УДК 517.956

І. Д. Пукальський, Б. О. Яшан*

ОДНОСТОРОННЯ КРАЙОВА ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Для параболічного рівняння другого порядку розглянуто односторонню крайову задачу з імпульсними умовами за часовою змінною. Коефіцієнти рівняння і крайової умови мають степеневі особливості довільного порядку за часовою і просторовими змінними на деякій множині точок. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку поставленої задачі в гельдерових просторах зі степеневою вагою.

Ключові слова: *параболічне рівняння з виродженням, степенева особливість, імпульсна умова, існування і єдиність розв'язку.*

Дослідження задач механіки, теорії пружності та керування приводять до розв'язання односторонніх крайових задач для диференціальних рівнянь. Зокрема, таким задачам присвячено монографію [2]. Математичне моделювання багатьох фізичних і хімічних явищ приводить до задач з виродженнями та особливостями для рівнянь із частинними похідними. Наприклад, у рівнянні Шредінгера, яке описує стан квантомеханічної системи, коефіцієнти визначають потенціальну енергію і мають степеневі особливості при молодших похідних [3]. Питанням існування і якісних властивостей розв'язків крайових задач для рівнянь з виродженнями присячено праці [4, 6, 9].

Вивчення систем з розривними траєкторіями пов'язано з розвитком техніки, в якій імпульсні системи керування відіграють значну роль. Дослідження задач теорії автоматичного керування, теорії ядерних реакторів, динамічних систем приводять до розв'язання нелокальних крайових задач для рівнянь з імпульсною дією. Задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією всесторонньо вивчені у працях А. М. Самойленка і О. М. Перестюка [7, 8, 10] та інших авторів.

Питання існування неперіодичних або періодичних розв'язків рівнянь із частинними похідними гіперболічного типу з імпульсною дією вивчались у працях [1, 7]. Побудові теорії коректності задачі Коші для параболічних систем з імпульсною дією у просторах Діні присвячено другий розділ монографії [5].

У цій статті розглядаємо односторонню крайову задачу з імпульсними умовами для лінійного параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і в крайовій умові за будь-якими змінними на деякій множині точок. Доведено існування єдиного розв'язку поставленої задачі та встановлено оцінки його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

1. Постановка задачі і основний результат. Нехай η, t_0, t_1, $\ldots, t_N$, t_{N+1} – фіксовані додатні числа, $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1}$, $t_0 < \eta < t_{N+1}$, $\eta \ne t_\lambda$, $\lambda \in \{1, 2, \ldots, N\}$, D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область, $\bar{\Omega} \subset D$, $\dim \Omega \le n-1$. Позначимо

$$Q_{(0)} = \{(t,x) : t \in [t_0, t_{N+1}),\, x \in \Omega\} \cup \{(t,x) : t = \eta,\, x \in D\},$$

$$Q^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times D, \qquad \Gamma^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times \partial D, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, N\}.$$

В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка при $t \ne t_k$, $(t,x) \notin Q_{(0)}$ задовольняє рівняння

* bohdanjaschan94@gmail.com

$$(Lu)(t,x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\Big] u(t,x) = f(t,x), \qquad (1)$$

умови за змінною t:

$$u(t_0+0,x) = \varphi_0(x), \qquad (2)$$

$$u(t_\lambda+0,x) - u(t_\lambda-0,x) = \psi_\lambda(x)u(t_\lambda-0,x) + \varphi_\lambda(x), \qquad (3)$$

а на бічній межі $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$ – крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}(Bu-g)(t,x) \equiv \lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x)\partial_{x_k}u + b_0(t,x)u - g(t,x)\right] \geq 0, \qquad (4)$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D} u \geq 0, \qquad \lim_{x\to z\in\partial D}[u(Bu-g)](t,x) = 0. \qquad (5)$$

Степеневі особливості коефіцієнтів диференціальних виразів L і B у точці $P(t,x) \in Q \backslash Q_0$ характеризуватимуть функції $s_1(\beta_i^{(1)}, t)$, $s_2(\beta_i^{(2)}, x)$:

$$s_1(\beta_i^{(1)},t) = \begin{cases} |t-\eta|^{\beta_i^{(1)}}, & |t-\eta| \leq 1, \\ 1, & |t-\eta| \geq 1, \end{cases} \qquad s_2(\beta_i^{(2)},x) = \begin{cases} \rho^{\beta_i^{(2)}}(x), & \rho(x) \leq 1, \\ 1, & \rho(x) \geq 1, \end{cases}$$

$\rho(x) = \inf_{z\in\bar\Omega}|x-z|$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty,\infty)$, $\nu \in \{1,2\}$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)},\ldots,\beta_n^{(\nu)})$, $\beta = (\beta^{(1)},\beta^{(2)})$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(3). Введемо позначення: ℓ, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$, $\mu_j^{(1)}$, $\mu_j^{(2)}$, $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, – дійсні числа, $\ell \geq 0$, $[\ell]$ – ціла частина числа ℓ, $\{\ell\} = \ell - [\ell]$, $q^{(\nu)} \geq 0$, $\gamma^{(\nu)} \geq 0$, $\delta^{(\nu)} \geq 0$, $\mu_j^{(\nu)} \geq 0$, $\nu \in \{1,2\}$; $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(1)})$, $R_i(t^{(1)},x^{(2)})$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, – довільні точки із $Q^{(k)}$, $x^{(1)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_i^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$.

Позначимо через $H^\ell(\gamma;\beta;q;Q)$ множину функцій u, які мають неперервні похідні в $Q^{(k)} \backslash Q_{(0)}$ при $t \neq t_k$ вигляду $\partial_t^s\partial_x^r$, $2s+|r| \leq [\ell]$, для яких є скінченною норма

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_0 = \sup_k\{\sup_{\bar Q^{(k)}}|u|\} \equiv \|u;Q\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_\ell = \sup_k\left\{\sum_{2s+|r|\leq[\ell]}\left\|u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\right\|_{2s+|r|} + \left\langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\right\rangle_\ell\right\},$$

де, наприклад,

$$\left\|u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\right\|_{2s+|r|} \equiv \sup_{P\in\bar Q^{(k)}}\Big[s_1(q^{(1)}+2s\gamma^{(1)},t)\, s_2(q^{(2)}+2s\gamma^{(2)},x) \times$$

$$\times \left|\partial_t^s\partial_x^r u(P)\right| \prod_{i=1}^{n} s_1(r_i(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t)\, s_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x)\Big],$$

$$\left\langle u;\gamma,\beta,q;Q^{(k)}\right\rangle_\ell \equiv \sum_{2s+|r|=[\ell]}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Big[\sup_{(P_2,R_\nu)\subset\bar Q_k}\Big[s_1(q^{(1)}+2s\gamma^{(1)},t^{(2)}) \times\right.$$

$$\times s_2(q^{(2)}+2s\gamma^{(2)},\tilde x)\prod_{i=1}^{n} s_1(r_i(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t^{(2)})\, s_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\tilde x) \times$$

$$\times\left|\partial_t^s\partial_x^r u(P_2)-\partial_t^s\partial_x^r u(R_\nu)\right|\left|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}\right|^{-\{\ell\}}\times$$

$$\times\, s_1\big(\{\ell\}(\gamma^{(1)}-\beta_\nu^{(1)}),t^{(2)}\big)\, s_2\big(\{\ell\}(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)}),\tilde{x}\big)\Big]+$$

$$+\sup_{(P_1,P_2)\subset\bar{Q}_k}\Big[s_1\big(q^{(1)}+\ell\gamma^{(1)},\tilde{t}\big)\, s_2\big(q^{(2)}+(2s+\{\ell\})\gamma^{(2)},x^{(1)}\big)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n} s_1\big(-r_i\beta_i^{(1)},\tilde{t}\big)\, s_2\big(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x^{(1)}\big)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\{\ell/2\}}\times$$

$$\times\left|\partial_t^s\partial_x^r u(P_1)-\partial_t^s\partial_x^r u(P_2)\right|\Big]\Big\},\qquad |r|=r_1+\ldots+r_n\,,$$

$$s_1(q,\tilde{t})=\min\{s_1(q,t^{(1)}),\ s_1(q,t^{(2)})\}\,,$$

$$s_2(q,\tilde{x})=\min\{s_2(q,x^{(1)}),\ s_2(q,x^{(2)})\}\,.$$

Позначимо через $\Gamma^{(1)}$ множину точок межі Γ, у яких виконується умова

$$\lim_{x\to z\in\partial D} u(t,x)=0\,.$$

Тоді з крайової умови (5) випливає, що в точках $\Gamma^{(2)}=\Gamma\backslash\Gamma^{(1)}$ буде виконуватись умова

$$\lim_{x\to z\in\partial D}(Bu-g)(t,x)=0\,.$$

Нехай для задачі (1)–(3) виконуються умови.

1°. Для довільного вектора $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ і $\forall(t,x)\in Q\backslash Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(t,x)s_1(\beta_i^{(1)},t)s_1(\beta_j^{(1)},t)s_2(\beta_i^{(2)},x)s_2(\beta_j^{(2)},x)\xi_i\xi_j\le\pi_2|\xi|^2\,,\quad(6)$$

де π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі,

$$s_1(\mu_i^{(1)},t)\,s_2(\mu_i^{(2)},x)\,A_i\in H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)\,,$$

$$s_1(\mu_0^{(1)},t)\,s_2(\mu_0^{(2)},x)\,A_0\in H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)\,,\ A_0\ge 0\,,$$

$$s_1(\delta^{(1)},t)\,s_2(\delta^{(2)},x)\,b_0\in H^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)\,,$$

$$s_1(\beta_i^{(1)},t)\,s_1(\beta_j^{(1)},t)\,s_2(\beta_i^{(2)},x)\,s_2(\beta_j^{(2)},x)\,A_{ij}\in H^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)\,,$$

$$s_1(\beta_i^{(1)},t)\,s_2(\beta_i^{(2)},x)\,b_i\in H^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)\,,$$

а вектори $\mathbf{b}^{(s)}=\{b_1^{(s)},\ldots,b_n^{(s)}\}$, $b_i^{(s)}=s_1(\beta_i^{(1)},t)\,s_2(\beta_i^{(2)},x)\,b_i$, і $\mathbf{e}=\{e_1,\ldots,e_n\}$, $e_i=$ $=b_i\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{-1/2}$, утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\mathbf{n}$ до ∂D у точці $P(t,x)\in\Gamma^{(2)}$ кут, менший ніж $\pi/2$, $b_0(t,x)\big|_{\Gamma^{(2)}}>0$, $\partial\Omega\subset C^{2+\alpha}$.

2°. $f\in H^{\alpha}(\gamma;\beta;\mu_0;Q)$, $\quad\varphi_k\in H^{2+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta},0;Q\bigcap(t=t_k))$, $\quad\tilde{\gamma}=(0,\gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta}=(0,\beta^{(2)})$, $\quad g\in H^{1+\alpha}(\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)})$, $\quad\sum_{k=1}^{n}b_k(t,x)\dfrac{\partial\psi_\lambda}{\partial x_k}\Big|_{\Gamma^{(2)}}=0$,

$$[g(t_\lambda + 0, x) - g(t_\lambda - 0, x)(1 + \psi_\lambda(x)) - B\varphi_\lambda(x)]\big|_{\Gamma^{(2)}} = 0\,,$$

$$\psi_\lambda \in C^{2+\alpha}(Q \cap (t = t_\lambda)), \qquad \varphi_\lambda(x)\big|_{\Gamma^{(1)}} = 0\,,$$

$$\gamma^{(\nu)} = \max\left\{\max_i (1 + \beta_i^{(\nu)}), \max_i (\gamma^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}, \delta^{(\nu)}\right\}, \quad \nu \in \{1, 2\}.$$

Справджується така

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(5) *виконуються умови* ***1°, 2°***. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(5) *із простору* $H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma,\beta,0;Q\|_{2+\alpha} \le c\left\{\sum_{k=0}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}\left(1 + \|\psi_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_\lambda))}\right)\times\right.$$
$$\times\left(\left\|\varphi_{k-1};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\cap(t = t_{k-1})\right\|_{2+\alpha} + \left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\right\|_\alpha +\right.$$
$$\left.+\left\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k-1)}\right\|_{1+\alpha}\right) + \left\|\varphi_N;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\cap(t = t_N)\right\|_{2+\alpha} +$$
$$\left.+\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^N\right\|_\alpha + \left\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(N)}\right\|_{1+\alpha}\right\}. \tag{7}$$

Для доведення **теореми 1** встановимо спочатку коректну розв'язність крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну послідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)–(5).

2. Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m^{(k)} = Q^{(k)} \cap \{(t,x)\in Q^{(k)} : s_1(1,t) \ge m_1^{-1},\ s_2(1,x) \ge m_2^{-1},\ m = (m_1, m_2),\ m_i > 1,$ $i \in \{1,2\}\}$ – послідовності областей, які при $m_i \to \infty$ збігаються до $Q^{(k)}$.

Розглянемо в області Q задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} +\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)\right] u_m(t,x) = f_m(t,x)\,, \tag{8}$$

які задовольняють умови за змінною t:

$$u_m(t_0 + 0, x) = \varphi_0^{(0)}(x)\,,$$
$$u_m(t_\lambda + 0, x) - u_m(t_\lambda - 0, x) = \psi_m^{(\lambda)}(x) u_m(t_\lambda - 0, x) + \varphi_m^{(\lambda)}(x) \tag{9}$$

і крайову умову

$$\lim_{x\to z\in\partial D}(B_1 u_m - g_m)(t,x) =$$
$$= \lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i(t,x)\,\partial_{x_i} u_m + h_0(t,x)u_m - g_m(t,x)\right] \ge 0\,,$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D} u_m \ge 0, \qquad \lim_{x\to z\in\partial D}[u_m(B_1 u_m - g_m)] = 0\,. \tag{10}$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0 та функції f_m, $\varphi_m^{(k)}$, $\psi_m^{(\lambda)}$, g_m визначаються таким чином. Якщо $(t,x) \in Q_m^{(k)}$, то коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0 і функції f_m, $\varphi_m^{(k)}$, $\psi_m^{(\lambda)}$, g_m співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, f, φ_k,

ψ_λ, g відповідно, а в областях $Q^{(k)} \setminus Q_m^{(k)}$ є неперервними продовженнями коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0 і функцій f, φ_k, ψ_λ, g із областей $Q_m^{(k)}$ в області $Q^{(k)} \setminus Q_m^{(k)}$ зі збереженням гладкості і норми [10, с. 82]. Для задачі (8)−(10) є правильною

Теорема 2. *Нехай* $u_m(t,x)$ *− класичний розв'язок задачі* (8)−(10) *в області* Q *і виконуються умови* ***1°***, ***2°***. *Тоді для* $u_m(t,x)$ *справджується оцінка*

$$|u_m(t,x)| \le \sum_{k=1}^{N} \left\{ \prod_{\lambda=k}^{N} \left(1 + \left\|\psi_m^{(\lambda)}; Q \cap (t = t_\lambda)\right\|_0\right) \left(\left\|\varphi_m^{(k-1)}; Q \cap (t = t_{k-1})\right\|_0 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left\|f_m a_0^{-1}; Q^{(k-1)}\right\|_0 + \left\|g_m h_0^{-1}; Q^{(k-1)}\right\|_0 \right) \right\} +$$
$$+ \left\|\varphi_m^{(N)}; Q \cap (t = t_N)\right\|_0 + \left\|f_m a_0^{-1}; Q^N\right\|_0 + \left\|g_m h_0^{-1}; Q^{(N)}\right\|_0 . \quad (11)$$

Д о в е д е н н я. Правильність оцінки (11) встановлюємо за методикою доведення теореми 2.2 [4, с. 25]. Нехай $\max\limits_{\bar{Q}^{(k)}} u_m(t,x) = u_m(P_1) > 0$. Якщо $P_1 \in Q^{(k)}$, то достатні умови існування максимуму функції багатьох змінних у точці P_1 забезпечують виконання співвідношень

$$\partial_t u_m(P_1) \ge 0, \qquad \partial_{x_i} u_m(P_1) = 0, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u_m(P_1) \le 0 , \qquad (12)$$

при цьому $u_m(t,x)$ задовольняє рівняння (8).

Остання нерівність з (12) є правильною, оскільки в точці максимуму другі похідні $\partial_{y_i} \partial_{y_j} u_m$ за будь-яким напрямком

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} s_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) s_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)})(x_i - x_i^{(1)}), \qquad \det\left\|\alpha_{ij}\right\| \ne 0 ,$$

є недодатними. Тому

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u_m(P_1) = \sum_{\ell,j=1}^{n} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} s_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\, s_1(\beta_k^{(1)}, t^{(1)}) \times \right.$$
$$\left. \times\, s_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)})\, s_2(\beta_k^{(2)}, x^{(1)}) \alpha_{k\ell} \alpha_{ij} \right\} \partial_{y_j} \partial_{y_\ell} u_m(P_1) =$$
$$= \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell\, \partial_{y_j} \partial_{y_\ell} u_m < 0 .$$

Оскільки $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ − характеристичні числа квадратичної форми, то вони є додатними, згідно з обмеженням (6). З урахуванням співвідношень (12) і рівняння (8) у точці P_1 отримуємо нерівність

$$u_m(P_1) \le f_m(P_1) a_0^{-1}(P_1) .$$

Якщо $P_1 \in [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$, то виконується умова (9). Оскільки $\dfrac{du_m(P_1)}{d\mathbf{e}} \ge$ ≥ 0 на $\Gamma^{(2)}$, то з рівності $\lim\limits_{x \to z \in \partial D} [u_m(B_1 u_m - g_m)] = 0$ маємо, що

$$u_m(P_1) \le \sup_{\bar{Q}^{(k)}} (g_m h_0^{-1}) . \qquad (13)$$

Аналогічно, розглядаючи точку найменшого від'ємного значення функції у випадку $\min\limits_{\bar{Q}^{(k)}} u_m = u_m(P_2) < 0$, $P_2 \in Q^{(k)}$, маємо

$$u_m(P_2) \geq f_m(P_2) a_0^{-1}(P_2) . \tag{14}$$

Якщо $P_2 \in [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$, то $\dfrac{du_m(P_2)}{d\mathbf{e}} \leq 0$ на $\Gamma^{(2)}$. Враховуючи рівність $\lim\limits_{x \to z \in \partial D} [u_m(B_1 u_m - g_m)] = 0$, отримаємо

$$u_m(P_2) \geq \inf_{\bar{Q}^{(k)}} (g_m h_0^{-1}) . \tag{15}$$

У випадку, коли $P_1 \in \bar{D}$ або $P_2 \in \bar{D}$, з початкової умови (9) одержимо

$$| u_m | \leq \left\| \varphi_m^{(0)}; D \right\|_0 . \tag{16}$$

Враховуючи нерівності (13)–(16) при $k = 0$, одержимо

$$\left\| u_m; Q^{(0)} \right\| \leq \left\| f_m a_0^{-1}; Q^{(0)} \right\|_0 + \left\| g_m h_0^{-1}; Q^{(0)} \right\|_0 + \left\| \varphi_m^{(0)}; D \right\|_0 . \tag{17}$$

Якщо $P_1 \in Q \cap (t = t_\lambda)$ або $P_2 \in Q \cap (t = t_\lambda)$, $\lambda \geq 1$, то, враховуючи умову (9), одержимо рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned} \left\| u_m; Q \cap (t = t_\lambda) \right\| \leq \left(1 + \left\| \psi_m^{(\lambda)}; Q \cap (t = t_\lambda) \right\|_0 \right) \times \\ \times \left\| u_m; Q^{(\lambda-1)} \right\|_0 + \left\| \varphi_m^{(\lambda)}; Q \cap (t = t_\lambda) \right\|_0 , \end{aligned} \tag{18}$$

Об'єднуючи нерівності (13)–(18), одержимо нерівність (11). ♦

В областях $Q^{(k)}$, $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$, розглянемо задачу

$$\begin{aligned} & (L_1 u_m)(t, x) = f_m(t, x), \qquad u_m(t_k + 0, x) = G_m^{(k)}(t_k, x) , \\ & \lim_{x \to z \in \partial D} [u_m(B_1 u_m - g_m)] = 0, \qquad \lim_{x \to z \in \partial D} (B_1 u_m - g_m)(t, x) \geq 0 , \\ & \lim_{x \to z \in \partial D} u_m(t, x) \geq 0, \qquad t \in [t_k, t_{k+1}) , \end{aligned} \tag{19}$$

де

$$\begin{aligned} & G_m^{(0)}(t_0, x) = \varphi_m^{(0)}(x) , \qquad x \in D , \\ & G_m^{(\lambda)}(t_k, x) = (1 + \psi_m^{(\lambda)}(x)) u_m(t_\lambda - 0, x) + \varphi_m^{(\lambda)} , \\ & \qquad\qquad x \in Q \cap (t = t_\lambda) , \quad \lambda \in \{1, 2, \ldots, N\} . \end{aligned}$$

В областях $Q^{(k)}$ розв'язок крайової задачі (19) існує і є єдиним у просторі $C^{2+\alpha}(Q^{(k)})$ [4, с. 90].

Знайдемо оцінки похідних від розв'язків $u_m(t, x)$. Введемо у просторі $C^\ell(Q)$ норму $\| u_m; \gamma; \beta; q; Q \|_\ell$, еквівалентну при фіксованих m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка виражається так само, як і $\| u_m; \gamma; \beta; q; Q \|_\ell$, тільки замість функцій $s_1(q^{(1)}, t)$, $s_2(q^{(2)}, x)$ беремо відповідно $d_1(q^{(1)}, t)$, $d_2(q^{(2)}, x)$:

$$d_1(q^{(1)}, t) = \begin{cases} \max\{ s_1(q^{(1)}, t), m_1^{-q^{(1)}} \}, & q^{(1)} \geq 0, \\ \min\{ s_1(q^{(1)}, t), m_1^{-q^{(1)}} \}, & q^{(1)} < 0, \end{cases}$$

$$d_2(q^{(2)}, x) = \begin{cases} \max\{ s_2(q^{(2)}, x), m_2^{-q^{(2)}} \}, & q^{(2)} \geq 0, \\ \min\{ s_2(q^{(2)}, x), m_2^{-q^{(2)}} \}, & q^{(2)} < 0. \end{cases}$$

Справджується

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* **1°**, **2°**. *Тоді для розв'язку* $u_m(t,x)$ *задачі* (8)–(10) є *правильною оцінка*

$$\|u_m;\gamma,\beta,0;Q\|_{2+\alpha} \le c\Bigg\{\sum_{k=1}^{N}\Bigg\{\prod_{\lambda=k}^{N}\left(1+\|\psi_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(Q\bigcap(t=t_\lambda))}\right)\times$$

$$\times\left(\left\|\varphi_{k-1};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\bigcap(t=t_{k-1})\right\|_{2+\alpha}+\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\right\|_{\alpha}+\right.$$

$$\left.+\left\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k-1)}\right\|_{1+\alpha}\right)\Bigg\}+\left\|\varphi_N;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\bigcap(t=t_N)\right\|_{2+\alpha}+$$

$$+\left\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}\right\|_{\alpha}+\left\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(N)}\right\|_{1+\alpha}\Bigg\}. \qquad (20)$$

Стала c *не залежить від* m.

Д о в е д е н н я. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [9, 11], отримаємо

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha}\le(1+\varepsilon^{\alpha})\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\rangle_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\left\|u_m;Q^{(k)}\right\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число із $(0,1)$. Тому достатньо оцінити півнорму $\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\rangle_{2+\alpha}$.

З означення півнорми випливає, що в областях $Q^{(k)}$ існують точки P_1, P_2, H_i, для яких виконується одна з нерівностей

$$\frac{1}{2}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha}\le E_\mu,\qquad \mu\in\{1,2\}, \qquad (21)$$

де

$$E_1\equiv\sum_{2s+|r|=2}\Bigg\{\sum_{\nu=1}^{n}d_1(2s\gamma^{(1)},t^{(2)})\,d_2(2s\gamma^{(2)},\tilde x)\prod_{i=1}^{n}d_1\big(r_i(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t^{(2)}\big)\times$$

$$\times d_2\big(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\tilde x\big)\left|\partial_t^s\partial_x^r u_m(P_2)-\partial_t^s\partial_x^r u_m(H_\nu)\right|\times$$

$$\times\left|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}\right|^{-\alpha/2}d_1\big(\alpha(\gamma^{(1)}-\beta_\nu^{(1)}),t^{(1)}\big)\,d_2\big(\alpha(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)}),\tilde x\big)\Bigg\},$$

$$E_2\equiv d_1\big((2+\alpha)\gamma^{(1)},\tilde t\big)\,d_2\big((2s+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)}\big)\prod_{i=1}^{n}d_1\big(-r_i\beta_i^{(1)},\tilde t\big)\times$$

$$\times d_2\big(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x^{(1)}\big)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\alpha/2}\times$$

$$\times\left|\partial_t^s\partial_x^r u_m(P_1)-\partial_t^s\partial_x^r u_m(P_2)\right|,\qquad 2s+|r|=2.$$

Якщо $\left|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}\right|\ge\frac{\varepsilon_1}{4}\frac{1}{n}d_1(\gamma^{(1)},\tilde t)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)},\tilde x)\equiv T_1$, ε_1 – довільне дійсне число із $(0,1)$, то

$$E_1\le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_2.$$

Якщо $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\ge\frac{\varepsilon_1^2}{16}d_1(2\gamma^{(1)},\tilde t)d_2(2\gamma^{(2)},\tilde x)\equiv T_2$, то

$$E_2\le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_2.$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (16), (17), знаходимо

$$E_\mu \le \varepsilon^\alpha \left\| u_m ; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \right\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon) \left\| u_m ; Q^{(k)} \right\|_0 , \qquad \mu \in \{1,2\}. \qquad (22)$$

Нехай

$$\left| x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \right| \le T_2, \qquad \left| t^{(1)} - t^{(2)} \right| \le T_1 ,$$

$$d_1(\gamma^{(1)}, \tilde t) \equiv d_1(\gamma^{(1)}, t^{(1)}), \qquad d_2(\gamma^{(2)}, \tilde x) \equiv d_2(\gamma^{(2)}, x^{(1)}).$$

Приймемо, що $|x_n - \xi_n| \le 2T_2$, $\xi \in \partial D$, або $|x - \xi| \le 2T_2 n$.

Розглянемо кулю $\mathcal{K}(r,P)$ радіуса r, $r \ge 4T_2 n$, що містить точки P_1, H_i, P_2, з центром у деякій точці $P \in \Gamma$. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D \cap \mathcal{K}(r,P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(y)$ [11, с. 155], в результаті якого область $\Pi = Q^{(k)} \cap \mathcal{K}(r,P)$ переходить в область Π_1, для точок якої $y_n \ge 0$, $t \ge 0$.

Якщо покласти $u_m(t,x) = \omega_m(t,y)$, $P_1 = R_1$, $H_k = M_k$, $P_2 = R_2$, $d_2(\gamma^{(2)}, x^{(1)}) = p_2(\gamma^{(2)}, y^{(1)})$ і коефіцієнти диференціальних виразів L_1 і B_1 при цьому перетворенні позначити через k_{ij}, k_i, k_0, ℓ_i, ℓ_0, то ω_m буде розв'язком задачі

$$\left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n k_{ij}(R_1) \partial_{y_i} \partial_{y_j} \right] \omega_m = \sum_{i,j=1}^n [k_{ij}(t,y) - k_{ij}(R_1)] \partial_{y_i} \partial_{y_j} \omega_m +$$

$$+ \sum_{i=1}^n k_i(t,y) \partial_{y_i} \omega_m + k_0(t,y)\omega_m + F_m(t, \psi(y)) \equiv F_m^{(0)}(t,y), \quad (23)$$

$$\omega_m(t_k + 0, y) = G_m^{(k)}(t_k, \psi(y)), \qquad (24)$$

$$\omega_m \big|_{y_n = 0} \ge 0,$$

$$B_2 \omega_m \big|_{y_n=0} \equiv \sum_{k=1}^n \ell_k(t, R_1) \partial_{y_k} \omega_m \Big|_{y_n=0} \ge$$

$$\ge \left[\sum_{k=1}^n \left(\ell_k(t,R_1) - \ell_k(t,y) \right) \partial_{y_k} \omega_m - \ell_0(t,y) \omega_m + \right.$$

$$\left. + g_m(t, \psi(y)) e^{\lambda t} \right] \Big|_{y_n=0} \equiv G(t,y) \big|_{y_n=0},$$

$$\omega_m (B_2 \omega_m - G) \big|_{y_n=0} = 0. \qquad (25)$$

У задачі (23)–(25) зробимо заміну $\omega_m(t,y) = V_m(t,z)$, де $z_k = d_1(\beta_k^{(1)}, t^{(1)}) \times \times p_2(\beta_k^{(2)}, y^{(1)}) y_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Область визначення функцій $V_m(t,z)$ позначимо через Π_2. Тоді V_m буде розв'язком задачі

$$L_3 V_m \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\, d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)}) \times \right.$$

$$\left. \times\, p_2(\beta_i^{(2)}, y^{(1)})\, p_2(\beta_j^{(2)}, y^{(1)})\, k_{ij}(R_1)\, \partial_{z_i} \partial_{z_j} \right] V_m = F_m^{(0)}(t, Z),$$

$$V_m(t_k + 0, z) = G_m^{(k)}(Z) \equiv \Phi_m(Z),$$

$$V_m \big|_{z_n = m_2^{-1} p(\beta_n; R_1)} \ge 0,$$

$$B_3V_m\big|_{z_n=0} \equiv \sum_{k=1}^{n} d_1(\beta_k^{(1)}, t^{(1)})\, p_2(\beta_k^{(2)}, y^{(1)})\, \ell_k(t, R_1)\partial_{z_k} V_m\Big|_{z_n=0} \geq$$

$$\geq G(t, Z)\big|_{z_n=0},$$

$$V_m(B_3V_m - G)\big|_{z_n=0} = 0,$$

де

$$Z = \left(d_1(-\beta_1^{(1)}, t^{(1)})\, p_2(-\beta_1^{(2)}, y^{(1)})\, z_1, \ldots, d_1(-\beta_n^{(1)}, t^{(1)})\, p_2(-\beta_n^{(2)}, y^{(1)})\, z_n\right).$$

Позначимо

$$z_i^{(1)} = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\, p_2(\beta_i^{(2)}, y^{(1)})\, y_i^{(1)},$$

$$\Pi_\mu^{(1)} = \left\{ (t, z) \in \Pi_2 : \left|t - t^{(1)}\right| \leq \mu^2 T_2,\ \left|z_i - z_i^{(1)}\right| \leq \mu\sqrt{T_2},\ i \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

і виберемо тричі диференційовну функцію $\eta(t, z)$, яка задовольняє такі умови:

$$\eta(\tau, z) =$$

$$= \begin{cases} 1, & (t, z) \in \Pi_{1/2}^{(1)}, \quad 0 \leq \eta(t, z) \leq 1, \\ 0, & (t, z) \notin \Pi_{3/4}^{(1)}, \quad \left|\partial_t^k \partial_z^j \eta(t, z)\right| \leq \\ & \qquad \leq c_{ki} d_1(-(2k + |j|)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) p_2(-(2k + |j|)\gamma^{(2)}, y^{(2)}). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t, z) = \eta(t, z) V_m(t, z)$ буде розв'язком крайової задачі

$$L_3 W_m = \sum_{i,j=1}^{n} d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\, d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)})\, p_2(\beta_i^{(2)}, y^{(1)})\, p_2(\beta_j^{(2)}, y^{(1)})\, k_{ij}(R_1) \times$$

$$\times [\partial_{z_i}\eta \partial_{z_j} V_m + \partial_{z_j}\eta \partial_{z_i} V_m] +$$

$$+ V_m \Bigg[\sum_{i,j=1}^{n} d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\, d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)})\, p_2(\beta_i^{(2)}, y^{(1)}) \times$$

$$\times p_2(\beta_j^{(2)}, y^{(1)})\, k_{ij}(R_1)\, \partial_{z_i z_j}\eta - \partial_t \eta \Bigg] + F_m^{(0)}\eta \equiv F_m^{(1)}(t, z), \qquad (26)$$

$$W_m(t_k + 0, x) = \Phi_m(Z)\eta(t_k, z) \equiv \Phi_m^{(1)}(z), \qquad (27)$$

$$W_m\big|_{z_n=0} \geq 0,$$

$$B_3 W_m\big|_{z_n=0} \geq \Bigg[\sum_{k=1}^{n} d_1(\beta_k^{(1)}, t^{(1)}) p_2(\beta_k^{(2)}, y^{(1)}) \times$$

$$\times V_m \ell_k(t, R_1)\partial_{z_k}\eta - G(t, Z)\eta \Bigg]\Bigg|_{z_n=0} \equiv G_1,$$

$$W_m(B_3 W_m - G_1)\big|_{z_n=0} = 0. \qquad (28)$$

Можливі два випадки: існують точки межі $\Pi_2 \cap \{z_n = 0\}$, у яких виконується умова

$$(B_3 W_m - G_1)\big|_{z_n=0} = 0, \qquad (29)$$

або таких точок не існує, тобто

$$(B_3 W_m - G_1)\big|_{z_n=0} > 0,$$

тоді з крайової умови (28) маємо

$$W_m \big|_{z_n=0} = 0. \tag{30}$$

Нехай виконується умова (29), тоді досліджуємо задачу (26), (27), (29). Коефіцієнти рівняння (26) і крайової умови (29), згідно з накладеними умовами, обмежені сталими, не залежними від точки R_1. Тому, використовуючи теорему 6 [4, с. 368], для довільних точок $(M_1, M_2) \subset \Pi_{1/2}^{(1)}$ отримаємо нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2)\left|\partial_t^k \partial_z^j V_m(M_1) - \partial_t^k \partial_z^j V_m(M_2)\right| \le c\Big(\left\|F_m^{(1)}\right\|_{C^{\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)})} +$$

$$+\left\|\Phi_m^{(1)}\right\|_{C^{2+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)} \cap (t=t_k))} + \left\|G_1\right\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)} \cap \{(t,z) \in \Pi_{3/4}^{(1)}|_{z_n=0}\})}\Big), \tag{31}$$

де $2k + |j| = 2$, а $d(M_1, M_2)$ – параболічна відстань між M_1 і M_2.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,z)$, отримаємо оцінки

$$\left\|F_m^{(1)}\right\|_{C^{\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)})} \le cd_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) p_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)}, y^{(1)}) \times$$

$$\times\left(\left\|F_m; \gamma; 0, 2\gamma; \Pi_{3/4}^{(1)}\right\|_{\alpha} + \left\|V_m; \Pi_{3/4}^{(1)}\right\|_0 + \left\|V_m; \gamma; 0, 0; \Pi_{3/4}^{(1)}\right\|_2\right),$$

$$\left\|\Phi_m^{(1)}\right\|_{C^{2+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)} \cap (t=0))} \le cd_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) p_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)}, y^{(1)}) \times$$

$$\times\left\|\Phi_m; \tilde{\gamma}; 0; 0; \Pi_{3/4}^{(1)} \cap (t = t_k)\right\|_{2+\alpha},$$

$$\left\|G_1\right\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)} \cap \{(t,z) \in \Pi_{3/4}^{(1)}|_{z_n=0}\})} \le cd_1(-(2+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times p_2(-(2+\alpha)\gamma^{(2)}, y^{(1)}) \times \left(\left\|G; \gamma; 0; \gamma; \Pi_{3/4}^{(1)}\right\|_{1+\alpha} +\right.$$

$$\left. + \left\|V_m; \gamma; 0, 0; \Pi_{3/4}^{(1)}\right\|_2 + \left\|V_m; \Pi_{3/4}^{(1)}\right\|_0\right). \tag{32}$$

Підставляючи (32) у (31) і повертаючись до змінних (t, y), знаходимо

$$E_r \le c\Big(\left\|F_m; \gamma, \beta; 2\gamma; \Pi_2\right\|_{\alpha} + \left\|\Phi_m^{(k)}; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; \Pi_2 \cap (t = t_k)\right\|_{2+\alpha} +$$

$$+ \left\|G_1; \gamma, \beta; \gamma; \Pi_{3/4}^{(1)}\right\|_{1+\alpha} + c_1\left\|V_m; \gamma, \beta; 0; \Pi_2\right\|_2 + \left\|V_m; \Pi_2\right\|_0\Big),$$

$$r \in \{1, 2\}.$$

Враховуючи означення простору $H^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і умови ***1°, 2°,*** маємо

$$E_r \le c(n^2\rho^{\alpha} + \varepsilon^{\alpha}(n+2))\left\|u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} +$$

$$+ c_1\Big(\left\|f_m; \gamma, \beta; 2\gamma; Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} + \left\|G_m^{(k)}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; Q \cap (t = t_k)\right\|_{2+\alpha} +$$

$$+ \left\|g_m; \gamma, \beta; \gamma; Q\right\|_{2+\alpha} + \left\|u_m; Q\right\|_0\Big), \tag{33}$$

де ε, ρ – довільні числа, $\varepsilon \in (0,1)$, $\rho \in (0,1)$, $r \in \{1, 2\}$.

Якщо виконується умова (30), тоді досліджуємо задачу (23), (24), (30). Коефіцієнти рівняння (23), згідно з накладеними умовами, обмежені сталими, не залежними від точки R_1. Тому, використовуючи теорему 6.2 [4, с. 368], для довільних точок $(N_1, N_2) \subset \Pi_{1/2}^{(1)}$ одержимо

$$d^{-\alpha}(N_1, N_2)\left|\partial_t^j \partial_x^k v_m(N_1) - \partial_t^j \partial_x^k v_m(N_2)\right| \le$$
$$\le c\left(\left\|F_m^{(1)}\right\|_{C^{\alpha}(\Pi_{1/2}^{(1)})} + \left\|\Phi_m^{(1)}\right\|_{C^{2+\alpha}(\Pi_{3/4}^{(1)}\cap(t=t_k))}\right).$$

Враховуючи властивості функції $\eta(t,z)$, означення простору $H^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ і умови *1°, 2°*, отримаємо

$$E_r \le c(n^2\rho^{\alpha} + \varepsilon^{\alpha}(n+2))\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} + c_1\left(\left\|f_m;\gamma,\beta;2\gamma;Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} + \right.$$
$$\left. + \left\|G_m^{(k)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;Q\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha} + \left\|u_m;Q\right\|_0\right). \tag{34}$$

Нехай $|x-\xi| \ge 2T_2 n$. Розглянемо задачу

$$\left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right]u_m = \sum_{i,j=1}^{n}[a_{ij}(t,x) - a_{ij}(P_1)]\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(t,x)\partial_{x_i}u_m + a_0(t,x)\right)u_m + f_m \equiv F_m^{(2)}(t,z), \tag{35}$$

$$u_m(t_k+0,x) = G_m^{(k)}(t_k,x). \tag{36}$$

Нехай $\Pi_1^{(2)}$ − куб з центром у точці P_1, $\Pi_1^{(2)} \in Q$, і

$$\Pi_{\rho}^{(2)} = \{(t,x) \in Q^{(k)} : \left|t - t^{(1)}\right| \le 16^{-1}\mu^2 T,$$
$$\left|x_i - x_i^{(1)}\right| \le 4\mu^{-1}T_2,\ i \in \{1,2,\dots,n\}\}.$$

Зробимо в задачі (35), (36) заміну $u_m(t,x) = \omega_m(t,y)$, $x_i = d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)}) \times$ $\times d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})y_i$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Область визначення функцій $\omega_m(t,y)$ позначимо через $\Pi^{(3)}$. Тоді $\omega_m(t,y)$ буде розв'язком задачі

$$L_3\omega_m \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)\, d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})\, d_1(\beta_j^{(1)},t^{(1)}) \times\right.$$
$$\left.\times\, d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})\, d_2(\beta_j^{(2)},x^{(1)})\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right]\omega_m = F_m^{(2)}(t,Y),$$

$$\omega_m(t_k,y) = G_m^{(k)}(Y),$$

де

$$Y = \left(d_1(-\beta_1^{(1)},t^{(1)})\, d_2(-\beta_1^{(2)},x^{(1)})\, y_1,\dots, d_1(-\beta_n^{(1)},t^{(1)})\, d_2(-\beta_n^{(2)},x^{(1)})y_n\right).$$

Позначимо

$$y_i^{(1)} = d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})\, d_2(\beta_i^{(2)},x^{(1)})\, x_i^{(1)},$$

$$\Pi_{\mu}^{(3)} = \left\{(t,y) \in \Pi^{(3)} : \left|t - t^{(1)}\right| \le 16^{-1}\mu^2 T_1, \left|x_i^{(1)} - x_i\right| \le 4^{-1}\mu\sqrt{T_1},\right.$$
$$\left. i \in \{1,\dots,n\}\right\}$$

і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta_1(t,y)$, яка задовольняє умови

$$\eta_1(t,y) =$$

$$= \begin{cases} 1, & (t,y)\in \Pi^{(3)}_{1/2}, \quad 0\le \eta_1(t,y)\le 1, \\ 0, & (t,y)\notin \Pi^{(3)}_{3/4}, \quad \left|\partial_t^k \partial_x^j \eta_1(t,y)\right| \le \\ & \quad \le c_{kj} d_1(-(2k+|j|)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) d_2(-(2k+|j|)\gamma^{(2)}, x^{(1)}), \end{cases}$$

Тоді функція $V_m^{(1)}(t,y) = \omega_m(t,y)\eta_1(t,y)$ є розв'язком задачі Коші

$$L_3 V_m^{(1)} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1) d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\, d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)})\, d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)})\, d_2(\beta_j^{(2)}, x^{(1)}) \times$$

$$\times [\partial_{y_i}\eta_1\, \partial_{y_j}\omega_m + \partial_{y_j}\eta_1\, \partial_{y_i}\omega_m] +$$

$$+ \omega_m \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)\, d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\, d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)})\, d_2(\beta_j^{(2)}, x^{(1)})\, \partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta_1 - \partial_t \eta_1 \Big] + F_m^{(2)}\eta_1 \equiv F_m^{(3)},$$

$$V_m^{(1)}(0,y) = G_m^{(k)}\eta_1(t_k, y) = \varphi_m^{(2)}.$$

Згідно з теоремою 5.1 [4, с. 364] для довільних точок $(M_1, M_2) \subset \Pi^{(3)}_{1/2}$ виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_t^k\partial_x^j\omega_m(M_1) - \partial_t^k\partial_x^j\omega_m(M_2)\right| \le$$

$$\le c\left(\left\|F_m^{(3)}\right\|_{C^\alpha(V^{(2)}_{3/4})} + \left\|\varphi_m^{(2)}\right\|_{C^{2+\alpha}(V^{(1)}_{3/4}\cap(t=t_k))} \right), \quad 2k+|j| = 2.$$

Враховуючи властивості функції $\eta_1(t,y)$, означення простору $H^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ і умови ***1°***, ***2°***, одержимо нерівність (34). Скориставшись значенням виразу $G_m^{(k)}(t_k, x)$, отримаємо оцінки

$$\left\|G_m^{(0)};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_0)\right\|_{2+\alpha} \le \left\|\varphi_m^{(0)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\right\|_{2+\alpha}, \tag{37}$$

$$\left\|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha} \le c\left(1+\left\|\psi_m^{(k)}\right\|_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_k))}\right)\times$$

$$\times \left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha} + \left\|\varphi_m^{(k)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha},$$

$$k\in\{1,2,\ldots,N\}. \tag{38}$$

Об'єднуючи нерівності (21), (22), (33), (34), (37), (38) і вибираючи ε достатньо малим, одержуємо нерівності

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\right\|_{2+\alpha} \le c\Bigg\{ \sum_{k=1}^{N}\Bigg[\prod_{\lambda=k}^{N}\left(1+\left\|\psi_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_\lambda))}\right)\times$$

$$\times\Bigg(\left\|\varphi_m^{(k-1)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\cap(t=t_{k-1})\right\|_{2+\alpha} + \left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\right\|_\alpha +$$

$$+ \left\|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k-1)}\right\|_{1+\alpha}\Bigg)\Bigg] + \left\|\varphi_m^{(N)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q\cap(t=t_N)\right\|_{2+\alpha} +$$

$$+ \left\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}\right\|_\alpha + \left\|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(N)}\right\|_{1+\alpha}\Bigg\}. \tag{39}$$

Оскільки

$$\left\| f_m; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k)} \right\|_\alpha \le c \left\| f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k)} \right\|_\alpha,$$

$$\left\| \varphi_m^{(k)}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; Q \cap (t = t_k) \right\|_{2+\alpha} \le c \left\| \varphi_k; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; Q \cap (t = t_k) \right\|_{2+\alpha},$$

$$\left\| g_m; \gamma; \beta; \delta; Q^{(k)} \right\|_{1+\alpha} \le c \left\| g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(k)} \right\|_{1+\alpha}, \tag{40}$$

то, підставляючи (40) у (39), одержуємо нерівність (20). ♦

Д о в е д е н н я **теореми 1.** Права частина нерівності (36) не залежить від m_1, m_2 і послідовності

$$\{u_m^{(0)}\} \equiv \{u_m(P)\}, \qquad P(t,x) \in Q^{(k)},$$

$$\{u_m^{(1)}\} \equiv \{d_1(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}, t)\, d_2(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}, x)\, \partial_{x_i} u_m\},$$

$$\{u_m^{(2)}\} \equiv \{d_1(2\gamma^{(1)}, t)\, d_2(2\gamma^{(2)}, x)\, \partial_t u_m\},$$

$$\{u_m^{(3)}\} = \{d_1(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}, t)\, d_1(\gamma^{(1)} - \beta_j^{(1)}, t)\, d_2(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}, x) \times$$

$$\times\, d_2(\gamma^{(2)} - \beta_j^{(2)}, x)\, \partial_{x_i x_j} u_m\}$$

є рівномірно обмеженими та рівностепенево неперервними в області $Q^{(k)}$. За теоремою Арцела, існують підпослідовності $\{u_{m(\ell)}^{(\mu)}\}$, рівномірно збіжні в $Q^{(k)}$ до $\{u^{(\mu)}\}$, $\mu \in \{0,1,2,3\}$. Переходячи до границі при $m(\ell) \to \infty$ у задачі (8)–(10), одержимо, що $u(t,x) = u_0^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1)–(3), $u \in H^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$ і є правильною оцінка (7). ♦

1. *Асанова А. Т.* О нелокальной краевой задаче для систем гиперболических уравнений с импульсными воздействиями // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 315–328.

   Те саме: *Asanova A. T.* On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, No. 3. – P. 349–365. – https://doi.org/10.1007/s11253-013-0782-x.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.

   Те саме: *Duvaut G., Lions J.-L.* Les inéquations en mécanique et en physique. – Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1972. – xx+387 p.
3. *Зейтц Ф.* Современная теория твердого тела. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1949. – 736 с.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

   Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., Vol. 23. – Providence, RI: AMS, 1968. – xi+648 p.
5. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці: Чернів. нац. ун-т, 2010. – 248 с.
6. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
7. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 427 с. – Тр. Ин-та математики НАН Украины. Сер. Математика и её применение; Т. 67.

   Те саме: *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects: Multivalued right-hand sides with discontinuities. – Berlin: Walter de Gruyter Co., 2011. – 408 p.
8. *Перестюк Н. А., Ткач А. Б.* Периодические решения слаболинейной системы уравнений в частных производных с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 4. – С. 601–605.

Те саме: *Perestyuk N. A., Tkach A. B.* Periodic solutions of a weakly nonlinear system of partial differential equations with pulse influence // Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, No. 4. – P. 665–671. – https://doi.org/10.1007/BF02487331.

9. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
10. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
    Те саме: *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – x+462 p.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 427 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.

ОДНОСТОРОННЯЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ИМПУЛЬСНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Для параболического уравнения второго порядка рассмотрена односторонняя краевая задача с импульсными условиями по временной переменной. Коэффициенты уравнения и краевого условия имеют степенные особенности произвольного порядка по временной и пространственным переменным на некотором множестве точек. Установлены условия существования и единственности решения поставленной задачи в гельдеровых пространствах со степенным весом.

Ключевые слова: *параболическое уравнение с вырождением, степенная особенность, импульсное условие, существование и единственность решения.*

ONE-SIDED BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH IMPULSE CONDITIONS FOR A PARABOLIC EQUATIONS WITH DEGENERACY

For a second-order parabolic equation, a one-sided boundary-value problem with impulse conditions with respect to the time variable is considered. The coefficients of the equation and of the boundary condition have power singularities of arbitrary order in time and in spatial variables on a certain set of points. Conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem in Hölder spaces with power weights are established.

Key words: *parabolic equation with degeneration, power singularity, impulse condition, existence and uniqueness of the solution.*

Чернів. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
04.08.18