

**ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДАМИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ПРУЖНИХ ТІЛ, ОДНЕ З ЯКИХ МАЄ ТОНКЕ ПОКРИТТЯ, З'ЄДНАНЕ З ТІЛОМ ЧЕРЕЗ НЕЛІНІЙНИЙ ВІНКЛЕРІВСЬКИЙ ШАР**

*Розглянуто задачу про контактну взаємодію двох пружних тіл, одне з яких має покриття у вигляді тонкої оболонки типу Тимошенка, що з'єднане з тілом через нелінійний вінклерівський прошарок. Здійснено слабе формулювання цієї задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння. Запропоновано клас ітераційних методів декомпозиції області, які зводять розв'язування цього рівняння до розв'язування на кожній ітерації незалежних лінійних варіаційних рівнянь, що відповідають задачам теорії пружності для масивних тіл та задачі теорії оболонки Тимошенка для покриття з крайовими умовами Робіна на межах контакту. Встановлено умови слабкої збіжності цих методів. Проведено дослідження числової ефективності отриманих алгоритмів з використанням скінченноелементних апроксимацій.*

**Ключові слова:** контактні задачі теорії пружності, тонкі покриття, оболонки Тимошенка, вінклерівські шари, нелінійні варіаційні рівняння, методи декомпозиції області, метод скінченних елементів.

**Вступ.** Для підвищення надійності та міцності елементів і вузлів сучасних інженерних конструкцій і механізмів все частіше застосовують тонкі пружні і пластичні покриття різноманітної структури.

Тонкі пружні покриття забезпечують захист від дії агресивних середовищ, високих температур, негативного впливу частинок зношування, здійснюють антифрикційних і протиударний захист та дозволяють суттєво зменшити концентрацію напружень в основній конструкції.

Для вивчення впливу тонких покриттів на навколишнє середовище та підбору найбільш оптимальних механічних характеристик цих покриттів виникає необхідність дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тіл з тонкими покриттями, зокрема з урахуванням можливої контактної взаємодії між покриттям і основним тілом, а також з іншими тілами.

У працях [5, 6, 30, 32, 36, 42, 45, 46] здійснено аналіз НДС тіл з тонкими покриттями та включеннями за умов ідеального контакту між тілом і покриттям (включенням).

Контактні задачі для пружних і в'язкопружних тіл з тонкими покриттями досліджено у монографії [1]. Зокрема, у цій роботі обґрунтовано застосування для моделювання тонких покриттів математичного апарату теорій пластин і оболонок.

У роботі [21] розвинуто математичні моделі та методи розв'язування контактних задач для багат шарових тонкостінних тіл з міжфазними прошарками та для просторових тіл з тонкими пружними покриттями.

Огляд досліджень контактних задач для тіл з пружними і в'язкопружними тонкими покриттями здійснено в праці [11].

Задачі про контактну взаємодію нескінченних тіл з тонкими покриттями з використанням класичних підходів на основі інтегральних рівнянь досліджувалися у роботах [2, 3, 12, 17–19]. Числові методи на основі варіаційних формулювань і методу скінченних елементів (МСЕ) для розв'язування задач про контакт скінченних тіл з покриттями розвинуто у працях [4, 10, 22, 23].

Ефективним підходом до дослідження НДС різномасштабних конструкцій, зокрема масивних тіл з тонкими покриттями і включеннями, є застосування методів декомпозиції області (МДО). Цими методами зводять розв'язування крайової задачі для складної конструкції до розв'язування послідовності простіших задач для окремих її елементів, що дозволяє ефективно поєднувати різні математичні моделі (просторова теорія, теорія оболонок) і застосовувати найбільш оптимальні числові методи для окремих елементів конструкції. Результати досліджень стосовно розробки та застосування різних алгоритмів декомпози-

---

\* ihor84@gmail.com

ції області до розв'язування задач про контакт пружних тіл без покриттів наведено у працях [33, 34, 38, 40].

У працях [31, 37, 41, 47, 48] запропоновано ітераційні методи декомпозиції області типу Діріхле – Неймана, що базуються на поєднанні МСЕ і прямого методу граничних елементів (ПМГЕ) для розв'язування задач про НДС пружного тіла з тонким покриттям або включенням у вигляді пружної оболонки типу Тимошенка за умов ідеального контакту між ними та доведено збіжність цих методів.

У роботах [7, 8, 27–29, 35, 44] запропоновано паралельні ітераційні методи декомпозиції області типу Робіна для розв'язування задач про односторонній контакт декількох лінійно і нелінійно пружних тіл, а у працях [16, 25, 26, 43] ці методи узагальнено на випадок задач про неідеальний контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських покриттів. Ці МДО ґрунтуються на методі штрафу для варіаційних нерівностей та нестаціонарних ітераційних методах для нелінійних варіаційних рівнянь. Доведено збіжність деяких із цих методів.

У пропонованій статті розглянуто задачу про односторонній контакт двох масивних пружних тіл, одне з яких має тонке пружне покриття, з'єднане з тілом через нелінійний вінклерівський шар, за умов плоскої деформації. Для опису НДС тонкого покриття застосовано рівняння теорії оболонок Тимошенка, а для масивних тіл – класичні рівняння теорії пружності.

На основі результатів праць [13, 14, 16, 35, 37, 41] здійснено варіаційне формулювання цієї задачі у вигляді нелінійної варіаційної нерівності, яку за допомогою методу штрафу зведено до нелінійного варіаційного рівняння в гільбертовому просторі. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку варіаційних задач.

Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння, що відповідає вихідній контактній задачі, запропоновано клас паралельних ітераційних алгоритмів декомпозиції області типу Робіна. Ці алгоритми полягають у паралельному розв'язуванні на кожному ітераційному кроці трьох незалежних лінійних варіаційних рівнянь, одне з яких відповідає крайовій задачі теорії оболонок Тимошенка для тонкого покриття, а інші – крайовим задачам теорії пружності з умовами Робіна на спільних межах. Визначено умови слабкої збіжності алгоритмів МДО.

Здійснено числову апробацію отриманих методів декомпозиції області для задачі про односторонній контакт пружного тіла з поверхневою виїмкою і тонкого пружного покриття, яке з'єднане з іншим пружним тілом через нелінійний вінклерівський прошарок, із застосуванням скінченноелементних апроксимацій. Досліджено залежність швидкості збіжності алгоритмів МДО від фізичних і геометричних параметрів покриття. Проаналізовано розподіли напружень на контактній і міжфазній поверхнях. Показано ефективність розроблених алгоритмів декомпозиції області у порівнянні з МДО, у яких для моделювання НДС тонкого покриття застосовується класична теорія пружності.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо задачу про неідеальний контакт двох масивних пружних тіл  $\Omega_1, \Omega_3 \subset \mathbb{R}^2$  і тонкого пружного тіла  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ , яке є покриттям тіла  $\Omega_3$  (рис. 1). Між пружним тілом  $\Omega_1$  і тонким покриттям  $\Omega_2$  тіла  $\Omega_3$  виконуються умови одностороннього механічного контакту без тертя, а пружне тіло  $\Omega_2$  з'єднане зі своїм покриттям  $\Omega_3$  через нелінійний вінклерівський прошарок. Вважаємо, що межі  $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , усіх тіл є ліпшицевими. Позначимо  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ .

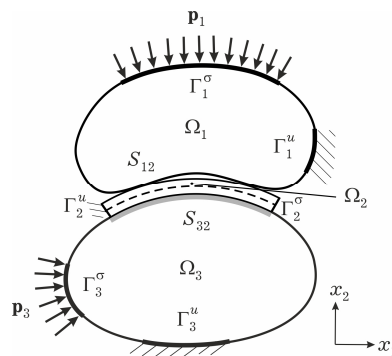


Рис. 1

У просторі  $\mathbb{R}^2$  введемо декартову систему координат  $Ox_1x_2$  з ортонормованим базисом  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ . Напружено-деформований стан у точці  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$  кожного з масивних тіл  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 3$ , визначають вектор переміщень  $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = u_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$ , симетричні тензори деформацій  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  і напружень

$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ . Ці величини задовольняють рівняння класичної теорії пружності – рівняння рівноваги, закон Гука та співвідношення Коші:

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + f_{\alpha i}(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad \alpha = 1, 3, \quad (1)$$

$$\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij} \lambda_\alpha(\mathbf{x}) (\varepsilon_{\alpha 11}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha 22}(\mathbf{x})) + 2\mu_\alpha(\mathbf{x}) \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, \\ \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad \alpha = 1, 3, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\alpha i}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\alpha j}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad \alpha = 1, 3, \quad (3)$$

де  $f_{\alpha i}(\mathbf{x})$  – компоненти вектора об'ємних сил  $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) = f_{\alpha i}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$ , що діють на тіло  $\Omega_\alpha$ ,  $\delta_{ij} = \{1, i = j\} \vee \{0, i \neq j\}$  – символ Кронекера, а  $\lambda_\alpha(\mathbf{x})$ ,  $\mu_\alpha(\mathbf{x})$  – параметри Ляме, які мають властивість

$$(\forall \alpha = 1, 2, 3) \quad (\forall \mathbf{x} \in \Omega_\alpha) \quad \{0 < \lambda_\alpha(\mathbf{x}) < \infty, \quad 0 < \mu_\alpha(\mathbf{x}) < \infty\}. \quad (4)$$

Для опису напружено-деформованого стану тонкого покриття  $\Omega_2$  застосуємо рівняння теорії оболонок Тимошенка [20]. Для цього введемо у тілі  $\Omega_2$  локальну криволінійну систему координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , яка пов'язана із його серединною поверхнею. Вважаємо, що покриття  $\Omega_2$  є циліндричною оболонкою, нескінченною у напрямку  $\xi_2$ . Позначимо через  $v_{21}, w_2, \gamma_{21}$  переміщення по дотичній, переміщення по нормалі та кут повороту відповідно, через  $\varepsilon_{211}, \varepsilon_{213}, \chi_{211}$  – деформації, а через  $T_{211}, T_{213}, M_{211}$  – зусилля і момент в оболонці.

Рівняння теорії оболонок Тимошенка для тонкого тіла  $\Omega_2$  мають вигляд [20]:

$$-\frac{1}{A_{21}} \frac{dT_{211}}{d\xi_1} - k_{21} T_{213} = p_{21}, \quad -\frac{1}{A_{21}} \frac{dT_{213}}{d\xi_1} + k_{21} T_{211} = p_{23}, \quad \xi_{1b} \leq \xi_1 \leq \xi_{1e}, \quad (5)$$

$$-\frac{1}{A_{21}} \frac{dM_{211}}{d\xi_1} + T_{213} = m_{21}, \quad \xi_{1b} \leq \xi_1 \leq \xi_{1e}, \quad (6)$$

$$T_{211} = \frac{E_2 h_2}{1 - \nu_2^2} \varepsilon_{211}, \quad T_{213} = k'_2 \mu_2 h_2 \varepsilon_{213}, \quad M_{211} = \frac{E_2 h_2^3}{12(1 - \nu_2^2)} \chi_{211}, \quad (7)$$

$$\varepsilon_{211} = \frac{1}{A_{21}} \frac{dv_{21}}{d\xi_1} + k_{21} w_2, \quad \varepsilon_{213} = \frac{1}{A_{21}} \frac{dw_2}{d\xi_1} + \gamma_{21} - k_{21} v_{21}, \quad \chi_{211} = \frac{1}{A_{21}} \frac{d\gamma_{21}}{d\xi_1}, \quad (8)$$

де  $h_2$  – товщина оболонки,  $A_{21} = A_{21}(\xi_1)$ ,  $k_{21} = k_{21}(\xi_1)$  – параметр Ляме і кривина серединної лінії оболонки,  $E_2 = \frac{\mu_2(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{\lambda_2 + \mu_2}$  – модуль Юнга,  $\nu_2 = \frac{\lambda_2}{2(\lambda_2 + \mu_2)}$  – коефіцієнт Пуассона,  $\lambda_2, \mu_2$  – параметри Ляме матеріалу оболонки, а  $k'_2 = \frac{5}{6}$  – коефіцієнт зсуву для оболонки.

Функції навантаження на оболонку за відсутності об'ємних сил мають вигляд

$$p_{21} = \left(1 + k_{21} \frac{h_2}{2}\right) \sigma_{213}^+ + \left(1 - k_{21} \frac{h_2}{2}\right) \sigma_{213}^-, \quad (9)$$

$$p_{23} = \left(1 + k_{21} \frac{h_2}{2}\right) \sigma_{233}^+ - \left(1 - k_{21} \frac{h_2}{2}\right) \sigma_{233}^-, \quad (10)$$

$$m_{21} = \frac{h_2}{2} \left( \left(1 + k_{21} \frac{h_2}{2}\right) \sigma_{213}^+ - \left(1 - k_{21} \frac{h_2}{2}\right) \sigma_{213}^- \right), \quad (11)$$

де  $\sigma_{2ij}^+, \sigma_{2ij}^-, i, j = 1, 3$ , – компоненти вектора поверхневих сил на зовнішній ( $\xi_3 = h_2/2$ ) і внутрішній ( $\xi_3 = -h_2/2$ ) поверхнях оболонки, а  $m_1$  – момент зовнішнього поверхневого навантаження.

На кожній межі  $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 3$ , масивних тіл уведемо локальний ортонормований базис  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ ,  $\mathbf{n}_\alpha$ , де  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$  – одинична дотична, а  $\mathbf{n}_\alpha$  – одинична зовнішня нормаль. Вектори переміщень і напружень на  $\Gamma_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 3$ , у цьому базисі запишемо так:

$$\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha\tau}\boldsymbol{\tau}_\alpha + u_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha\tau}\boldsymbol{\tau}_\alpha + \sigma_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha, \quad \alpha = 1, 3.$$

Припустимо, що межі масивних тіл  $\Omega_1$  і  $\Omega_3$  складаються з трьох частин, які не перетинаються:  $\Gamma_1 = \Gamma_1^u \cup \Gamma_1^\sigma \cup S_{12}$ ,  $\Gamma_3 = \Gamma_3^u \cup \Gamma_3^\sigma \cup S_{32}$ ,  $\Gamma_1^u, \Gamma_3^u \neq \emptyset$ ,  $S_{12}, S_{32} \neq \emptyset$ , а межа тонкого тіла  $\Omega_2$  – з чотирьох частин, що не перетинаються:  $\Gamma_2 = \Gamma_2^u \cup \Gamma_2^\sigma \cup S_{21} \cup S_{23}$ ,  $\Gamma_2^u, S_{21}, S_{23} \neq \emptyset$ .

На частинах  $\Gamma_\alpha^u$  меж  $\Gamma_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , кожного з тіл задаємо кінематичні крайові умови (переміщення), які для спрощення варіаційних формулювань вважаємо нульовими, а на частинах  $\Gamma_\alpha^\sigma$  – статичні крайові умови (навантаження). Для масивних тіл  $\Omega_1$  і  $\Omega_3$  ці умови мають такий вигляд:

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u, \quad \alpha = 1, 3, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^\sigma, \quad \alpha = 1, 3, \quad (13)$$

де  $\mathbf{p}_\alpha = p_{\alpha\tau}\boldsymbol{\tau}_\alpha + p_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha$  – задані граничні зусилля. Для тонкого покриття  $\Omega_2$  задаємо такі кінематичні і статичні крайові умови:

$$v_{21} = 0, \quad w_2 = 0, \quad \gamma_{21} = 0, \quad \xi_1 = \xi_{1e}, \quad (14)$$

$$T_{211} = \tilde{T}_{211}, \quad T_{213} = \tilde{T}_{213}, \quad M_{211} = \tilde{M}_{211}, \quad \xi_1 = \xi_{1b}, \quad (15)$$

де  $\tilde{T}_{211}$ ,  $\tilde{T}_{213}$  і  $\tilde{M}_{211}$  – зовнішні сили і момент, що діють на оболонку. Тут край  $\xi_1 = \xi_{1e}$  відповідає межі  $\Gamma_2^u$ , а  $\xi_1 = \xi_{1b}$  – межі  $\Gamma_2^\sigma$ . Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що  $\tilde{T}_{211} = \tilde{T}_{213} = \tilde{M}_{211} = 0$ .

Межа  $S_{12} \subset \Gamma_1$  – зона можливого контакту пружного тіла  $\Omega_1$  з тонким покриттям  $\Omega_2$ , а  $S_{21} \subset \Gamma_2$  – зона можливого контакту тонкого покриття  $\Omega_2$  з пружним тілом  $\Omega_1$ . Вважаємо, що межі  $S_{12}$  і  $S_{21}$  є достатньо близькі ( $S_{12} \approx S_{21}$ ), тому приймаємо, що їхні зовнішні нормалі відрізняються лише знаком:  $\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) \approx -\mathbf{n}_2(\mathbf{x}')$ , де  $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{21}$  – проекція точки  $\mathbf{x} \in S_{12}$  на межу  $S_{21}$ . Відстань по нормалі між тілами  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$  до деформації позначимо через  $d_n(\mathbf{x}) = \pm \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - x'_i)^2}$ , де знак « $\pm$ » залежить від постановки конкретної задачі.

На межах  $S_{12}$  і  $S_{21}$  задаємо умови одностороннього контакту без тертя:

$$\sigma_{1\tau}(\mathbf{x}) = \sigma_{213}^+(\mathbf{x}') = 0, \quad (16)$$

$$\sigma_{1n}(\mathbf{x}) = -\sigma_{233}^+(\mathbf{x}') \leq 0, \quad (17)$$

$$u_{1n}(\mathbf{x}) + w_2(\mathbf{x}') \leq d_n(\mathbf{x}), \quad (18)$$

$$[u_{1n}(\mathbf{x}) + w_2(\mathbf{x}') - d_n(\mathbf{x})]\sigma_{1n}(\mathbf{x}) = 0, \quad (19)$$

де  $\mathbf{x} \in S_{12}$ ,  $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{21}$ .

Тонке покриття  $\Omega_2$  з'єднане з основним тілом  $\Omega_3$  уздовж межі  $S_{23} = S_{32}$  через нелінійний вінклерівський прошарок. На спільній межі покриття  $\Omega_2$  і тіла  $\Omega_3$  виконуються такі умови:

$$-\sigma_{213}^-(\mathbf{x}) = \sigma_{3\tau}(\mathbf{x}) = g_\tau(v_{21}(\mathbf{x}) - \frac{h_2}{2}\gamma_{21}(\mathbf{x}) - u_{3\tau}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in S_{23}, \quad (20)$$

$$-\sigma_{233}^-(\mathbf{x}) = \sigma_{3n}(\mathbf{x}) = g_n(-w_2(\mathbf{x}) - u_{3n}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in S_{23}, \quad (21)$$

де  $g_\tau(z)$  і  $g_n(z)$  – нелінійні функції, які описують зв'язок між стрибками  $w_{23\tau} = v_{21} - \frac{h_2}{2}\gamma_{21} - u_{3\tau}$ ,  $w_{23n} = -w_2 - u_{3n}$  дотичних і нормальних переміщень і відповідними контактними напруженнями.

Надалі вважатимемо, що функції  $g_m(z)$ ,  $m = \tau, n$ , є неперервними і мають такі властивості:

$$(\forall m = \tau, n) \{g_m(0) = 0\}, (\forall m = \tau, n) (\forall y, z) \{y < z \Rightarrow g_m(y) < g_m(z)\}, \quad (22)$$

$$(\forall m = \tau, n) (\exists \tilde{M}_m > 0) (\forall y, z) \{|g_m(y) - g_m(z)| \leq \tilde{M}_m |y - z|\}. \quad (23)$$

Зазначимо, що контактна задача (1)–(3), (5)–(21) є нелінійною, оскільки нелінійними є крайові умови (19), (20) і (21).

**2. Варіаційні формулювання.** Здійснимо варіаційні формулювання розглянутої контактної задачі (1)–(3), (5)–(21) у формі нелінійної варіаційної нерівності, застосовуючи результати праць [13, 14, 16, 35, 37, 41], а також у формі нелінійного варіаційного рівняння.

Для масивних тіл  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 3$ , введемо простори Соболева  $V_\alpha = [H^1(\Omega_\alpha)]^2$ ,  $\alpha = 1, 3$ , елементами яких є узагальнені вектори переміщень  $\mathbf{u}_\alpha = (u_{\alpha 1}, u_{\alpha 2})^\top$ ,  $\alpha = 1, 3$ , а для тонкого покриття  $\Omega_2$  – простір Соболева  $V_2 = [H^1(\Omega_2^*)]^3$  з елементами  $\mathbf{u}_2 = (v_{21}, w_2, \gamma_{21})^\top$ , де  $v_{21}$ ,  $w_2$  і  $\gamma_{21}$  – узагальнені переміщення і кут повороту оболонки, а  $\Omega_2^*$  – серединна лінія області  $\Omega_2$ , тобто її проекція на криву  $\xi_3 = 0$ . Розглянемо замкнуті підпростори  $V_\alpha^0 = \{\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{u}_\alpha = 0 \text{ на } \Gamma_\alpha^u\}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , цих просторів. У просторах  $V_1^0$  і  $V_3^0$  скалярний добуток означимо так:

$$(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha^*)_{V_\alpha^0} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_\alpha} \left( u_{\alpha i} u_{\alpha i}^* + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j} \frac{\partial u_{\alpha i}^*}{\partial x_j} \right) d\Omega, \quad \alpha = 1, 3, \text{ де } \mathbf{u}_\alpha = (u_{\alpha 1}, u_{\alpha 2})^\top, \mathbf{u}_\alpha^* = (u_{\alpha 1}^*, u_{\alpha 2}^*)^\top \in V_\alpha^0,$$

$$\alpha = 1, 3, \text{ а у просторі } V_2^0 \text{ – таким чином: } (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2^*)_{V_2^0} = \int_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}} \left( v_{21} v_{21}^* + w_2 w_2^* + \gamma_{21} \gamma_{21}^* \right) d\xi_1 + \\ + \int_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}} \left( \frac{dv_{21}}{d\xi_1} \frac{dv_{21}^*}{d\xi_1} + \frac{dw_2}{d\xi_1} \frac{dw_2^*}{d\xi_1} + \frac{d\gamma_{21}}{d\xi_1} \frac{d\gamma_{21}^*}{d\xi_1} \right) d\xi_1, \text{ де } \mathbf{u}_2 = (v_{21}, w_2, \gamma_{21})^\top, \mathbf{u}_2^* = (v_{21}^*, w_2^*, \gamma_{21}^*)^\top \in V_2^0.$$

Введемо у цих просторах норми  $\|\mathbf{u}_\alpha\|_{V_\alpha^0} = \sqrt{(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)_{V_\alpha^0}}$ ,  $\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ .

Значення елементів просторів  $V_\alpha$  і  $V_\alpha^0$  на частинах межі області  $\Omega_\alpha$  будемо розуміти у сенсі слідів [15] і для простоти позначатимемо їх тими ж символами.

Розглянемо рефлексивний банаховий простір  $V_0 = V_1^0 \times V_2^0 \times V_3^0 = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)^\top : \mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0, \alpha = 1, 2, 3\}$ , який є прямим добутком просторів  $V_\alpha^0$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . У просторі  $V_0$  означимо скалярний добуток  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)_{V_0} = \sum_{\alpha=1}^3 (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha^*)_{V_\alpha^0}$  і норму  $\|\mathbf{u}\|_{V_0} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_0}}$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{u}^* \in V_0$ . Тоді цей простір стає гільбертовим. Крім цього, введемо у  $V_0$  опуклу замкнуту множину кінематично допустимих переміщень:

$$K = \{\mathbf{u} \in V_0 : u_{1n} + w_2 \leq d_n \text{ на } S_{12}\},$$

де  $u_{1n} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \in H_{00}^{1/2}(\Xi_1)$ ,  $w_2 \in H_{00}^{1/2}(\Xi_2)$ ,  $\Xi_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $d_n \in H_{00}^{1/2}(\Xi_1)$ .

У просторі  $V_0$  означимо білінійну форму  $A(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$  таку, що  $A(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  відповідає сумарній енергії пружної деформації усіх тіл:

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) &= \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha}(\mathbf{u}_{\alpha}, \mathbf{u}_{\alpha}^*), \quad \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \in V_0, \\
a_{\alpha}(\mathbf{u}_{\alpha}, \mathbf{u}_{\alpha}^*) &= \int_{\Omega_{\alpha}} \left( \lambda_{\alpha} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_{a_{ii}}(\mathbf{u}_{\alpha}) \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{a_{jj}}(\mathbf{u}_{\alpha}^*) + 2\mu_{\alpha} \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{a_{ij}}(\mathbf{u}_{\alpha}) \varepsilon_{a_{ij}}(\mathbf{u}_{\alpha}^*) \right) d\Omega, \quad \alpha=1,3, \\
a_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2^*) &= \left( T_{211}, \frac{dv_{21}^*}{d\xi_1} \right)_{L_2(\Omega_2^*)} + (A_{21} k_{21} T_{213}, v_{21}^*)_{L_2(\Omega_2^*)} + \left( T_{213}, \frac{dw_2^*}{d\xi_1} \right)_{L_2(\Omega_2^*)} + \\
&\quad + (A_{21} k_{21} T_{211}, w_2^*)_{L_2(\Omega_2^*)} + \left( M_{211}, \frac{d\gamma_{21}^*}{d\xi_1} \right)_{L_2(\Omega_2^*)} + (A_{21} T_{213}, \gamma_{21}^*)_{L_2(\Omega_2^*)},
\end{aligned}$$

де  $a_{\alpha}(\mathbf{u}_{\alpha}, \mathbf{u}_{\alpha}^*)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , – білінійні форми такі, що  $a_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)$  і  $a_3(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3)$  відповідають енергії пружної деформації масивних тіл  $\Omega_1$  і  $\Omega_3$ , а  $a_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)$  – енергії пружної деформації тонкого покриття  $\Omega_2$ ,  $(u, u^*)_{L_2(\Omega_2^*)} = \int_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}} uu^* d\xi_1$ . Також

введемо у  $V_0$  лінійну форму  $L(\mathbf{u})$ , що відповідає роботі заданих зовнішніх сил:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{u}) &= \sum_{\alpha=1}^3 \ell_{\alpha}(\mathbf{u}_{\alpha}), \quad \mathbf{u} \in V_0, \quad \ell_{\alpha}(\mathbf{u}_{\alpha}) = \int_{\Omega_{\alpha}} \mathbf{f}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}_{\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma_{\alpha}^{\sigma}} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}_{\alpha} dS, \quad \alpha = 1, 3, \\
\ell_2(\mathbf{u}_2) &= (A_{21} p_{21}, v_{21})_{L_2(\Omega_2^*)} + (A_{21} p_{23}, w_2)_{L_2(\Omega_2^*)} + (A_{21} m_{21}, \gamma_{21})_{L_2(\Omega_2^*)},
\end{aligned}$$

де  $\ell_1(\mathbf{u}_1)$  і  $\ell_3(\mathbf{u}_3)$  – лінійні форми, що відповідають роботі усіх зовнішніх сил, прикладених до масивних тіл  $\Omega_1$  і  $\Omega_3$  відповідно, а  $\ell_2(\mathbf{u}_2)$  – лінійна форма, що відповідає роботі зовнішніх сил, що діють на тонке покриття  $\Omega_2$ ,  $\mathbf{f}_{\alpha} \in [L_2(\Omega_{\alpha})]^2$ ,  $\mathbf{p}_{\alpha} \in [L_2(\Gamma_{\alpha}^{\sigma})]^2$ ,  $\alpha = 1, 3$ . Введемо також неквадратичний функціонал  $H(\mathbf{u})$ , що відповідає енергії деформації нелінійного вінклерівського шару:

$$H(\mathbf{u}) = \int_{S_{23}} \left[ \int_0^{v_{21} - \gamma_{21} h_2 / 2 - u_{3\tau}} g_{\tau}(z) dz + \int_0^{-w_2 - u_{3n}} g_n(z) dz \right] dS, \quad \mathbf{u} \in V_0.$$

**Лема 1.** Нехай межі  $\Gamma_{\alpha} = \partial\Omega_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , тіл є ліпшицевими,  $\Gamma_{\alpha}^u \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{f}_{\alpha} \in [L_2(\Omega_{\alpha})]^2$ ,  $\mathbf{p}_{\alpha} \in [L_2(\Gamma_{\alpha}^{\sigma})]^2$ ,  $\lambda_{\alpha}, \mu_{\alpha} \in L_{\infty}(\Omega_{\alpha})$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , величини  $h_2, A_{21}, k_{21} \in L_{\infty}(\Omega_2^*)$  є обмеженими, і виконується умова (4). Тоді білінійна форма  $A(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$  є симетричною, коерцитивною з константою  $B_A > 0$  і неперервною з константою  $M_A > 0$  у просторі  $V_0$ , а лінійна форма  $L(\mathbf{u})$  – неперервною у  $V_0$ .

Коерцитивність і неперервність білінійної форми  $A(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$  впливають відповідно з коерцитивності і неперервності білінійних форм  $a_{\alpha}(\mathbf{u}_{\alpha}, \mathbf{u}_{\alpha}^*)$  у просторах  $V_{\alpha}^0$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , а неперервність лінійної форми  $L(\mathbf{u})$  – з неперервності лінійних форм  $\ell_{\alpha}(\mathbf{u}_{\alpha})$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Коерцитивність білінійних форм  $a_{\alpha}(\mathbf{u}_{\alpha}, \mathbf{u}_{\alpha}^*)$ ,  $\alpha = 1, 3$ , для масивних тіл є наслідком нерівності Корна [9, с. 114], а їх неперервність доводиться за допомогою нерівності Шварца та обмеженості пружних сталей. Неперервність лінійних форм  $\ell_{\alpha}(\mathbf{u}_{\alpha})$ ,  $\alpha = 1, 3$ , для масивних тіл впливає з теорем про сліди [9, с. 110]. Неперервність і коерцитивність білінійної форми  $a_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2^*)$  і неперервність лінійної форми  $\ell_2(\mathbf{u}_2)$  для тонкого покриття, яке описується рівняннями теорії оболонки Тимошенка, доведено у роботах [5, 6, 31, 36].

Розглянемо властивості функціонала  $H(\mathbf{u})$ . Цей функціонал є диференційовним за Гато:

$$H'(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = - \int_{S_{23}} g_\tau \left( v_{21} - \frac{h_2}{2} \gamma_{21} - u_{3\tau} \right) \left( -v_{21}^* + \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^* + u_{3\tau}^* \right) dS - \\ - \int_{S_{23}} g_n (-w_2 - u_{3n}) (w_2^* + u_{3n}^*) dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \in V_0.$$

Диференціал Гато  $H'(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$  є лінійним за  $\mathbf{u}^*$ , однак нелінійним за  $\mathbf{u}$ . Крім цього, сформулюємо таку лему (наводимо її без доведення).

**Лема 2.** Нехай межа  $S_{23}$  є ліпшицевою і виконуються умови (22), (23).

Тоді функціонал  $H'(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$  має такі властивості:

$$(\forall \mathbf{u} \in V_0) \quad (\exists R_H > 0) \quad (\forall \mathbf{u}^* \in V_0) \quad \{|H'(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)| \leq R_H \|\mathbf{u}^*\|_{V_0}\}, \quad (24)$$

$$(\exists D_H > 0) (\forall \mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{**} \in V_0) \{|H'(\mathbf{u} + \mathbf{u}^{**}, \mathbf{u}^*) - H'(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)| \leq D_H \|\mathbf{u}^*\|_{V_0} \|\mathbf{u}^{**}\|_{V_0}\}, \quad (25)$$

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \in V_0) \quad \{H'(\mathbf{u} + \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) - H'(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) \geq 0\}. \quad (26)$$

Сформулюємо такі твердження (доведення яких тут не наводимо).

**Теорема 1.** Вихідна контактна задача (1)–(3), (5)–(21) у слабкому розумінні еквівалентна задачі мінімізації неквадратичного функціонала на опуклій замкнутій множині  $K \subsetneq V_0$ :

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + H(\mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in K}. \quad (27)$$

**Теорема 2.** Нехай виконуються умови лем 1 і лем 2. Тоді задача (27) має єдиний розв'язок  $\bar{\mathbf{u}} \in K$  і її розв'язання еквівалентне розв'язанню на множині  $K$  такої нелінійної варіаційної нерівності:

$$F'(\mathbf{u}, \mathbf{u}^* - \mathbf{u}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{u}^* - \mathbf{u}) + H'(\mathbf{u}, \mathbf{u}^* - \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in K, \mathbf{u} \in K. \quad (28)$$

Задачу мінімізації (27) на опуклій замкнутій множині  $K$  зведемо до задачі безумовної мінімізації у вихідному просторі  $V_0$ , застосовуючи метод штрафу [15, 39]. За порушення умови непроникнення (18) уведемо штраф у такій формі:

$$J_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\theta} \int_{S_{12}} [(d_n - u_{1n} - w_2)^-]^2 dS \geq 0, \quad \mathbf{u} \in V_0,$$

де  $\theta > 0$  – параметр штрафу,  $y^- = \min\{0, y\}$ , і розглянемо задачу мінімізації функціонала зі штрафом у просторі  $V_0$ :

$$F_\theta(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + H(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in V_0}. \quad (29)$$

Штрафний доданок  $J_\theta(\mathbf{u})$  є невід'ємним і один раз диференційовним за Гато:

$$J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = -\frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} (d_n - u_{1n} - w_2)^- (u_{1n}^* + w_2^*) dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \in V_0.$$

Тут величина  $\sigma_{12n} = \sigma_{1n} = -\sigma_{233}^+ = \frac{1}{\theta} (d_n - u_{1n} - w_2)^-$  має сенс нормального контактного напруження. Диференціал Гато  $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$  є лінійним за  $\mathbf{u}^*$  і нелінійним за  $\mathbf{u}$ . Сформулюємо таке твердження про властивості функціонала  $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$  (доведення якого тут не наводимо).

**Лема 3.** Нехай межа  $S_{12}$  є ліпшицевою і  $d_n \in H_{00}^{1/2}(\Xi_1)$ . Тоді функціонал  $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$  має такі властивості:

$$(\forall \mathbf{u} \in V_0) \quad (\exists R_J > 0) \quad (\forall \mathbf{u}^* \in V_0) \quad \{|J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)| \leq R_J \|\mathbf{u}^*\|_{V_0}\}, \quad (30)$$

$$(\exists D_J > 0) (\forall \mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{**} \in V_0) \{|J'_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{u}^{**}, \mathbf{u}^*) - J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)| \leq D_J \|\mathbf{u}^*\|_{V_0} \|\mathbf{u}^{**}\|_{V_0}\}, \quad (31)$$

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \in V_0) \quad \{J'_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) - J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) \geq 0\}. \quad (32)$$

Доведення властивостей (24)–(26) і (30)–(32) дало змогу довести наступні дві теореми.

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови леми 1, леми 2 і леми 3. Тоді задача (29) має єдиний розв'язок  $\bar{\mathbf{u}}_0 \in V_0$  і її розв'язання еквівалентне розв'язанню в просторі  $V_0$  нелінійного за  $\mathbf{u}$  варіаційного рівняння*

$$F'_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = A(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) + H'(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) + J'_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) - L(\mathbf{u}^*) = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_0, \quad \mathbf{u} \in V_0. \quad (33)$$

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови леми 1, леми 2 і леми 3. Окрім цього, нехай  $\bar{\mathbf{u}}_0 \in V_0$  – розв'язок задачі (29) (варіаційного рівняння (33)) для  $\theta > 0$ , а  $\bar{\mathbf{u}} \in K$  – розв'язок задачі (27) (варіаційної нерівності (28)). Тоді  $\bar{\mathbf{u}}_0$  збігається сильно в просторі  $V_0$  до  $\bar{\mathbf{u}}$  при  $\theta \rightarrow 0$ , тобто  $\|\bar{\mathbf{u}}_0 - \bar{\mathbf{u}}\|_{V_0} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$ .*

Д о в е д е н н я теорем 3 і 4 здійснюються подібно до доведення відповідно теорем 2 і 3 у праці [35].

Таким чином, із застосуванням методу штрафу розв'язування нелінійної варіаційної нерівності (28) на опуклій множині  $K$  зведено до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (33) у гільбертовому просторі  $V_0$ , залежного від параметра штрафу  $\theta$ . Далі розглянемо такі ітераційні методи для розв'язування цього варіаційного рівняння, які здійснюють його декомпозицію за окремими областями (тілами).

**3. Методи декомпозиції області.** Застосуємо до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (33), яке відповідає вихідній контактній задачі (1)–(3), (5)–(21), такий неявний нестационарний ітераційний метод з параметрами:

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^*) = G^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^*) - \rho^k F'_0(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

де  $G^k : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ , – деякі білінійні форми, задані у просторі  $V_0$ ,  $\rho^k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , – ітераційні параметри,  $\mathbf{u}^k \in V_0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , –  $k$ -ті наближення до точного розв'язку рівняння (33), а  $\mathbf{u}^0 \in V_0$  – початкове наближення. У розгорнутому вигляді цей метод запишемо так:

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^*) = G^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^*) - \rho^k [A(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^*) + H'(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^*) + J'_0(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^*) - L(\mathbf{u}^*)] \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (34)$$

Однак у загальному випадку ітераційний метод (34), застосований до розв'язування варіаційного рівняння (33), не приводить до декомпозиції задачі за підобластями. Тому пропонуємо варіанти цього методу, які на кожному ітераційному кроці реалізують декомпозицію за підобластями, тобто такі, що зводять розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (33) у всій області  $\Omega$  до розв'язування послідовності лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ .

Декомпозиції можна досягнути певним вибором білінійних форм  $G^k$  в ітераційному процесі (34).

Надалі вважатимемо, що функції  $g_\tau(z)$  і  $g_n(z)$  є диференційовними. Тоді функціонал  $H$  буде двічі диференційовним за Гато. Виберемо білінійні форми  $G^k$  у методі (34) таким чином:

$$G^k(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \partial^2 F_0(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = A(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) + H''(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) + \partial^2 J_0(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \in V_0, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} H''(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) &= \int_{S_{23}} g'_\tau \left( v_{21}^k - \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^k - u_{3\tau}^k \right) \left[ -v_{21} + \frac{h_2}{2} \gamma_{21} + u_{3\tau} \right] \left[ -v_{21}^* + \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^* + u_{3\tau}^* \right] dS + \\ &\quad + \int_{S_{23}} g'_n (-w_2^k - u_{3n}^k) [w_2 + u_{3n}] [w_2^* + u_{3n}^*] dS, \\ \partial^2 J_0(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) &= \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} \chi_{12}^k [u_{1n} + w_2] [u_{1n}^* + w_2^*] dS, \end{aligned}$$



де  $\partial^2 F_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$  і  $\partial^2 J_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$  – другі субдиференціали функціоналів  $F_\theta$  і  $J_\theta$  у точці  $\mathbf{u}^k \in V_0$  за напрямками  $\mathbf{u} \in V_0$  і  $\mathbf{u}^* \in V_0$ , а  $\chi_{12}^k$  – функція вигляду

$$\chi_{12}^k = \chi_{12}(\mathbf{u}^k) = -[\text{sgn}(d_n - u_{1n}^k - w_2^k)]^- = \begin{cases} 0, & d_n - u_{1n}^k - w_2^k \geq 0, \\ 1, & d_n - u_{1n}^k - w_2^k < 0. \end{cases}$$

Ітераційний метод (34) з білінійними формами (35) при  $\rho^k = 1$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , відповідає неявному напігладкому методу Ньютону для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (33). Проте нестаціонарним ітераційним методом (34), (35) не отримуємо декомпозиції задачі за підобластями.

Тепер білінійні форми  $G^k$  у методі (34) виберемо так:

$$G^k(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = A(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) + X^k(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u}, \mathbf{u}^* \in V_0, \quad (36)$$

де  $X^k : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$  – такі білінійні форми:

$$\begin{aligned} X^k(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = & \int_{S_{23}} \psi_{23}^k g'_\tau(v_{21}^k - \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^k - u_{3\tau}^k) \left[ \left( -v_{21} + \frac{h_2}{2} \gamma_{21} \right) \left( -v_{21}^* + \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^* \right) + u_{3\tau} u_{3\tau}^* \right] dS + \\ & + \int_{S_{23}} \psi_{23}^k g'_n(-w_2^k - u_{3n}^k) [w_2 w_2^* + u_{3n} u_{3n}^*] dS + \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} \psi_{12}^k [u_{1n} u_{1n}^* + w_2 w_2^*] dS. \end{aligned} \quad (37)$$

Тут  $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \{0, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \setminus S_{\alpha\beta}^k\} \vee \{1, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}^k\}$  – характеристичні функції, які визначають деякі задані підмножини  $S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$  меж  $S_{\alpha\beta}$ ,  $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}, \{2, 3\}$ . Зокрема, ці функції можна задати, як у напігладкому методі Ньютону, тобто у вигляді

$$\psi_{12}^k = \chi_{12}^k = \chi_{12}(\mathbf{u}^k) = -[\text{sgn}(d_n - u_{1n}^k - w_2^k)]^-, \quad \psi_{23}^k \equiv 1. \quad (38)$$

Покажемо, що внаслідок такого вибору форм  $G^k$  отримуємо декомпозицію задачі за підобластями. Увівши позначення  $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = [\mathbf{u}^{k+1} - (1 - \rho^k) \mathbf{u}^k] / \rho^k$ , перепишемо метод (34) з білінійними формами (36) у такому еквівалентному вигляді:

$$A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{u}^*) + X^k(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{u}^*) = L(\mathbf{u}^*) + X^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^*) - H'(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^*) - J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_0, \quad (39)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \rho^k \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1 - \rho^k) \mathbf{u}^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (40)$$

Оскільки величини, які є спільними для підобластей, відомі з попередньої ітерації, то варіаційне рівняння (39) розпадається на три незалежні варіаційні рівняння у підобластях (тілах)  $\Omega_\alpha$ , і метод (39), (40) еквівалентний такому ітераційному методу:

$$\begin{aligned} a_1(\tilde{\mathbf{u}}_1^{k+1}, \mathbf{u}_1^*) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} \psi_{12}^k \tilde{u}_{1n}^{k+1} u_{1n}^* dS = & \ell_1(\mathbf{u}_1^*) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} \psi_{12}^k u_{1n}^k u_{1n}^* dS + \\ & + \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} (d_n - u_{1n}^k - w_2^k)^- u_{1n}^* dS \quad \forall \mathbf{u}_1^* \in V_1^0, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} a_2(\tilde{\mathbf{u}}_2^{k+1}, \mathbf{u}_2^*) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{21}} \psi_{12}^k \tilde{w}_2^{k+1} w_2^* dS + \int_{S_{23}} \psi_{23}^k g'_\tau \left( v_{21}^k - \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^k - u_{3\tau}^k \right) \times \\ \times \left( -\tilde{v}_{21}^{k+1} + \frac{h_2}{2} \tilde{\gamma}_{21}^{k+1} \right) \left( -v_{21}^* + \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^* \right) dS + \\ + \int_{S_{23}} \psi_{23}^k g'_n(-w_2^k - u_{3n}^k) \tilde{w}_2^{k+1} w_2^* dS = & \ell_2(\mathbf{u}_2^*) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{21}} \psi_{12}^k w_2^k w_2^* dS + \\ & + \int_{S_{23}} \psi_{23}^k g'_\tau \left( v_{21}^k - \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^k - u_{3\tau}^k \right) \left( -v_{21}^k + \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^k \right) \left( -v_{21}^* + \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^* \right) dS + \\ & + \int_{S_{23}} \psi_{23}^k g'_n(-w_2^k - u_{3n}^k) w_2^k w_2^* dS + \frac{1}{\theta} \int_{S_{21}} (d_n - u_{1n}^k - w_2^k)^- w_2^* dS + \\ & + \int_{S_{23}} g'_\tau \left( v_{21}^k - \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^k - u_{3\tau}^k \right) \left( -v_{21}^* + \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^* \right) dS + \int_{S_{23}} g_n(-w_2^k - u_{3n}^k) w_2^* dS \quad \forall \mathbf{u}_2^* \in V_2^0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
& a_3(\tilde{\mathbf{u}}_3^{k+1}, \mathbf{u}_3^*) + \int_{S_{32}} \Psi_{23}^k g'_\tau \left( v_{21}^k - \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^k - u_{3\tau}^k \right) \tilde{u}_{3\tau}^{k+1} u_{3\tau}^* dS + \\
& + \int_{S_{32}} \Psi_{23}^k g'_n (-w_2^k - u_{3n}^k) \tilde{u}_{3n}^{k+1} u_{3n}^* dS = \ell_3(\mathbf{u}_3^*) + \int_{S_{32}} \Psi_{23}^k \times \\
& \times g'_\tau \left( v_{21}^k - \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^k - u_{3\tau}^k \right) u_{3\tau}^k u_{3\tau}^* dS + \int_{S_{32}} \Psi_{23}^k g'_n (-w_2^k - u_{3n}^k) u_{3n}^k u_{3n}^* dS + \\
& + \int_{S_{32}} g_\tau \left( v_{21}^k - \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^k - u_{3\tau}^k \right) u_{3\tau}^* dS + \int_{S_{32}} g_n (-w_2^k - u_{3n}^k) u_{3n}^* dS \quad \forall \mathbf{u}_3^* \in V_3^0, \quad (43)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \rho^k \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1 - \rho^k) \mathbf{u}_\alpha^k, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad k = 0, 1, \dots \quad (44)$$

На кожній ітерації  $k$  методу (41)–(44) необхідно паралельно розв'язувати три незалежні лінійні варіаційні рівняння (41), (42), (43) в окремих тілах  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , два з яких ((41) і (43)) відповідають лінійним задачам теорії пружності для масивних тіл  $\Omega_1$  і  $\Omega_3$  з крайовими умовами Робіна (Пуанкаре) на межі можливого одностороннього контакту  $S_{12}$  (для тіла  $\Omega_1$ ) і на межі  $S_{32}$  (для тіла  $\Omega_3$ ):

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{12n}^{k+1} + \frac{1}{\theta} \Psi_{12}^k \tilde{u}_{1n}^{k+1} &= \frac{1}{\theta} (d_n - u_{1n}^k - w_2^k)^- + \frac{1}{\theta} \Psi_{12}^k u_{1n}^k, \quad \mathbf{x} \in S_{12}, \\
\tilde{\sigma}_{32\tau}^{k+1} + \Phi_{23\tau}^k \tilde{u}_{3\tau}^{k+1} &= g_\tau \left( v_{21}^k - \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^k - u_{3\tau}^k \right) + \Phi_{23\tau}^k u_{3\tau}^k, \quad \mathbf{x} \in S_{32}, \\
\tilde{\sigma}_{32n}^{k+1} + \Phi_{23n}^k \tilde{u}_{3n}^{k+1} &= g_n (-w_2^k - u_{3n}^k) + \Phi_{23n}^k u_{3n}^k, \quad \mathbf{x} \in S_{32},
\end{aligned}$$

а одне (варіаційне рівняння (42)) – лінійній задачі теорії оболонок Тимошенка для тонкого тіла  $\Omega_2$  з умовами Робіна на межі можливого контакту  $S_{21}$  і межі  $S_{23}$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{21n}^{k+1} + \frac{1}{\theta} \Psi_{12}^k \tilde{w}_2^{k+1} &= \frac{1}{\theta} (d_n - u_{1n}^k - w_2^k)^- + \frac{1}{\theta} \Psi_{12}^k w_2^k, \quad \mathbf{x} \in S_{21}, \\
\tilde{\sigma}_{23\tau}^{k+1} + \Phi_{23\tau}^k \left( -\tilde{v}_{21}^{k+1} + \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^{k+1} \right) &= g_\tau \left( v_{21}^k - \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^k - u_{3\tau}^k \right) + \Phi_{23\tau}^k \left( -v_{21}^k + \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^k \right), \quad \mathbf{x} \in S_{23}, \\
\tilde{\sigma}_{23n}^{k+1} + \Phi_{23n}^k \tilde{w}_2^{k+1} &= g_n (-w_2^k - u_{3n}^k) + \Phi_{23n}^k w_2^k, \quad \mathbf{x} \in S_{23},
\end{aligned}$$

де  $\Phi_{23\tau}^k = \Psi_{23}^k g'_\tau \left( v_{21}^k - \frac{h_2}{2} \gamma_{21}^k - u_{3\tau}^k \right)$ ,  $\Phi_{23n}^k = \Psi_{23}^k g'_n (-w_2^k - u_{3n}^k)$ , а  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta\tau}^{k+1}$  і  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta n}^{k+1}$  – невідомі дотичні і нормальні напруження на межах  $S_{\alpha\beta}$ ,  $\tilde{\sigma}_{12n}^{k+1} = \tilde{\sigma}_{1n}^{k+1}$ ,  $\tilde{\sigma}_{32\tau}^{k+1} = \tilde{\sigma}_{3\tau}^{k+1}$ ,  $\tilde{\sigma}_{32n}^{k+1} = \tilde{\sigma}_{3n}^{k+1}$ ,  $\tilde{\sigma}_{21n}^{k+1} = -\tilde{\sigma}_{233}^{+,k+1}$ ,  $\tilde{\sigma}_{23\tau}^{k+1} = -\tilde{\sigma}_{213}^{-,k+1}$ ,  $\tilde{\sigma}_{23n}^{k+1} = -\tilde{\sigma}_{233}^{-,k+1}$ . Тому ітераційний метод (41)–(44) належить до **паралельних схем Робіна (Пуанкаре) декомпозиції області** [16, 24–27, 29, 35, 43, 44].

Сформулюємо (без доведення) таке твердження про збіжність цього ітераційного методу.

**Теорема 5.** *Нехай виконуються умови лемми 1, лемми 2 і лемми 3. Тоді кожна із задач (41)–(43) має єдиний розв'язок  $\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} \in V_\alpha^0$  для будь-якого  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Якщо, крім цього, ітераційні параметри задовольняють умову  $\rho^k \in (0, 2B_A / (M_A + D_H + D_J)) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ , то послідовність  $\{\mathbf{u}^k\} = \{(\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^k, \mathbf{u}_3^k)^\top\} \subset V_0$ , побудована методом (41)–(44), за будь-якого початкового наближення  $\mathbf{u}^0 \in V_0$  при  $k \rightarrow \infty$  збігається слабо у просторі  $V_0$  до точного розв'язку  $\bar{\mathbf{u}}_\theta \in V_0$  нелінійного варіаційного рівняння (33) контактної задачі (1)–(3), (5)–(21), тобто  $(\forall f \in V_0^*) \{ \langle f, \mathbf{u}^k \rangle \}_{k \rightarrow \infty} \rightarrow \langle f, \bar{\mathbf{u}}_\theta \rangle$ , де  $V_0^*$  – простір, спряжений до  $V_0$ .*

Вибираючи різні характеристичні функції  $\Psi_{\alpha\beta}^k = \Psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$ ,  $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}, \{2, 3\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , у білінійній формі (37), тобто різні підмножини  $S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$ , можемо

отримати різні варіанти методу (41)–(44) декомпозиції області. Так, покладаючи  $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 0$ , тобто  $S_{\alpha\beta}^k = \emptyset \quad \forall \alpha, \beta, \forall k$ , отримаємо **паралельну схему Неймана**, на кожному кроці якої необхідно паралельно розв'язувати варіаційні рівняння, що відповідають задачам з умовами Неймана на зонах  $S_{\alpha\beta}$ . Інший граничний випадок відповідає вибору  $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 1$ , тобто  $S_{\alpha\beta}^k = S_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha, \beta, \forall k$ . Таку схему декомпозиції області назвемо **повною паралельною схемою Робіна**. Однак проведені числові експерименти показали, що найефективніше ці функції вибирати у вигляді (38). Тоді алгоритм декомпозиції області (41)–(44) можна вважати модифікацією напівгладкого методу Ньютона. Такий вибір функцій  $\psi_{\alpha\beta}^k$  забезпечить вищу швидкість збіжності порівняно з іншими варіантами.

Отже, для розв'язування нелінійної контактної задачі (1)–(3), (5)–(21) для системи масивних і тонкого тіл запропоновано клас паралельних ітераційних методів декомпозиції області типу Робіна, які зводять її розв'язування до розв'язування на кожній ітерації незалежних лінійних задач в окремих тілах, а саме: задач лінійної теорії пружності для масивних тіл і задачі теорії оболонок Тимошенка для тонкого тіла з крайовими умовами Робіна на межах контакту. Задачі в окремих тілах можна розв'язувати різними числовими методами, зокрема методом скінченних елементів (МСЕ) або методом граничних елементів (МГЕ).

**4. Числові дослідження.** Розроблено програмне забезпечення, яке реалізує отримані алгоритми декомпозиції області (41)–(44) з використанням МСЕ для розв'язування задач в окремих тілах.

Числову апробацію запропонованих МДО здійснено для плоскої задачі про односторонній контакт масивного пружного тіла  $\Omega_1$ , яке має неглибоку крайову виїмку, та композитного тіла  $\Omega_2 \cup \Omega_3$ , яке складається з тонкого пружного покриття – тіла  $\Omega_2$  і масивної пружної основи – тіла  $\Omega_3$ , що з'єднані між собою через тонкий нелінійний вінклерівський прошарок (рис. 2).

На верхню межу тіла  $\Omega_1$  і нижню межу тіла  $\Omega_3$  діє стискальне нормальне зусилля сталої інтенсивності  $q$ . На правій межі кожного з тіл задано умови симетрії, а ліва межа усіх тіл – вільна від навантажень. Масивні тіла  $\Omega_1$  і  $\Omega_3$  мають однакову висоту  $h_1 = h_3 = h$ , а висота тонкого покриття  $\Omega_2$  рівна  $h_2$  ( $h_2 \ll h$ ). Довжина всіх тіл дорівнює  $\ell$ . Висота виїмки описується функцією  $r(x_1) = r_0[1 - (x_1 - \ell)^2/b^2]^{3/2}$ , де  $x_1 \in [\ell - b, \ell]$ ,  $r_0 = r(\ell)$  – максимальна висота виїмки, а  $b$  – довжина виїмки. Модулі Юнга матеріалів масивних тіл  $\Omega_1$  і  $\Omega_3$  однакові й дорівнюють

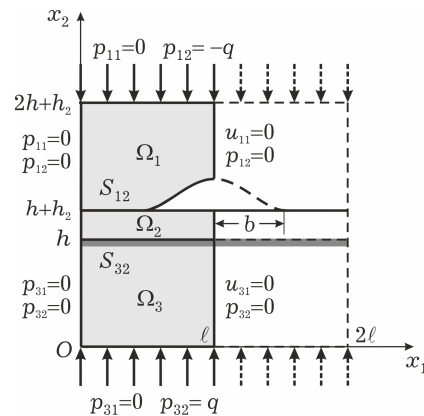


Рис. 2

$E_1 = E_3 = E$ , а модуль Юнга матеріалу тонкого покриття  $\Omega_2$  дорівнює  $E_2$ . Коефіцієнти Пуассона матеріалів усіх тіл однакові:  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$ . Зона можливого контакту між тілом  $\Omega_1$  і покриттям  $\Omega_2$  тіла  $\Omega_3$  рівна  $S_{12} = \{\mathbf{x} : x_1 \in [0, \ell], x_2 = h + h_2\}$ , а міжфазна поверхня між покриттям  $\Omega_2$  і основою  $\Omega_3$  дорівнює  $S_{23} = \{\mathbf{x} : x_1 \in [0, \ell], x_2 = h\}$ . Відстань між тілами  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  до деформації дорівнює  $d_n(\mathbf{x}) = \text{sgn}[(x_1 - \ell + b)^+]r(x_1) = r_0\{[1 - (x_1 - \ell)^2/b^2]^+\}^{3/2}$ ,  $\mathbf{x} \in S_{12}$ , де  $z^+ = \max\{0, z\}$ .

Функції  $g_n$  і  $g_\tau$ , які описують зв'язок між напруженнями і стрибками переміщень нелінійного вінклерівського шару, виберемо у вигляді

$$g_n(w_{23n}(\mathbf{x})) = \text{sgn}(w_{23n}(\mathbf{x}))|w_{23n}(\mathbf{x})|^{1/a} / B_n^{1/a}, \quad \mathbf{x} \in S_{23},$$

$$g_\tau(w_{23\tau}(\mathbf{x})) = w_{23\tau}(\mathbf{x})/B_\tau, \quad \mathbf{x} \in S_{23}.$$

Дослідження сформульованої задачі проведемо для таких фізичних і геометричних параметрів: інтенсивність зовнішнього навантаження  $q = 10$  МПа, висота масивних тіл  $h = 8b$ , висота тонкого пружного покриття  $h_2 \in [b/64, b]$ , довжина масивних тіл і покриття  $\ell = 4b$ , модуль Юнга матеріалу масивних тіл  $E = 2.1 \cdot 10^5$  МПа, модуль Юнга матеріалу покриття  $E_2 \in [E/4, 4E]$ , коефіцієнт Пуассона матеріалів масивних тіл і покриття  $\nu = 0.3$ , довжина виїмки  $b = 1$  см, максимальна висота виїмки  $r_0 = r(\ell) = 5 \cdot 10^{-4}$  см, параметри нелінійного вінклерівського прошарку  $B_n = 5 \cdot 10^{-5}$  см/(МПа) $^a$ ,  $a = 0.5$ ,  $B_\tau = 5 \cdot 10^{-5}$  см/МПа.

Цю задачу розв'язували паралельним методом декомпозиції області (41)–(44). Для числового розв'язування на кожній ітерації варіаційних рівнянь (41) і (43), що відповідають задачам теорії пружності для масивних тіл  $\Omega_1$  і  $\Omega_3$  використовували метод скінченних елементів з лінійними трикутними елементами, а для розв'язування варіаційного рівняння (42), що відповідає задачі теорії оболонок Тимошенка для тонкого тіла  $\Omega_2$  – одновимірний МСЕ з бульбашковими базисними функціями 4-го порядку. Для кожного з тіл  $\Omega_1$  і  $\Omega_3$  застосовували рівномірне скінченноелементне розбиття на 8192 лінійні трикутні елементи. При такому розбитті на кожній із меж  $S_{12}$  і  $S_{32}$  лежать однією із сторін 32 трикутних елементи, тобто на кожній межі містяться 33 скінченноелементні вузли. Для тонкого покриття  $\Omega_2$  використовували одновимірне розбиття на 32 скінченних елементи, вузли якого співпадають з вузлами двовимірних розбиттів масивних тіл  $\Omega_1$  і  $\Omega_3$ .

З метою перевірки і порівняння числових результатів сформульовану задачу також розв'язано методом декомпозиції області, подібним до МДО (41)–(44), запропонованим у праці [25] для математичної моделі контактної взаємодії об'ємних тіл з тонким покриттям, у якій для опису напружено-деформованого стану тонкого тіла  $\Omega_2$ , замість рівнянь теорії оболонок, застосовано класичні рівняння теорії пружності. Алгоритм цього методу відрізняється від алгоритму декомпозиції області (41)–(44) тим, що на кожному кроці  $k$ , замість варіаційного рівняння теорії оболонок (42), необхідно розв'язувати таке варіаційне рівняння:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2(\tilde{\mathbf{u}}_2^{k+1}, \mathbf{u}_2^*) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{21}} \Psi_{12}^k \tilde{u}_{2n}^{k+1} u_{2n}^* dS + \sum_{m=\tau, n} \int_{S_{23}} \Psi_{23}^k g'_m (-u_{2m}^k - u_{3m}^k) \tilde{u}_{2m}^{k+1} u_{2m}^* dS = \\ = \tilde{\ell}_2(\mathbf{u}_2^*) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{21}} \Psi_{12}^k u_{2n}^k u_{2n}^* dS + \sum_{m=\tau, n} \int_{S_{23}} \Psi_{23}^k g'_m (-u_{2m}^k - u_{3m}^k) u_{2m}^k u_{2m}^* dS + \\ + \frac{1}{\theta} \int_{S_{21}} (d_n - u_{1n}^k - u_{2n}^k) u_{2n}^* dS + \sum_{m=\tau, n} \int_{S_{23}} g_m (-u_{2m}^k - u_{3m}^k) u_{2m}^* dS \quad \forall \mathbf{u}_2^* \in \tilde{V}_2^0, \quad (42^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{де } \tilde{V}_2^0 = \{ \mathbf{u}_2 = (u_{21}, u_{22})^\top \in \tilde{V}_2 : \mathbf{u}_2 = 0 \text{ на } \Gamma_2^u \}, \quad \tilde{V}_2 = [H^1(\Omega_2)]^2, \quad \tilde{a}_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2^*) = \\ = \int_{\Omega_2} \left( \lambda_2 \sum_{i=1}^2 \varepsilon_{2ii}(\mathbf{u}_2) \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{2jj}(\mathbf{u}_2^*) + 2\mu_2 \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{2ij}(\mathbf{u}_2) \varepsilon_{2ij}(\mathbf{u}_2^*) \right) d\Omega, \quad \tilde{\ell}_2(\mathbf{u}_2) = \int_{\Omega_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{u}_2 d\Omega + \int_{\Gamma_2^c} \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_2 dS, \end{aligned}$$

що відповідає плоскій крайовій задачі теорії пружності для тіла  $\Omega_2$  з умовами Робіна на межах  $S_{21}$  і  $S_{23}$ . Надалі цей метод позначатимемо (41), (42\*), (43), (44).

Зауважимо, що у праці [25] наведено теорему про слабку збіжність методу (41), (42\*), (43), (44), яка є подібною до теореми 5 про збіжність методу (41)–(44). Згідно з цією теоремою, для того щоб метод (41), (42\*), (43), (44) був слабо збіжним, його ітераційні параметри  $\rho^k$  повинні задовольняти аналогічну умову, що й ітераційні параметри методу (41)–(44), однак при цьому стали  $B_A$ ,  $M_A$ ,  $D_H$  і  $D_J$  для обох методів є різними.

Для розв'язування на кожній ітерації усіх варіаційних рівнянь методу (41),

(42\*), (43), (44) використовували МСЕ з лінійними трикутними елементами. Для масивних тіл  $\Omega_1$  і  $\Omega_3$  у методі (41), (42\*), (43), (44) брали таке ж скінченноелементне розбиття, як і для цих тіл у методі (41)–(44). Для розв’язування задачі (42\*) у тонкому тілі  $\Omega_2$  за його висоти  $h_2 = b/8, b/4, b/2, b$  ( $b = 1$  см) застосовували відповідно розбиття на 256, 512, 1024, 2048 трикутних скінченних елементів. За таких розбиттів на межах  $S_{21}$  і  $S_{23}$  з кожного боку потрапляє по 32 елементи.

Початкові наближення для переміщень в алгоритмі (41)–(44) задавали так:  $u_{1n}^0(\mathbf{x}) \equiv 10^{-6}$  см,  $w_2^0(\mathbf{x}) \equiv 10^{-6}$  см,  $\mathbf{x} \in S_{12}$ ;  $u_{3\tau}^0(\mathbf{x}) = u_{3n}^0(\mathbf{x}) \equiv 10^{-6}$  см,  $w_2^0(\mathbf{x}) \equiv 10^{-6}$  см,  $v_{21}^0(\mathbf{x}) \equiv -10^{-6}$  см,  $\gamma_{21}^0(\mathbf{x}) \equiv 0$ ,  $\mathbf{x} \in S_{23}$ , а в МДО (41), (42\*), (43), (44) – у вигляді:  $u_{\alpha n}^0(\mathbf{x}) \equiv 10^{-6}$  см,  $\alpha = 1, 2$ ,  $\mathbf{x} \in S_{12}$ ;  $u_{\alpha\tau}^0(\mathbf{x}) = u_{\alpha n}^0(\mathbf{x}) \equiv 10^{-6}$  см,  $\alpha = 2, 3$ ,  $\mathbf{x} \in S_{23}$ . Для зупинки ітераційного процесу в обох алгоритмах застосовували критерій

$$\|v_{1n}^{k+1} - v_{1n}^k\|_2 / \|v_{1n}^{k+1}\|_2 \leq \varepsilon_u, \quad \|v_{\alpha m}^{k+1} - v_{\alpha m}^k\|_2 / \|v_{\alpha m}^{k+1}\|_2 \leq \varepsilon_u, \quad m = \tau, n, \quad \alpha = 2, 3,$$

де  $\|v_{\alpha m}\|_2 = \sqrt{\sum_j [v_{\alpha m}(\mathbf{x}^j)]^2}$  – дискретна норма,  $\mathbf{x}^j \in S_\alpha$  – вузли скінченноелементного розбиття межі  $S_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ,  $S_1 = S_{12}$ ,  $S_2 = S_{21} \cup S_{23}$ ,  $S_3 = S_{32}$ , а  $\varepsilon_u > 0$  – відносна точність для переміщень. Величини  $v_{\alpha m}(\mathbf{x}^j)$  означаються так:  $v_{1n}(\mathbf{x}^j) = u_{1n}(\mathbf{x}^j)$ ,  $\mathbf{x}^j \in S_1$ ,  $v_{3m}(\mathbf{x}^j) = u_{3m}(\mathbf{x}^j)$ ,  $m = \tau, n$ ,  $\mathbf{x}^j \in S_3$ ,  $v_{2\tau}(\mathbf{x}^j) = 0$ ,  $\mathbf{x}^j \in S_{21}$ , для алгоритму (41)–(44):  $v_{2n}(\mathbf{x}^j) = w_2(\mathbf{x}^j)$ ,  $\mathbf{x}^j \in S_2$ ,  $v_{2\tau}(\mathbf{x}^j) = -u_{21}(\mathbf{x}^j) + \frac{h_2}{2} \gamma_{21}(\mathbf{x}^j)$ ,  $\mathbf{x}^j \in S_{23}$ , а для алгоритму (41), (42\*), (43), (44):  $v_{2n}(\mathbf{x}^j) = u_{2n}(\mathbf{x}^j)$ ,  $\mathbf{x}^j \in S_2$ ,  $v_{2\tau}(\mathbf{x}^j) = u_{2\tau}(\mathbf{x}^j)$ ,  $\mathbf{x}^j \in S_{23}$ .

Параметр штрафу задавали за стрижневою моделлю у вигляді [35]

$$\theta = c \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{E_\alpha} h_\alpha (1 - \nu_\alpha^2),$$

де  $c$  – безрозмірний коефіцієнт штрафу, який вибирали рівним  $c = 0.01$ .

Ітераційні параметри  $\rho^k$  в обох методах задавали однаковими на кожній ітерації:  $\rho^k = \rho = 0.5$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , а характеристичні функції  $\psi_{12}^k$  і  $\psi_{23}^k$  вибирали у вигляді (38).

Досліджено вплив висоти  $h_2$  та жорсткості  $E_2$  тонкого покриття  $\Omega_2$  на швидкість збіжності обох алгоритмів декомпозиції області. У табл. 1 наведено загальну кількість ітерацій  $m^*$  методу декомпозиції області (41), (42\*), (43), (44), що отриманий без використання теорії оболонок Тимошенка, а в табл. 2 – загальну кількість ітерацій  $m$  методу декомпозиції області (41)–(44) із застосуванням теорії оболонок Тимошенка, які необхідні для досягнення відносної точності  $\varepsilon_u = 10^{-3}$  за різних значень висоти та жорсткості тонкого тіла.

З таблиць видно, що для всіх розглянутих випадків алгоритм МДО (41)–(44), у якому використовується теорія оболонок, збігається швидше від алгоритму (41), (42\*), (43), (44) без застосування цієї теорії. Це пояснюється тим, що коефіцієнти коерцитивності  $B_A$  і неперервності  $M_A$ , які, згідно з теоремою 5 і подібною теоремою для МДО (41), (42\*), (43), (44), що наведена у праці [25], впливають на збіжність методів декомпозиції області, для математичних моделей обох алгоритмів є різними. Ще однією перевагою алгоритму МДО (41)–(44) з використанням моделі теорії оболонок є те, що ця модель зменшує розмірність задачі для тіла  $\Omega_2$ , що дозволяє застосувати одновимірний МСЕ зі СЛАР меншої розмірності і отримати числові результати для випадку покриття з малою висотою ( $h_2 = b/16, b/32, b/64$ ).

Зміна висоти і жорсткості тонкого покриття  $\Omega_2$  впливає на збіжність методів (41)–(44) і (41), (42\*), (43), (44) по-різному. Зменшення висоти  $h_2$  від  $b$  до  $b/16$  приводить до зменшення загальної кількості ітерацій алгоритму (41)–(44) з використанням теорії оболонок Тимошенка для усіх значень жорсткості  $E_2$ . За

подальшого зменшення значень висоти кількість ітерацій майже не змінюється, оскільки числові розв'язки для настільки тонких покриттів відрізняються мало. Зменшення жорсткості  $E_2$  тонкого покриття приводять до зменшення кількості ітерацій алгоритму (41)–(44) для висот  $h_2 = b \div b/8$  і до незначного збільшення кількості ітерацій для висот  $h_2 = b/16 \div b/64$  (у межах однієї ітерації).

Таблиця 1. Кількість ітерацій  $m^*$  МДО (41), (42\*), (43), (44), необхідних для досягнення точності  $\varepsilon_u = 10^{-3}$ .

$E_2 \backslash h_2$	$b$	$b/2$	$b/4$	$b/8$
	$m^*$			
$4E$	113	55	46	45
$2E$	89	56	55	53
$E$	62	64	65	63
$E/2$	69	71	74	73
$E/4$	81	76	74	78

Таблиця 2. Кількість ітерацій  $m$  МДО (41)–(44), необхідних для досягнення точності  $\varepsilon_u = 10^{-3}$ .

$E_2 \backslash h_2$	$b$	$b/2$	$b/4$	$b/8$	$b/16$	$b/32$	$b/64$
	$m$						
$4E$	108	49	34	34	20	20	21
$2E$	73	39	33	34	20	21	22
$E$	46	34	34	34	21	22	23
$E/2$	35	33	33	21	22	23	23
$E/4$	31	31	30	22	23	23	24

Для алгоритму декомпозиції області (41), (42\*), (43), (44), у якому для покриття застосовується модель масивного пружного тіла, зменшення висоти приводить до зменшення загальної кількості ітерацій лише для покриттів, жорсткість яких перевищує жорсткість масивних тіл ( $E_2 > E$ ). На відміну від випадку алгоритму (41)–(44) із застосуванням теорії оболонок, зменшення жорсткості  $E_2$  покриття для висот  $h_2 = b/2, b/4, b/8$  приводить до збільшення кількості ітерацій алгоритму (41), (42\*), (43), (44). Для висоти  $h_2 = b$  кількість ітерацій цього алгоритму зростає при збільшенні або зменшенні жорсткості  $E_2$  покриття по відношенню до жорсткості  $E$  масивних тіл.

Також для сформульованої задачі здійснено порівняння контактних і міжфазних напружень, отриманих МДО (41)–(44) із застосуванням теорії оболонок Тимошенка і алгоритмом (41), (42\*), (43), (44) з використанням моделі пружного тіла, та вивчено вплив на ці напруження висоти і жорсткості покриття.

На рис. 3–6 зображено графіки нормального контактного напруження  $\sigma_{12n}$  на інтерфейсі  $S_{12}$  між верхнім тілом  $\Omega_1$  і тонким покриттям  $\Omega_2$  тіла  $\Omega_3$  відповідно для висоти покриття  $h = b, b/2, b/4, b/8$  ( $b = 1$  см). Криві 1 і 2 на рисунках позначають напруження для жорсткості покриття  $E_2 = 4E$  і  $E_2 = E/4$ . Суцільні криві відповідають числовим результатам, отриманим МДО (41)–(44) з використанням теорії оболонок Тимошенка, а штрихові – результатам, одержаним за алгоритмом (41), (42\*), (43), (44) із застосуванням моделі пружного тіла.

На рисунках бачимо, що розподіли нормального контактного напруження, отримані обома методами, більше відрізняються для випадку податливого покриття з модулем Юнга  $E_2 = E/4$  (криві 2), а для жорсткого покриття з  $E_2 = 4E$  (криві 1) ці розподіли відрізняються мало. При зменшенні висоти  $h_2$  графіки  $\sigma_{12n}$  для податливого покриття ( $E_2 = E/4$ ), одержані за допомогою обох методів, стають все ближчими, оскільки покращується точність результатів за алго-

ритмом з використанням теорії оболонок Тимошенка, яка дає більш точні результати для тонших тіл, але гірші – для товстіших тіл ( $h_2 = b, b/2$ ).

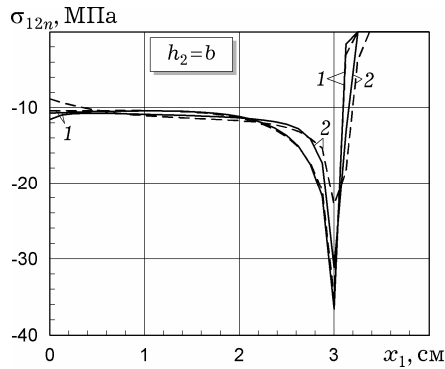


Рис. 3

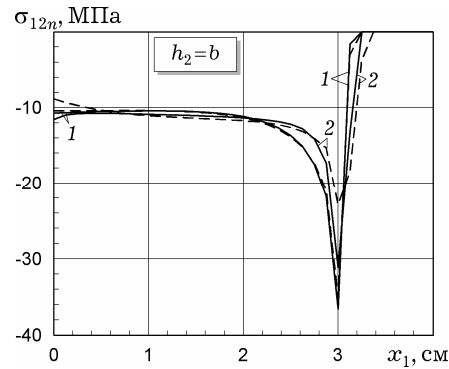


Рис. 4

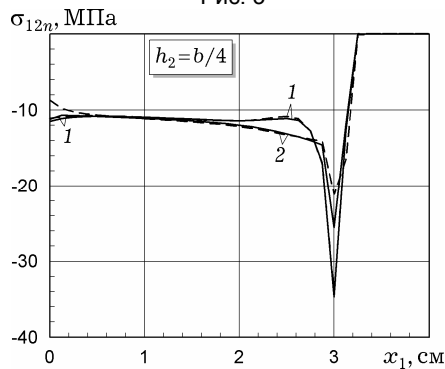


Рис. 5

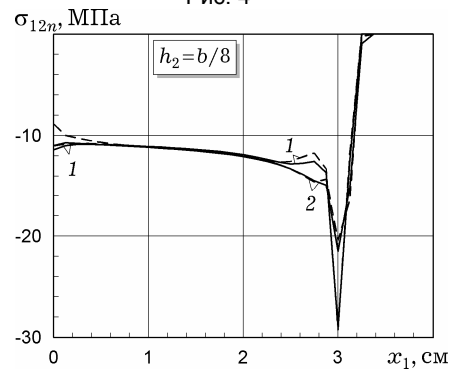


Рис. 6

Розподіли  $\sigma_{12n}$  для жорсткого покриття ( $E_2 = 4E$ ) за значення висоти  $h_2 = b/4$  (рис. 6), отримані обома методами, більше відрізняються між собою ніж за інших значень  $h_2$ , оскільки у цьому випадку кількість скінченних елементів для покриття по висоті у алгоритмі (41), (42\*), (43), (44) з використанням моделі пружного тіла стає рівною одиниці, що погіршує його точність порівняно з алгоритмом (41)–(44) на основі теорії оболонок Тимошенка, в якому для покриття застосовується одновимірний МСЕ.

З механічних ефектів, які можна виявити, проаналізувавши графіки, зображені на рис. 3–6, спостерігаємо: зменшення піку нормального контактного напруження  $\sigma_{12n}$ , який досягається біля лівого краю виїмки, при зменшенні висоти  $h_2$  і жорсткості  $E_2$  покриття; виникнення локального максимуму напруження  $\sigma_{12n}$  зліва від лівого краю виїмки при зменшенні висоти  $h_2$  для випадку жорсткого покриття ( $E_2 = 4E$ ).

На рис. 7–10 зображено графіки нормального міжфазного напруження  $\sigma_{23n}$  на інтерфейсі  $S_{23}$  між тонким покриттям  $\Omega_2$  і основним тілом  $\Omega_3$  відповідно за висоти покриття  $h = b, b/2, b/4, b/8$  ( $b = 1$  см), отримані МДО (41)–(44) на основі теорії оболонок Тимошенка (суцільні криві) та МДО (41), (42\*), (43), (44) на основі моделі пружного тіла (штрихові криві) для покриттів з модулем Юнга  $E_2 = 4E$  (криві 1) та  $E_2 = E/4$  (криві 2).

Щоб краще показати вплив висоти покриття на це напруження, наведемо також рис. 11, рис. 12, кожен з яких містить поряд графіки розподілів  $\sigma_{23n}$  для різних висот, одержаних обома МДО. Криві 1–4 на обох рисунках відповідають результатам для  $h = b, b/2, b/4, b/8$ , а крива 5 на рис. 11 – для  $h_2 = b/16$ . На рис. 11 зображено графіки  $\sigma_{23n}$  для випадку жорсткості покриття  $E_2 = 4E$ , а

на рис. 12 – для  $E_2 = E$ . Як і на попередніх рисунках, суцільними і штриховими лініями відповідно позначено числові розв'язки, отримані за допомогою МДО (41)–(44) і МДО (41), (42\*), (43), (44).

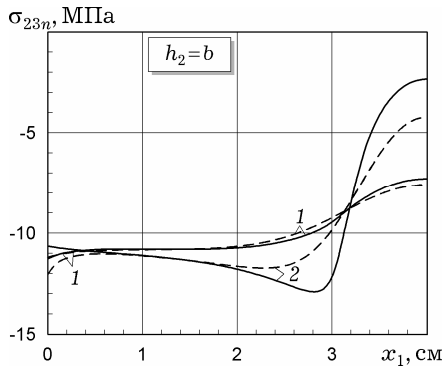


Рис. 7

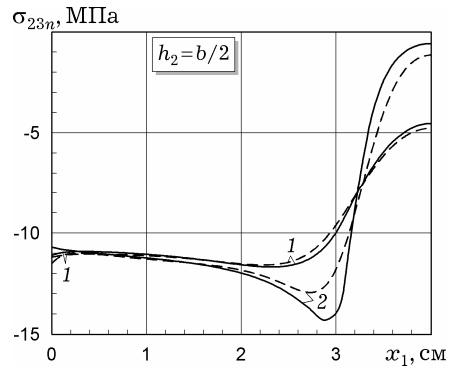


Рис. 8

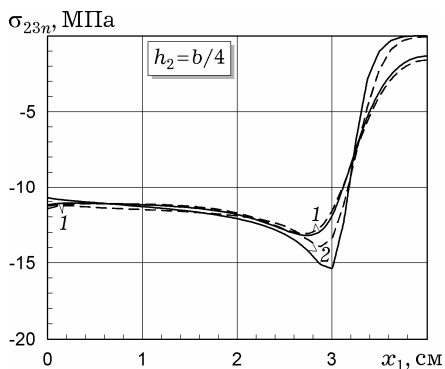


Рис. 9

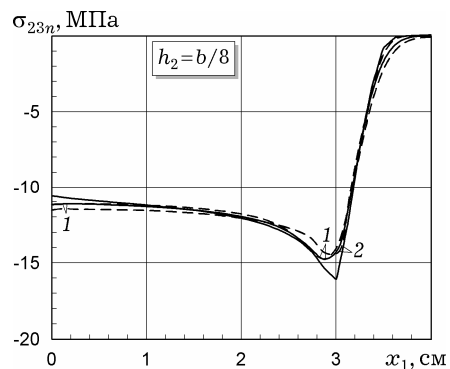


Рис. 10

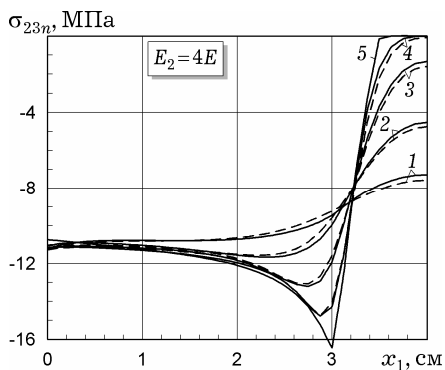


Рис. 11

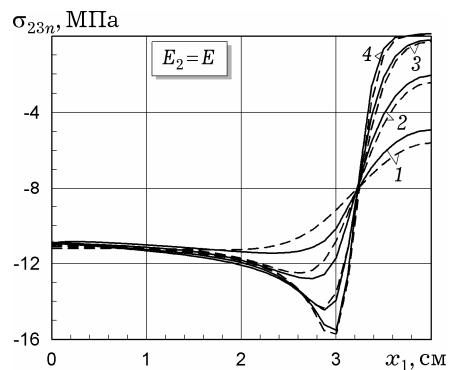


Рис. 12

Аналогічно, як і для випадку нормального контактного напруження  $\sigma_{12n}$ , з рис. 7–12 бачимо, що розподіли міжфазного нормального напруження  $\sigma_{23n}$ , одержані за допомогою обох методів, якісно є близькими, більше відрізняються один від одного для більш податливих покриттів і стають ближчими між собою для більш жорстких ( $E_2 = 4E$ ). При зменшенні висоти покриття  $h_2$  для різних значень жорсткості  $E_2$  відбувається зближення результатів, отриманих МДО (41)–(44) на основі теорії оболонок та МДО (41), (42\*), (43), (44) на основі моделі пружного тіла.

Також зауважимо, що МДО (41)–(44) на основі теорії оболонок Тимошенка дозволив отримати числові результати для дуже тонких покриттів  $h_2 \leq b/16$  (крива 5 на рис. 11), які вже не можна одержати за допомогою методу (41),



(42\*), (43), (44), що використовує модель пружного тіла, оскільки такі малі висоти вимагають значного згущення двовимірної скінченноелементної сітки за висотою покриття.

З аналізу наведених на цих рисунках графіків виокремимо такі ефекти: поява мінімуму нормального міжфазного напруження  $\sigma_{23n}$  біля лівого краю виїмки та наближення розподілу цього напруження до розподілу нормального контактного напруження  $\sigma_{12n}$  на інтерфейсі  $S_{12}$  при зменшенні висоти покриття  $h_2$ , а також зближення між собою розподілів  $\sigma_{23n}$  для різних жорсткостей  $E_2$  при зменшенні висоти  $h_2$ . Зближення цих розподілів і наближення до розподілу нормального напруження на межі  $S_{12}$  для покриттів малої висоти можна пояснити тим, що досить тонкі покриття вже не можуть істотно впливати на НДС системи контактуючих тіл.

Досліджено також дотичне міжфазне напруження  $\sigma_{23\tau}$  на інтерфейсі  $S_{23}$ . На рис. 13 наведено розподіли цього напруження, отримані МДО (41)–(44) (суцільні криві) та МДО (41), (42\*), (43), (44) (штрихові криві) для різних значень висоти покриття  $h_2$  за його жорсткості  $E_2 = E$ . Криві 1–3 на цьому рисунку відповідають графікам  $\sigma_{23\tau}$  для значень висоти  $h_2 = b/2, b/4$  і  $b/8$ .

Звідси бачимо, що розподіли дотичного напруження  $\sigma_{23\tau}$  на межі  $S_{23}$ , одержані за допомогою обох методів більше відрізняються один від одного, ніж розподіли нормального напруження  $\sigma_{23n}$ . Ця різниця є особливо значною зліва від лівого краю виїмки, тобто на лівій частині межі  $S_{23}$ . Таке відхилення результатів, отриманих за обома методами, можна пояснити тим, що теорія оболонки Тимошенка, яка застосовується в МДО (41)–(44) погано враховує обтиснення тонкого тіла і дає гірші результати для задач про стиск.

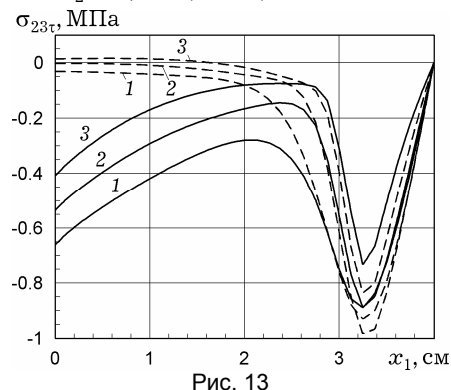


Рис. 13

Однак слід зазначити, що величина

дотичних міжфазних напружень  $\sigma_{23\tau}$  є на порядок меншою ніж величина відповідних нормальних напружень. Тому, якщо порівнювати цю різницю у величинах останніх, то вона не буде такою вже значною.

**Висновки.** Розглянуто задачу про односторонній контакт масивного пружного тіла та тонкого пружного покриття, яке з'єднане з іншим масивним пружним тілом через нелінійний прошарок вінклерівського типу. Напружено-деформований стан масивних тіл описується рівняннями теорії пружності, а тонкого покриття – рівняннями теорії оболонки Тимошенка. Запропоновано слабке формулювання цієї задачі у вигляді нелінійної варіаційної нерівності на опуклій замкнутій множині кінематично допустимих переміщень. На основі методу штрафу цю нерівність зведено до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння у гільбертовому просторі. Визначено умови існування і єдиності розв'язку варіаційних задач, а також збіжності за параметром штрафу розв'язку нелінійного варіаційного рівняння до слабого розв'язку вихідної задачі.

Для отриманого нелінійного варіаційного рівняння розроблено клас паралельних ітераційних алгоритмів декомпозиції області типу Робіна, які зводять його розв'язування до паралельного розв'язування трьох незалежних лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах, одне з яких відповідає задачі теорії оболонки Тимошенка для тонкого покриття, а інші – лінійним задачам теорії пружності для масивних тіл з крайовими умовами Робіна на межах контакту. Встановлено умови слабкої збіжності цих алгоритмів. Здійснено програмну реалізацію алгоритмів декомпозиції області із застосуванням для розв'язування задач теорії пружності у масивних тілах МСЕ з лінійними і квадратичними трикутними елементами, а для задачі теорії оболонки Тимошенка – одновимірною МСЕ з бульбашковими базисними функціями високого порядку.

Числові дослідження ефективності розроблених методів проведено для задачі про контактну взаємодію пружного тіла з поверхневою виїмкою і пружного тіла, яке має тонке пружне покриття, що з'єднане з ним через нелінійний вінк-

лерівський шар. Здійснено порівняння числових результатів, отриманих алгоритмом декомпозиції області з використанням теорії оболонки Тимошенка для моделювання НДС покриття та МДО на основі застосування моделі масивного пружного тіла для тонкого покриття. Вивчено залежність швидкості збіжності методів декомпозиції області від висоти і модуля Юнга тонкого тіла. Проаналізовано контактні та міжфазні напруження для різних значень висоти і жорсткості покриття. Визначено межі застосовності моделі теорії оболонки і моделі масивного пружного тіла для цієї задачі. Встановлено, що МДО на основі теорії оболонки Тимошенка для розглянутої задачі збігається швидше, ніж МДО на основі моделі масивного пружного тіла, і дозволяє отримати числові результати для покриттів малої висоти.

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 487 с.
2. Александров В. М., Пожарский Д. А. Трехмерные контактные задачи для упругого клина с покрытием // Прикл. математика и механика. – 2008. – 72, № 1. – С. 103–109.
3. Александров В. М., Пожарский Д. А. Трехмерные контактные задачи при учете трения и нелинейной шероховатости // Прикл. математика и механика. – 2004. – 68, № 3. – С. 516–527.
4. Блох М. В., Орбинский А. В. О модификации метода конечных элементов для решения двумерных упругих и пластических контактных задач // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 24–27.
5. Винницька Л. І. Математичне моделювання механіки деформування пружних тіл з тонкими м'якими включеннями: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2009. – 153 с.
6. Винницька Л., Савула Я. Напружено-деформований стан пружного тіла з тонким включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 7. – С. 21–29.
7. Григоренко А. Я., Дьяк И. И., Матусьяк С. И., Прокопышин И. И. Методы декомпозиции области для решения задач контакта без трения многослойных упругих тел // Прикл. механика. – 2010. – 46, № 4. – С. 25–37.  
Te same: Grigorenko A. Ya., Dyak I. I., Matysyak S. I., Prokopyshyn I. I. Domain decomposition methods applied to solve frictionless-contact problems for multilayer elastic bodies // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, No. 4. – P. 388–399.
8. Дьяк И. И., Прокопышин И. И. Збіжність паралельної схеми Неймана методу декомпозиції області для задач контакту без тертя декількох пружних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 3. – С. 78–89.  
Te same: Dyak I. I., Prokopyshyn I. I. Convergence of the Neumann parallel scheme of the domain decomposition method for problems of frictionless contact between several elastic bodies // J. Math. Sci. – 2010. – 171, No. 4. – P. 516–533.
9. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – Москва: Наука, 1980. – 383 с.  
Te same: Duvaut G., Lions J.-L. Les inéquations en mécanique et en physique. – Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1972. – xx+387 p.
10. Зайцев В. И., Щавелин В. М. Метод решения контактных задач с учетом реальных свойств шероховатых поверхностей взаимодействующих тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 1. – С. 88–94.
11. Коваленко Е. В. Контактные задачи для тел с покрытиями // Механика контактных взаимодействий / Под. ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – Москва: Физматлит. – С. 459–475.
12. Кравчук А. С. Нелокальный контакт шероховатых тел по эллиптической области // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 3. – С. 42–52.
13. Кравчук А. С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. математика и механика. – 1978. – 42, № 3. – С. 467–474.
14. Кузьменко В. И. О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел // Прикл. математика и механика. – 1979. – 43, № 5. – С. 893–901.
15. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 588 с.
16. Мартиняк Р. М., Прокопышин И. А., Прокопышин И. И. Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 3. – С. 43–56.  
Te same: Martyniak R. M., Prokopyshyn I. A., Prokopyshyn I. I. Contact of elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers // J. Math. Sci. – 2015. – 205, No. 4. – P. 535–553.
17. Мартиняк Р. М., Швець Р. М. Математична модель механічного контакту тіл через тонкий неоднорідний прошарок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 2. – С. 107–109.

- Te same: *Martinyak R. M., Shvets' R. M.* A mathematical model of mechanical contact of bodies across a thin inhomogeneous layer // *J. Math. Sci.* – 1998. – **90**, No. 2. – P. 2000–2002.
18. *Мартиняк Р. М., Швець Р. М.* Умови теплового контакту тіл через тонкі неоднорідні за товщиною прошарки // *Доп. НАН України.* – 1996. – № 9. – С. 74–76.
  19. *Мхитарян С. М., Шежян А. Л., Шежян Л. А.* Вдавливание круглого штампа в упругое шероховатое полупространство // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* – 2009. – № 5. – С. 90–98.
  20. *Пелех Б. Л.* Обобщенная теория оболочек. – Львов: Вища шк., 1978. – 156 с.
  21. *Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 280 с.
  22. *Подгорный А. Н., Гонтаровский П. П., Киркач Б. Н., Матюхин Ю. И., Хавин Г. Л.* Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989. – 232 с.
  23. *Прокопишин И. А., Хлебников Д. Г.* Эквивалентные вариационные постановки односторонних контактных задач для упругих тел при наличии нелинейного поверхностного слоя // *Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела: Тез. докл. респ. науч.-техн. конф.* – Харьков, ХИСИ, 1989. – С. 83–85.
  24. *Прокопишин И. И.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач про ідеальний контакт пружних тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 1. – С. 41–56.  
Te same: *Prokopyshyn I. I.* Domain decomposition schemes based on the penalty method for the problems of perfect contact of elastic bodies // *J. Math. Sci.* – 2016. – **212**, No. 1. – P. 46–66.
  25. *Прокопишин И.* Контактна взаємодія пружних тіл, одне з яких має покриття, з'єднане з основою через вінклерівський прошарок // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2016. – Вип. 23. – С. 144–160.
  26. *Прокопишин И.* Методи декомпозиції області для задачі про статичну рівновагу системи пружних тіл, з'єднаних через тонкі нелінійні прошарки // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2015. – Вип. 21. – С. 173–185.
  27. *Прокопишин И.* Методи декомпозиції області для задач про односторонній контакт нелінійно пружних тіл // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2012. – Вип. 15. – С. 75–87.
  28. *Прокопишин И.* Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика.* – 2008. – Вип. 14. – С. 123–133.
  29. *Прокопишин И. И., Дьяк И. И., Мартиняк Р. М.* Числовое дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2013. – **49**, № 1. – С. 46–55.  
Te same: *Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martinyak R. M.* Numerical analysis of the problems of contact of three elastic bodies by the domain decomposition methods // *Mater. Sci.* – 2013. – **49**, No. 1. – P. 45–58.
  30. *Савула Я. Г., Дьяк И. И., Дубовик А. В.* Применение комбинированной модели для расчета напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций // *Прикл. механика.* – 1989. – **25**, № 9. – С. 62–67.  
Te same: *Savula Ya. G., Dyyak I. I., Dubovik A. V.* Use of a combination model to calculate the stress-strain state of three-dimensional structures // *Int. Appl. Mech.* – 1989. – **25**, No. 9. – P. 904–909.
  31. *Стягар А. О., Савула Я. Г., Дьяк И. И.* Числовий аналіз напружено-деформованого стану тіла з тонкими включеннями методом декомпозиції області // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 3. – С. 119–131.  
Te same: *Styghar A. O., Savula Ya. H., Dyyak I. I.* Numerical analysis of the stress-strain state of a body with thin inclusion by the domain decomposition method // *J. Math. Sci.* – 2016. – **217**, No. 3. – P. 283–298.
  32. *Суллим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-видавн. центр НТШ, 2007. – 716 с.
  33. *Avery P., Farhat C.* The FETI family of domain decomposition methods for inequality-constrained quadratic programming: Application to contact problems with conforming and nonconforming interfaces // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 2009. – **198**, No. 21–26. – P. 1673–1683.
  34. *Dostál Z., Kozubek T., Vondrák V., Brzobohatý T., Markopoulos A.* Scalable TFETI algorithm for the solution of multibody contact problems of elasticity // *Int. J. Numer. Methods Eng.* – 2010. – **82**, No. 11. – P. 1384–1405.
  35. *Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A.* Convergence of penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity // <http://arxiv.org/pdf/1208.6478.pdf>. – 2015. – 33 p.
  36. *Dyyak I. I., Savula Ya. H.* D-adaptive mathematical model of solid body with thin coating // *Мат. студії.* – 1997. – **7**, № 1. – С. 103–109.
  37. *Dyyak I., Savula Ya., Styghar A.* Numerical investigation of a plain strain state for a

- body with thin cover using domain decomposition // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2012. – № 3 (109). – С. 23–33.
38. Haslinger J., Kučera R., Sassi T. A domain decomposition algorithm for contact problems: Analysis and implementation // Math. Model. Nat. Phenom. – 2009. – 4, No. 1. – P. 123–146.
  39. Kikuchi N., Oden J. T. Contact problem in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. – Philadelphia: SIAM, 1988. – xiii + 495 p.
  40. Koko J. Uzawa block relaxation domain decomposition method for a two-body frictionless contact problem // Appl. Math. Lett. – 2009. – 22. – P. 1534–1538.
  41. Makar I., Savula Ya., Styahar A. Numerical analysis of a multiscale model of the elastic body with the thin cover // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 15. – С. 49–55.
  42. Pasternak Ia., Sulym H. Stress state of solids containing thin elastic crooked inclusions // J. Eng. Math. – 2013. – 78, No. 1. – P. 167–180.
  43. Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A. Domain decomposition methods for problems of unilateral contact between elastic bodies with nonlinear Winkler covers // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2014. – 98. – P. 739–748.
  44. Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A. Penalty Robin–Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2013. – 91. – P. 647–654.
  45. Riederer K., Duenser C., Beer G. Simulation of the linear inclusions with the BEM // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2009. – 33, No. 7. – P. 959–965.
  46. Savula Ya. H., Dyyak I. I., Krevs V. V. Heterogeneous mathematical models in numerical analysis of structures // Comput. Math. Appl. – 2001. – 42, No. 8–9. – P. 1201–1216.
  47. Styahar A. Numerical analysis of the Girkmann problem with FEM/BEM coupling using domain decomposition // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2014. – № 2 (116). – С. 141–151.
  48. Styahar A., Savula Ya. On the convergence of domain decomposition algorithm for the body with thin inclusion // Acta Mechanica et Automatica. – 2015. – 9, No. 1. – P. 27–32.

#### ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДАМИ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ КОНТАКТА УПРУГИХ ТЕЛ, ОДНО ИЗ КОТОРЫХ ИМЕЕТ ТОНКОЕ ПОКРЫТИЕ, СОЕДИНЕННОЕ С ТЕЛОМ ЧЕРЕЗ НЕЛИНЕЙНЫЙ ВИНКЛЕРОВСКИЙ СЛОЙ

Рассмотрена задача о контактном взаимодействии двух упругих тел, одно из которых имеет покрытие в виде тонкой оболочки типа Тимошенко, соединенное с телом через нелинейный винклеровский слой. Осуществлена слабая формулировка этой задачи в виде нелинейного вариационного уравнения. Предложен класс итерационных методов декомпозиции области, которые сводят решения этого уравнения к решению на каждой итерации независимых линейных вариационных уравнений, соответствующих задачам теории упругости для массивных тел и задачи теории оболочек Тимошенко для покрытия с краевыми условиями Робина на границах контакта. Установлены условия слабой сходимости этих методов. Проведены исследования численной эффективности полученных алгоритмов с использованием конечно-элементных аппроксимаций.

**Ключевые слова:** контактные задачи теории упругости, тонкие покрытия, оболочки Тимошенко, винклеровские слои, нелинейные вариационные уравнения, методы декомпозиции области, метод конечных элементов.

#### INVESTIGATION BY DOMAIN DECOMPOSITION METHODS OF THE CONTACT BETWEEN ELASTIC BODIES, ONE OF WHICH HAS A THIN COATING, CONNECTED WITH A BODY THROUGH A NONLINEAR WINKLER LAYER

The problem of contact interaction between two elastic bodies, one of which has a coating in the form of a thin Timoshenko-type shell, that is connected with a body through a nonlinear Winkler layer is considered. The weak formulation of this problem in the form of a nonlinear variational equation is obtained. A class of iterative domain decomposition methods to solve this variational equation is proposed, which reduce solution of this equation to the solving of independent linear variational equations at each iteration, which correspond to elasticity problems for solids and Timoshenko shell theory problem for thin coating with Robin boundary conditions on the contact boundaries. The conditions of weak convergence of these methods are established. The investigations of numerical efficiency of presented algorithms are performed using finite element approximations.

**Key words:** contact problems of elasticity, thin coatings, Timoshenko shells, Winkler layers, nonlinear variational equations, domain decomposition methods, finite element method.

<sup>1</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,  
<sup>2</sup> Університет м. Л'Аквили, Л'Аквила, Італія