рівняння балансу енергії (3) за дії поля, врахувавши формалізм введення визначальних параметрів, рівняння стану та означену дисипацію електромагнітної енергії – тепловиділення Q . Тоді, використовуючи визначальні рівняння для ентропії (36) та теплового потоку (37) і вибираючи за ключову функцію температуру T , отримаємо таке рівняння теплопереносу:

$$(\alpha T_{,i})_{,i} - \rho c_\varepsilon^0 \frac{\partial T}{\partial t} + Q - \alpha K T \frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} = 0. \quad (61)$$

Теплова гранична умова, сформульована на основі умови (4) неперервності нормальних складових теплового потоку \mathbf{q} на поверхні тіла, буде

$$\alpha T_{,i} n_i = q^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t). \quad (62)$$

Зауважимо, що $q^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t)$ може враховувати теплообмін випромінюванням між тілом і оточуючим середовищем [14]. Якщо тіло знаходиться в умовах конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем, температура $T^{\text{ext}}(t)$ якого задана, то тепловіддача описується законом Ньютона

$$q^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t) = \alpha_S(\mathbf{x})[T(\mathbf{x}, t) - T^{\text{ext}}(t)], \quad (63)$$

де $\alpha_S(\mathbf{x})$ – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні.

Отриману систему диференціальних рівнянь і граничних умов доповнюємо початковими умовами, які задають значення ключових параметрів моделі і швидкостей точок тіла в початковий момент часу (при $t = 0$).

Висновки. Побудована модель взаємодії ЕМП з деформівними твердими тілами з ускладненими магнітними властивостями (феритовими та ферромагнітними) може бути використана при розгляді конкретних практично важливих задач про термомеханічну поведінку таких тіл, зокрема в умовах ферромагнітного резонансу чи при індукційному нагріві, а також поширення в них магнітостатичних хвиль.

Так, в роботі [12], базуючись на магнітостатичному наближенні сформульовано вихідні задачі електродинаміки для визначення параметрів ЕМП за наявності нормального сталого та дотичного гармонічного за часом магнітного поля. Для цього випадку запропоновано методичку визначення характеристик магнітного поля та відповідних їм енергетичних і силових чин-

ників дії ЕМП для феритового шару, що ґрунтується на методі розкладу шуканих величин за малим параметром, за який вибрано відношення амплітуди дотичного гармонічного поля до значення нормального сталого. При цьому обмежились членами до другого порядку розкладу (що обґрунтовано квадратичними залежностями енергетичних і силових чинників від характеристик поля). Для випадку малих гіромагнітних коливань вихідну систему співвідношень магнітостатики записано відносно амплітуд гармонік магнітного поля та отримано систему алгебраїчних рівнянь для гармонік вектора намагнічування в першому та другому наближеннях. При цьому часові подання чинників мають вигляд суми незалежних від часу характеристик магнітного поля та відповідно їх першої та другої гармоніки.

У роботі [12] запропоновано подання напруженості магнітного поля і знайдено вирази для намагнічування, індукції магнітного поля, енергетичних і силових чинників дії поля при феромагнітному резонансі (вибірковому поглинанні феромагнетиком енергії ЕМП при частотах, що збігаються з власними частотами прецесії магнітних моментів), за якого частина енергії ЕМП частково поглинається магнетиком і викликає його нагрів. При цьому напруження, спричинені нагріванням, а також силовими чинниками дії поля (пондеромоторні сили та момент сил), можуть досягати значних рівнів. Здійснено постановку задачі дослідження термонапруженого стану тонкої магнітної плівки. Показано, що характер частотної поведінки досліджуванних характеристик є різним при низьких ($\omega \rightarrow 0$) і високих ($\omega \rightarrow \infty$) частотах. Однак їхні значення є нехтовними порівняно зі значеннями на резонансній частоті. Встановлено також різну швидкість зростання тепловиділень і температури за дуже короткий час $t = 3.3 \cdot 10^{-5}$ с на резонансних частотах, що було виявлено і в перших експериментальних дослідженнях [15] магнітного резонансу.

М. Т. Солодяком у праці [25] з використанням методу малого параметра досліджено термонапружений стан магнітом'якого шару у гармонічному за часом магнітному полі з підмагнічуванням. Згідно з критерієм Кюрі, визначено межі застосування пружної теорії при дослідженні термонапруженого стану.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки бюджетної програми «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень (КПКВК 6541230)».

1. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф. Термомеханіка багатокомпонентних тіл низької електропровідності. – Львів: Сполом, 2006. – 300 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 1.
2. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т. Термопружність електропровідних магнітомягких тіл в зовнішніх усталених електромагнітних полях // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1987. – № 2. – С. 43–47.
3. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т. Термопружність електропровідних магнітотвердих тіл в зовнішніх усталених електромагнітних полях // Доп. АН УРСР Сер. А. – 1988. – № 5. – С. 25–28.
4. Вестяк В. А., Гачкевич А. Р., Тарлаковський Д. В., Терлецький Р. Ф. Упругая полуплоскость под действием нестационарных поверхностных кинематических возмущений // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 2. – С. 164–172.
Te same: Vestyak V. A., Hachkevych A. R., Tarlakovskii D. V., Terlets'kii R. F. Elastic half plane under the action of nonstationary surface kinematic perturbations // J. Math. Sci. – 2014. – **203**, No. 2. – P. 202–214.
5. Вестяк В. А., Тарлаковський Д. В., Терлецький Р. Ф. Нестационарные процессы в электромагнитоупругой полуплоскости под действием поверхностных возмущений // Проблеми обчислюв. механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 19. – С. 34–40.
6. Гачкевич А. Р., Солодяк М. Т. Исследование процесса деформирования электропроводных ферромагнитных тел во внешних гармонических электромагнитных полях // Мат. методи и физ.-мех. поля. – 1990. – Вып. 31. – С. 25–30.

- Te same: *Gachkevich A. R., Solodyak M. T.* A study of the deformation process of electrically conducting ferromagnetic bodies in harmonic external electromagnetic fields // *J. Sov. Math.* – 1993. – **64**, No. 3. – P. 908–913.
7. *Гачкевич А. Р., Солодяк М. Т.* Термомеханическое поведение слоя при воздействии гармонического электромагнитного поля // *Прикл. механика.* – 1989. – **25**, № 12. – С. 93–101.
Te same: *Gachkevich A. R., Solodyak M. T.* Thermomechanical behavior of a layer under the influence of a harmonic electromagnetic field // *Sov. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, No. 12. – P. 1251–1258.
 8. *Гачкевич А. Р., Терлецький Р. Ф., Солодяк М. Т.* Математическое моделирование электромагнитоупругих и тепловых процессов в магнитных средах // *Теорет. и прикл. механика.* – 2013. – Вып. 6 (52). – С. 76–88.
 9. *Гачкевич О. Р., Івасько Р. О.* Термомеханіка феритових тіл у квазіусталеному електромагнітному полі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2000. – **43**, № 1. – С. 161–172.
 10. *Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т., Івасько Р. О., Бойчук В. Я.* Моделювання дії електромагнетного поля на термомеханічну поведінку деформівних твердих тіл // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2009. – **45**, № 1. – С. 43–54.
 11. *Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т., Терлецький Р. Ф., Гачкевич М. Г.* Термонапружений стан магнетного шару за феромагнетного резонансу // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2015. – **51**, № 2. – С. 91–97.
 12. *Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т., Терлецький Р. Ф., Тарлаковський Д. В.* Співвідношення електродинаміки, енергетичні та силові чинники дії електромагнетного поля для магнетних середовищ // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2014. – **50**, № 4. – С. 62–68.
 13. *Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф.* Моделі термомеханіки намагнетовних і поляризованих електропровідних деформівних твердих тіл // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2004. – **40**, № 3. – С. 19–37.
Te same: *Hachkevych O. R., Terlets'kyi R. F.* Models of thermomechanics of magnetisable and polarisable conducting deformable solids // *Mater. Sci.* – 2004. – **40**, No. 3. – P. 320–336. – <https://doi.org/10.1007/PL00021997>.
 14. *Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Брухаль М. Б.* Деякі проблеми математичного моделювання в термомеханіці тіл різної прозорості за теплового опромінення // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – **51**, № 3. – С. 202–219.
Te same: *Hachkevych A. R., Terlets'kii R. F., Brukhal' M. B.* Some problems of mathematical modeling in thermomechanics of bodies of various transparencies subjected to thermal irradiation // *J. Math. Sci.* – 2010. – **165**, No. 3. – P. 403–425.
 15. *Гуревич А. Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. – Москва: Наука, 1973. – 592 с.
 16. *Де Гроот С. Р., Сатторп Л. Г.* Электродинамика. – Москва: Наука, 1982. – 560 с.
 17. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. – Москва: Мир, 1974. – 304 с.
 18. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. – Москва: Высш. шк., 1983. – 399 с.
 19. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 4.
 20. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика. – Москва: Наука, 1982. – 608 с.
 21. *Кринчик Г. С.* Физика магнитных явлений. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 336 с.
 22. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 599 с.
Te same: *Luikov A. V.* Analytical heat diffusion theory. – New York: Acad. Press, 2012. – 702 p.
 23. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов. – Москва: Мир, 1967. – 385 с.
 24. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
Te same: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – London: Pergamon Press, 1962. – xii+628 p.
 25. *Солодяк М. Т.* Математична модель магнетотермопружності феромагнетних тіл // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2000. – **36**, № 1. – С. 7–16.
Te same: *Solodyak M. T.* Mathematical model of magnetothermoelasticity of ferromagnetic bodies // *Mater. Sci.* – 2000. – **36**, No. 1. – P. 1–13. – <https://doi.org/10.1007/BF02805110>.

26. Солодяк М. Т. Термопружний стан магнетом'якого шару у гармонійному за часом магнетному полі з підмагнечуванням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 2. – С. 19–28.
 Те саме: *Solodyak M. T. Thermoelastic state of a magnetically soft layer in a magnetic field harmonic as a function of time with biasing // Mater. Sci. – 2004. – 40, No. 2. – P. 173–184. – <https://doi.org/10.1007/s11003-005-0002-4>.*
27. Суворов Е. М., Терлецький Р. Ф., Федотенков Г. В. Плоская задача типа Ламба для моментноупругого полупространства // «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред»: Материалы XVIII Междунар. симп. им. А. Г. Горшкова. – Т. 2. – Москва: ООО «ТР-принт», 2012. – С. 149–161.
28. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – Москва: Наука, 1976. – 616 с.
29. Терлецький Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика. – Москва: Высш. шк., 1980. – 335 с.
30. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – Москва: Мир, 1975. – 592 с.
 Те саме: *Truesdell C. A first course in rational continuum mechanics. – New York etc.: Acad. Press, 1977. – xxiii + 280 p.*
31. Фальковский О. И. Техническая электродинамика. – Москва: Связь, 1978. – 430 с.
32. Hutter K., van de Ven A. A. F. Field matter interaction in thermoelastic solids. – Lect. Notes in Phys. – **88**. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1978. – viii+231 p.
33. Hutter K., van de Ven A. A. F., Ursescu A. Electromagnetic field-matter interaction in thermoelastic solids and viscous fluids. – Lect. Notes in Phys. – **710**. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 2006. – 382 p.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ, ТЕПЛОВЫХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МАГНИТНЫХ СРЕДАХ С УЧЕТОМ МОМЕНТНЫХ ФАКТОРОВ

Рассмотрена специфика построения моделей термомеханики ферромагнитных (ферритовых) тел с учетом моментных силовых факторов, обусловленных взаимодействием с электромагнитным полем. Получены, в частности, исходные соотношения моделей при действии внешнего поля, являющегося комбинацией постоянного магнитного и переменного электромагнитного полей. Они могут быть использованы для постановки конкретных практически важных задач о термомеханическом поведении таких тел в условиях ферромагнитного резонанса, индукционного нагрева при подмагничивании, а также распространения в них магнитостатических волн.

Ключевые слова: модели электромагнитотермоупругости, моментные силовые факторы, ферромагнетики и ферриты, магнитостатическое приближение, резонансные явления.

MODELING OF ELECTROMAGNETIC, THERMAL AND MECHANICAL PROCESSES IN MAGNETIC MEDIA TAKING INTO ACCOUNT THE MOMENT FACTORS

The peculiarities of the construction of thermomechanics models for ferromagnetic (ferrite) solids taking into account the moment force factors caused by interaction with the electromagnetic field are considered. In particular, the basic relations of models at the action of an external field, which is a combination of a constant magnetic field and variable electromagnetic field are obtained. They can be used to formulate specific practically important problems on the thermomechanical behavior of such solids under conditions of ferromagnetic resonance, induction heating during magnetization, as well as the magnetostatic waves propagation in them.

Key words: models of electromagnetothermoelasticity, moment force factors, ferromagnetics and ferrites, magnetostatic approximation, resonance phenomena.