УДК 539.3

В. І. Острик*

СИМЕТРІЯ ІНВЕРСІЇ РОЗВ'ЯЗКУ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ

Із застосуванням інтегрального перетворення Мелліна отримано розв'язок першої крайової задачі теорії пружності для півпростору у сферичних координатах у випадках, коли одна із крайових умов є неоднорідною і має симетрію інверсії, а дві інші – однорідні. Показано, що окремі компоненти розв'язку також мають симетрію інверсії.

Ключові слова: *симетрія інверсії, пружний півпростір, сферичні координати, гармонічні функції, інтеграл Мелліна.*

Симетрію інверсії розв'язків плоских задач теорії пружності для клина розглянуто в роботах [4, 6, 7]. Показано, що у випадку, коли одна або дві крайові умови є незмінними при перетворенні інверсії, а інші умови − однорідні, окремі компоненти розв'язків також залишаються незмінними. Нижче вивчається симетрія інверсії розв'язку першої крайової задачі для пружного півпростору у сферичних координатах. Окремо розглянуто випадки нормального та дотичного навантажень межі півпростору.

1. Нормальне навантаження. Нехай пружний півпростір $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \le z < \infty$ з пружними сталими G, ν у сферичних координатах ρ, ϑ, φ задається нерівностями $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \vartheta \le \pi/2$, $0 \le \varphi < 2\pi$. При цьому декартові координати зв'язані зі сферичними таким чином:

$$x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = \rho\cos\vartheta,$$

а межа півпростору задається рівністю $z = 0$ або $\vartheta = \pi/2$.

Розглянемо першу крайову задачу теорії пружності для півпростору у випадку заданих на межі півпростору нормальних напружень за відсутності дотичних напружень. Крайові умови мають вигляд

$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=\pi/2} = -p(\rho,\varphi), \qquad \tau_{\rho\vartheta}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0, \qquad \tau_{\vartheta\varphi}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0. \tag{1}$$

Застосуємо подання компонент вектора переміщень у формі Папковича – Нейбера [8] через гармонічні функції Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3:

$$u_x = 4(1-\nu)\Phi_1 - \frac{\partial}{\partial x}(\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3),$$

$$u_y = 4(1-\nu)\Phi_2 - \frac{\partial}{\partial y}(\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3),$$

$$u_z = 4(1-\nu)\Phi_3 - \frac{\partial}{\partial z}(\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3), \tag{2}$$

у якому для виконання другої і третьої з крайових умов (1) покладемо [2]

$$\Phi_1 \equiv 0, \qquad \Phi_2 \equiv 0, \qquad \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} = (1-2\nu)\Phi_3. \tag{3}$$

Перейшовши до сферичних координат, маємо [5]:

$$u_\rho = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial\rho} + (3-4\nu)\Phi_3\cos\vartheta - \rho\frac{\partial\Phi_3}{\partial\rho}\cos\vartheta,$$

* v.i.ostryk@gmail.com

$$u_\vartheta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \vartheta} - (3-4\nu)\Phi_3 \sin\vartheta - \frac{\partial \Phi_3}{\partial \vartheta}\cos\vartheta ,$$

$$u_\varphi = -\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi}\operatorname{ctg}\vartheta . \tag{4}$$

Напруження виражаються через переміщення так [9]:

$$\frac{1}{2G}\sigma_\rho = \frac{\nu}{1-2\nu}\theta + \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \qquad \frac{1}{2G}\sigma_\vartheta = \frac{\nu}{1-2\nu}\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + u_\rho\right),$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_\varphi = \frac{\nu}{1-2\nu}\theta + \frac{1}{\rho}(u_\rho + u_\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta), \qquad \frac{1}{G}\tau_{\rho\vartheta} = \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{u_\vartheta}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\vartheta},$$

$$\frac{1}{G}\tau_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi} + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{u_\varphi}{\rho}\right),$$

$$\frac{1}{G}\tau_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\vartheta} + u_\varphi\operatorname{ctg}\vartheta + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\varphi}\right),$$

$$\theta = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 u_\rho) + \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(u_\vartheta\sin\vartheta) + \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}. \tag{5}$$

Із (4), (5), зокрема, отримаємо

$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\vartheta^2} - (1-2\nu)\frac{\partial\Phi_3}{\partial\rho}\cos\vartheta -$$

$$-2(1-\nu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\vartheta}\sin\vartheta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial\vartheta^2}\cos\vartheta . \tag{6}$$

За допомогою (6), а також рівностей

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\pi/2}, \qquad \left.\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right|_{z=0} = \left.\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\right)\right|_{\vartheta=\pi/2}$$

першу з крайових умов (1) перетворимо до вигляду

$$\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\pi/2} = p(\rho,\varphi). \tag{7}$$

Таким чином, задачу з крайовими умовами (1) зведено до задачі Неймана про визначення гармонічної функції Φ_3 за крайовою умовою (7).

Подавши задану функцію $p(\rho,\varphi)$ у вигляді розвинення в ряд Фур'є за коловою координатою φ:

$$p(\rho,\varphi) = p_0(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[p_m^{(1)}(\rho)\cos m\varphi + p_m^{(2)}(\rho)\sin m\varphi\right], \tag{8}$$

у такому ж вигляді відшукуємо гармонічну функцію Φ_3:

$$\Phi_3(\rho,\vartheta,\varphi) = \Phi_3^{(0)}(\rho,\vartheta) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\Phi_3^{(1m)}(\rho,\vartheta)\cos m\varphi + \Phi_3^{(2m)}(\rho,\vartheta)\sin m\varphi\right]. \tag{9}$$

Підставивши розвинення (9) у рівняння Лапласа [2], дістанемо, що коефіцієнти цього розвинення задовольняють рівняння

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\Phi_3^{(km)}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi_3^{(km)}}{\partial\vartheta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\Phi_3^{(km)} = 0 ,$$

$$\Phi_3^{(k0)} = \Phi_3^{(0)}, \qquad k = 1,2, \qquad m = 0,1,\dots. \tag{10}$$

Підстановкою розвинення (9) в умову (7) для шуканих функцій із рівнянь (10) отримаємо крайові умови

$$\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi_3^{(km)}}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\pi/2} = p_m^{(k)}(\rho), \quad p_0^{(k)}(\rho) = p_0(\rho), \quad k = 1,2, \quad m = 0,1,\dots. \tag{11}$$

Увівши трансформанти Мелліна [10] невідомих функцій

$$\tilde{\Phi}_3^{(km)} = \int_0^\infty \Phi_3^{(km)}\rho^{s-1}\,d\rho\,, \tag{12}$$

для їхнього визначення з (10) виводимо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2\tilde{\Phi}_3^{(km)}}{d\vartheta^2} + \frac{d\tilde{\Phi}_3^{(km)}}{d\vartheta}\operatorname{ctg}\vartheta + \left(s(s-1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)\tilde{\Phi}_3^{(km)} = 0\,,$$

$$k = 1,2, \qquad m = 0,1,\dots. \tag{13}$$

Обмежені при $\vartheta = 0$ розв'язки цього рівняння

$$\tilde{\Phi}_3^{(km)} = A_{km}(s)P_{s-1}^m(\cos\vartheta), \qquad A_{k0}(s) = A_m(s)\,, \tag{14}$$

де $A_{km}(s)$ – довільні функції параметра s, виражаються через функцію Лежандра [1]:

$$P_{s-1}^m(\cos\vartheta) = (-1)^m \sin^m\vartheta\,\frac{d^m P_{s-1}(\cos\vartheta)}{d(\cos\vartheta)^m}, \qquad m = 1,2,\dots. \tag{15}$$

За допомогою оберненого перетворення Мелліна [10] із (14) отримуємо

$$\Phi_3^{(km)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} A_{km}(s)P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\rho^{-s}\,ds, \quad 0 < c < 1\,,$$

$$k = 1,2, \qquad m = 0,1,\dots. \tag{16}$$

Підставивши вирази (16) у крайові умови (11), з урахуванням (15) маємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} A_{km}(s)P_{s-1}^{m+1}(0)\,\rho^{-s-1}\,ds = p_m^{(k)}(\rho), \quad k = 1,2, \quad m = 0,1,\dots. \tag{17}$$

Тут, зокрема, на підставі (15), а також значення $P_s^m(0)$ [1, с. 146]

$$\left.\frac{d}{d\vartheta}P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\right|_{\vartheta=\pi/2} = P_{s-1}^{m+1}(0) = \frac{2^{m+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma((1-s-m)/2)\Gamma((s-m)/2)}\,,$$

$$m = 0,1,\dots. \tag{18}$$

Звідси, подавши праві частини рівностей (17) у вигляді інтегралів Мелліна

$$p_m^{(k)}(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{p}_m^{(k)}(s)\rho^{-s-1}ds\,,$$

$$\tilde{p}_m^{(k)}(s) = \int_0^\infty p_m^{(k)}(\rho)\rho^s\,ds, \qquad \tilde{p}_0^{(k)}(s) = \tilde{p}_0(s)\,, \tag{19}$$

отримуємо

$$A_{km}(s) = a_m(s)\tilde{p}_m^{(k)}(s), \qquad a_m(s) = \frac{\Gamma((1-s-m)/2)\Gamma((s-m)/2)}{2^{m+1}\sqrt{\pi}}\,,$$

$$k = 1,2, \qquad m = 0,1,\dots. \tag{20}$$

Отже, на підставі рівностей (19), (20) коефіцієнти (16) розвинення (9) функції Φ_3 є повністю визначеними.

Визначимо гармонічну функцію Φ_0, яка зв'язана з функцією Φ_3 останньою з рівностей (3). Використовуючи формулу диференціювання

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial\rho} - \sin\vartheta \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

і рівність (15), матимемо

$$\frac{\partial}{\partial z} P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\rho^{-s} = -\left[s\cos\vartheta \cdot P_{s-1}^m(\cos\vartheta) + \sin\vartheta \cdot \frac{d}{d\vartheta} P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\right]\rho^{-s-1} =$$

$$= -(s-m)P_s^m(\cos\vartheta)\rho^{-s-1}.$$

Звідси, враховуючи (16), знаходимо

$$\frac{\partial\Phi_3^{(km)}}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} (s-m)A_{km}(s)P_s^m(\cos\vartheta)\,\rho^{-s-1}ds\,,$$

$$k = 1,2, \qquad m = 0,1,\ldots. \tag{21}$$

Розвинувши функцію Φ_0 у ряд Фур'є за координатою φ:

$$\Phi_0(\rho,\vartheta,\varphi) = \Phi_0^{(0)}(\rho,\vartheta) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\Phi_0^{(1m)}(\rho,\vartheta)\cos m\varphi + \Phi_0^{(2m)}(\rho,\vartheta)\sin m\varphi\right], \tag{22}$$

на підставі останньої з рівностей (3), переписаної у вигляді

$$\frac{\partial\Phi_0^{(km)}}{\partial z} = (1-2\nu)\Phi_3^{(km)}, \qquad \Phi_0^{(k0)} = \Phi_0^{(0)}, \tag{23}$$

а також рівності (21) отримаємо

$$\Phi_0^{(km)} = -\frac{1-2\nu}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{A_{km}(s)}{s-m-1} P_{s-2}^m(\cos\vartheta)\,\rho^{-s+1}ds\,,$$

$$k = 1,2, \qquad m = 0,1,\ldots. \tag{24}$$

При цьому, якщо вимагати відсутність напружень на нескінченності, не виникають довільні гармонічні функції інтегрування, залежні від $\rho\sin\vartheta$.

Розвинемо у ряд Фур'є переміщення і напруження, наприклад,

$$u_\rho = u_\rho^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(u_\rho^{(1m)}\cos m\varphi + u_\rho^{(2m)}\sin m\varphi\right), \quad u_\rho^{(10)} = u_\rho^{(20)} = u_\rho^{(0)},$$

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sigma_\rho^{(1m)}\cos m\varphi + \sigma_\rho^{(2m)}\sin m\varphi\right), \quad \sigma_\rho^{(10)} = \sigma_\rho^{(20)} = \sigma_\rho^{(0)}, \tag{25}$$

і подамо коефіцієнти цих розвинень через інтеграли Мелліна:

$$\left\{u_\rho^{(km)}, u_\vartheta^{(km)}, u_\varphi^{(km)}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left\{\tilde u_\rho^{(km)}, \tilde u_\vartheta^{(km)}, \tilde u_\varphi^{(km)}\right\}\rho^{-s}\,ds\,,$$

$$\left\{\begin{matrix}\sigma_\rho^{(km)}, \sigma_\vartheta^{(km)}, \sigma_\varphi^{(km)} \\ \tau_{\rho\vartheta}^{(km)}, \tau_{\rho\varphi}^{(km)}, \tau_{\vartheta\varphi}^{(km)}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left\{\begin{matrix}\tilde\sigma_\rho^{(km)}, \tilde\sigma_\vartheta^{(km)}, \tilde\sigma_\varphi^{(km)} \\ \tilde\tau_{\rho\vartheta}^{(km)}, \tilde\tau_{\rho\varphi}^{(km)}, \tilde\tau_{\vartheta\varphi}^{(km)}\end{matrix}\right\}\rho^{-s-1}\,ds\,,$$

$$k = 1,2, \qquad m = 0,1,\ldots. \tag{26}$$

Використовуючи рекурентні співвідношення для функцій Лежандра [1]:

$$\frac{d}{d\vartheta} P_{s-1}^m(\cos\vartheta) = \frac{1}{\sin\vartheta}\left[m P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\cos\vartheta + P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta \right],$$

$$(s+m-1)P_{s-2}^m(\cos\vartheta) = (s-m-1)P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\cos\vartheta - P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta,$$

$$P_{s-1}^{m+2}(\cos\vartheta) = -(s+m)(s-m-1)P_{s-1}^m(\cos\vartheta) - $$

$$- 2(m+1)P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta, \qquad (27)$$

із рівностей (4), (5), (16), (24) знаходимо

$$\frac{1}{A_{km}(s)}\tilde{u}_\rho^{(km)} = \left(s + 2(1-\nu) + \frac{m(1-2\nu)}{s+m-1} \right) P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\cos\vartheta + $$

$$+ \frac{(1-2\nu)(s-1)}{(s-1)^2 - m^2} P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta,$$

$$\frac{1}{A_{km}(s)}\tilde{u}_\vartheta^{(km)} = \left[-2(1-\nu)\sin\vartheta + m\left(\frac{1-2\nu}{s+m-1} - 1 \right)\frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta} \right] P_{s-1}^m(\cos\vartheta) - $$

$$- \left(1 - (1-2\nu)\frac{s-1}{(s-1)^2 - m^2} \right) P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta,$$

$$\frac{(-1)^k}{mA_{3-k,m}(s)}\tilde{u}_\varphi^{(km)} = \left(1 - \frac{1-2\nu}{s+m-1} \right) P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta + $$

$$+ \frac{1-2\nu}{(s-1)^2 - m^2} P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta),$$

$$\frac{1}{2GA_{km}(s)}\tilde{\sigma}_\rho^{(km)} = -\left(s^2 + 2s + m - (1-2\nu)\frac{m(m-1)}{s+m-1} \right) P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta - $$

$$- \left(1 + (1-2\nu)\frac{s+m^2-1}{(s-1)^2 - m^2} \right) P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta,$$

$$\frac{1}{2GA_{km}(s)}\tilde{\sigma}_\vartheta^{(km)} = \Bigg(s(s-1) - 2m - \frac{m(m-1)}{\sin^2\vartheta} + $$

$$+ (1-2\nu)\frac{m(m-1)}{s+m-1}\operatorname{ctg}^2\vartheta \Bigg) P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\cos\vartheta - $$

$$- \left[1 - \left(1 - (1-2\nu)\frac{s+m^2-1}{(s-1)^2 - m^2} \right)\operatorname{ctg}^2\vartheta \right] P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta,$$

$$\frac{1}{2GA_{km}(s)}\tilde{\sigma}_\varphi^{(km)} = \left[(1-2\nu)(s+m) - \frac{m(m-1)}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{1-2\nu}{s+m-1} - 1 \right) \right] \times$$

$$\times P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\cos\vartheta + \Bigg[1 - 2\nu - \Bigg(1 - (1-2\nu) \times$$

$$\times \frac{s+m^2-1}{(s-1)^2 - m^2} \Bigg) \frac{1}{\sin^2\vartheta} \Bigg] P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta,$$

$$\frac{1}{2GA_{km}(s)}\tilde{\tau}_{\rho\vartheta}^{(km)} = m\left(s + 1 + (1-2\nu)\frac{m-1}{s+m-1} \right) P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta} + $$

$$+ \left(s + 1 - (1-2\nu)\frac{s+m^2-1}{(s-1)^2 - m^2} \right) P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta,$$

$$\frac{(-1)^k}{2GmA_{3-k,m}(s)}\,\tilde{\tau}_{\rho\varphi}^{(km)} = -\left(s+1-(1-2\nu)\frac{m-1}{s+m-1}\right)P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta -$$

$$-(1-2\nu)\frac{s}{(s-1)^2-m^2}\,P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta),$$

$$\frac{(-1)^k}{2GmA_{3-k,m}(s)}\,\tilde{\tau}_{\vartheta\varphi}^{(km)} = m\left(1-\frac{1-2\nu}{s+m-1}\right)P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\,\mathrm{ctg}^2\,\vartheta +$$

$$+\left(1-(1-2\nu)\frac{s-1}{(s-1)^2-m^2}\right)P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta,$$

$$k=1,2,\qquad m=0,1,\ldots. \tag{28}$$

З огляду на тотожність [1]

$$P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\equiv P_{-s}^m(\cos\vartheta),\qquad m=0,1,\ldots, \tag{29}$$

функції Лежандра, що входять до рівностей (28), залишаються незмінними при заміні параметра s на $1-s$. Таку ж властивість має функція $a_m(s)$ із (20). Щоб подібну властивість мали також функції $\tilde{p}_m^{(k)}(s)$ із (20), а отже, і функції $A_{km}(s)$, $k=1,2$, $m=0,1,\ldots$, вимагатимемо виконання тотожності

$$\sqrt{\rho^3}\,p(\rho,\varphi)\equiv\frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\,p\left(\frac{\ell^2}{\rho},\varphi\right), \tag{30}$$

яка означає, що при перетворенні інверсії відносно точки $\rho=\ell$ функція $\sqrt{\rho^3}\,p(\rho,\varphi)$ є симетричною.

Для коефіцієнтів розвинення (8) відповідно матимемо

$$\sqrt{\rho^3}\,p_m^{(k)}(\rho,\varphi)\equiv\frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\,p_m^{(k)}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\varphi\right),\qquad k=1,2,\qquad m=0,1,\ldots, \tag{31}$$

Тоді функції $\tilde{p}_m^{(k)}(s)$ із (19) набувають вигляду

$$\tilde{p}_m^{(k)}(s)=\ell^s\int_0^\ell p_m^{(k)}(\rho)\left[\left(\frac{\rho}{\ell}\right)^s+\left(\frac{\rho}{\ell}\right)^{1-s}\right]ds \tag{32}$$

і, як наслідок, разом із функціями $A_{km}(s)$ задовольняють тотожності

$$\tilde{p}_m^{(k)}(1-s)\equiv\ell^{1-2s}\tilde{p}_m^{(k)}(s),$$

$$A_{km}(1-s)\equiv\ell^{1-2s}A_{km}(s),\qquad k=1,2,\qquad m=0,1,\ldots. \tag{33}$$

На підставі (29), (33) із (28) маємо

$$\tilde{u}_\vartheta^{(km)}(1-s,\vartheta)\equiv\ell^{1-2s}\tilde{u}_\vartheta^{(km)}(s,\vartheta),\qquad \tilde{u}_\varphi^{(km)}(1-s,\vartheta)\equiv\ell^{1-2s}\tilde{u}_\varphi^{(km)}(s,\vartheta),$$

$$\tilde{\sigma}_\vartheta^{(km)}(1-s,\vartheta)\equiv\ell^{1-2s}\tilde{\sigma}_\vartheta^{(km)}(s,\vartheta),\qquad \tilde{\sigma}_\varphi^{(km)}(1-s,\vartheta)\equiv\ell^{1-2s}\tilde{\sigma}_\varphi^{(km)}(s,\vartheta),$$

$$\tilde{\tau}_{\vartheta\varphi}^{(km)}(1-s,\vartheta)\equiv\ell^{1-2s}\tilde{\tau}_{\vartheta\varphi}^{(km)}(s,\vartheta),\qquad \nu=0.5,$$

$$\tilde{u}_\vartheta^{(km)}\left(1-s,\frac{\pi}{2}\right)\equiv\ell^{1-2s}\tilde{u}_\vartheta^{(km)}\left(s,\frac{\pi}{2}\right),\qquad k=1,2,\qquad m=0,1,\ldots. \tag{34}$$

Коефіцієнти Фур'є переміщень u_ϑ, перетворені за інверсією, згідно з (26) мають вигляд

$$u_\vartheta^{(km)}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\tilde u_\vartheta^{(km)}(s,\vartheta)\left(\frac{\ell^2}{\rho}\right)^{-s}ds\,.$$

Замінивши змінну інтегрування s на $1-s$, з урахуванням першої з тотожностей (34) знайдемо

$$u_\vartheta^{(km)}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right)=\frac{\rho}{\ell}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-c-i\infty}^{1-c+i\infty}\tilde u_\vartheta^{(km)}(s,\vartheta)\rho^{-s}\,ds,\qquad \nu=0.5\,.$$

В останньому інтегралі перемістимо контур інтегрування паралельно самому собі у положення $\operatorname{Re}s=c$, $0<c<1$. Через відсутність полюсів підінтегральної функції у смузі $0<\operatorname{Re}s<1$ значення інтеграла при цьому не зміниться. У результаті отримаємо тотожність

$$u_\vartheta^{(km)}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right)\equiv\frac{\rho}{\ell}u_\vartheta^{(km)}(\rho,\vartheta),\qquad \nu=0.5\,. \tag{35}$$

Аналогічно встановлюємо

$$u_\varphi^{(km)}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right)\equiv\frac{\rho}{\ell}u_\varphi^{(km)}(\rho,\vartheta),\qquad \sigma_\vartheta^{(km)}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right)\equiv\left(\frac{\rho}{\ell}\right)^3\sigma_\vartheta^{(km)}(\rho,\vartheta)\,,$$

$$\sigma_\varphi^{(km)}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right)\equiv\left(\frac{\rho}{\ell}\right)^3\sigma_\varphi^{(km)}(\rho,\vartheta),\qquad \tau_{\vartheta\varphi}^{(km)}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right)\equiv\left(\frac{\rho}{\ell}\right)^3\tau_{\vartheta\varphi}^{(km)}(\rho,\vartheta)\,,$$
$$\nu=0.5\,,$$

$$u_\vartheta^{(km)}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\frac{\pi}{2}\right)\equiv\frac{\rho}{\ell}u_\vartheta^{(km)}\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right),\qquad k=1,2,\qquad m=0,1,\ldots \tag{36}$$

З огляду на розвинення (25), із (35), (36) безпосередньо випливає, що при перетворенні інверсії у випадку нестисливого матеріалу помножені на $\sqrt{\rho}$ переміщення u_ϑ, u_φ і помножені на $\sqrt{\rho^3}$ напруження σ_ϑ, σ_φ, $\tau_{\vartheta\varphi}$ є симетричними в усьому півпросторі:

$$\sqrt{\rho}u_\vartheta(\rho,\vartheta,\varphi)\equiv\frac{\ell}{\sqrt{\rho}}u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right),\qquad \sqrt{\rho}u_\varphi(\rho,\vartheta,\varphi)\equiv\frac{\ell}{\sqrt{\rho}}u_\varphi\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right),$$

$$\sqrt{\rho^3}\sigma_\vartheta(\rho,\vartheta,\varphi)\equiv\frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\sigma_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right),\qquad \sqrt{\rho^3}\sigma_\varphi(\rho,\vartheta,\varphi)\equiv\frac{\ell}{\sqrt{\rho^3}}\sigma_\varphi\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right),$$

$$\sqrt{\rho^3}\tau_{\vartheta\varphi}(\rho,\vartheta,\varphi)\equiv\frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\tau_{\vartheta\varphi}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right),\qquad \nu=0.5\,. \tag{37}$$

Для стисливого матеріалу ($\nu\neq0.5$) симетричними є лише помножені на $\sqrt{\rho}$ переміщення u_ϑ на межі півпростору:

$$\sqrt{\rho}u_\vartheta\left(\rho,\frac{\pi}{2},\varphi\right)\equiv\frac{\ell}{\sqrt{\rho}}u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{\rho},\frac{\pi}{2},\varphi\right). \tag{38}$$

Таким чином, у випадку симетричності функції $\sqrt{\rho^3}p(\rho,\varphi)$ (умова (30)) згідно з тотожностями (37), (38), симетричними є тільки деякі компоненти розв'язку задачі з крайовими умовами (1). Водночас, як випливає з рівностей (16), (29), (33), за умови (30) розв'язок задачі Неймана для гармонічної функції Φ_3 з крайовою умовою (7) задовольняє тотожності

$$\sqrt{\rho}\Phi_3(\rho,\vartheta,\varphi)\equiv\frac{\ell}{\sqrt{\rho}}\Phi_3\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right), \tag{39}$$

тобто функція $\sqrt{\rho}\Phi_3$ є симетричною в усьому півпросторі.

Покажемо, що тотожність (39) безпосередньо випливає із теореми Кельвіна про інверсію гармонічної функції [3]: якщо функція $\Phi_3(\rho, \vartheta, \varphi)$ є гармонічною, то функція $\Phi_3^*(\rho, \vartheta, \varphi) = \dfrac{\ell}{\rho}\Phi_3\left(\dfrac{\ell^2}{\rho}, \vartheta, \varphi\right)$ також є гармонічною. Дійсно, на підставі (7), (30) функція Φ_3^* задовольняє крайову умову

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi_3^*}{\partial \vartheta}\bigg|_{\vartheta=\pi/2} = p(\rho, \varphi). \tag{40}$$

Оскільки праві частини крайових умов (7), (40) збігаються, то із теореми єдиності розв'язку задачі Неймана випливає, що $\Phi_3^*(\rho, \vartheta, \varphi) \equiv \Phi_3(\rho, \vartheta, \varphi)$, тобто приходимо до тотожності (39).

2. Дотичне навантаження. Знайдемо розв'язок першої крайової задачі теорії пружності для півпростору у сферичних координатах у випадку заданих на межі півпростору дотичних напружень за відсутності нормальних напружень:

$$\frac{1}{2G}\tau_{\rho\vartheta}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = -q_\rho(\rho, \varphi), \qquad \frac{1}{2G}\tau_{\vartheta\varphi}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = -q_\varphi(\rho, \varphi), \qquad \sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2} = 0. \tag{41}$$

У декартових координатах крайові умови (41) запишемо у вигляді

$$\frac{1}{2G}\tau_{xz}\Big|_{z=0} = -q_x(x, y), \qquad \frac{1}{2G}\tau_{yz}\Big|_{z=0} = -q_y(x, y), \qquad \sigma_z\big|_{z=0} = 0, \tag{42}$$

при цьому

$$q_x(x, y) = q_\rho(\rho, \varphi)\cos\varphi - q_\varphi(\rho, \varphi)\sin\varphi,$$

$$q_y(x, y) = q_\rho(\rho, \varphi)\sin\varphi + q_\varphi(\rho, \varphi)\cos\varphi. \tag{43}$$

Услід за [2], зведемо задачу з крайовими умовами (42) до визначення двох гармонічних функцій із подання Папковича – Нейбера (2). Для цього розв'язок задачі будемо відшукувати у вигляді суми двох складових: $u_x = u_x^{(1)} + u_x^{(2)}$, ..., $\tau_{yz} = \tau_{yz}^{(1)} + \tau_{yz}^{(2)}$. Перша складова задовольнятиме перші дві з крайових умов (42):

$$\frac{1}{2G}\tau_{xz}^{(1)}\Big|_{z=0} = -q_x(x, y), \qquad \frac{1}{2G}\tau_{yz}^{(1)}\Big|_{z=0} = -q_y(x, y), \tag{44}$$

але не задовольнятиме третю з умов (42), замість чого накладатимемо іншу, більш зручну умову. Другу складову після визначення напружень $\sigma_z^{(1)}\big|_{z=0}$ знаходитимемо з крайових умов

$$\sigma_z^{(2)}\Big|_{z=0} = -\sigma_z^{(1)}\Big|_{z=0}, \qquad \tau_{xz}^{(2)}\Big|_{z=0} = 0, \qquad \tau_{yz}^{(2)}\Big|_{z=0} = 0. \tag{45}$$

Задача з крайовими умовами (45) розглянута в **п**. **1**. Згідно з (3),

$$\Phi_1^{(2)} \equiv 0, \qquad \Phi_2^{(2)} \equiv 0, \qquad \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial z} = (1-2\nu)\Phi_3^{(2)}, \tag{46}$$

тому

$$\Phi_1 = \Phi_1^{(1)}, \qquad \Phi_2 = \Phi_2^{(1)}, \qquad \Phi_3 = \Phi_3^{(1)} + \Phi_3^{(2)}, \qquad \Phi_0 = \Phi_0^{(1)} + \Phi_0^{(2)}. \tag{47}$$

Із подань (2) для першої складової розв'язку маємо напруження

$$\frac{1}{2G}\tau_{xz}^{(1)} = 2(1-\nu)\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + (1-2\nu)\frac{\partial \Phi_3^{(1)}}{\partial x} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + y\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + z\frac{\partial \Phi_3^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{2G}\tau_{yz}^{(1)}=2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}+(1-2\nu)\frac{\partial\Phi_3^{(1)}}{\partial y}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}+y\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}+z\frac{\partial\Phi_3^{(1)}}{\partial z}+\frac{\partial\Phi_0^{(1)}}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_z^{(1)}=2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_3^{(1)}}{\partial z}+2\nu\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right)-$$

$$-x\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}-y\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}-z\frac{\partial^2\Phi_3^{(1)}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\Phi_0^{(1)}}{\partial z^2}. \tag{48}$$

Покладемо

$$\Phi_0^{(1)}=-x\Phi_1-y\Phi_2-z\Phi_3^{(1)}-2(1-\nu)\int_z^\infty\Phi_3^{(1)}dz \tag{49}$$

за умови гармонічності цієї функції:

$$\frac{\partial\Phi_3^{(1)}}{\partial z}=-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}. \tag{50}$$

Це і є згадувана вище додаткова умова, яка випливає із рівностей

$$\nabla^2\Phi_0^{(1)}=0,\qquad \nabla^2\left(x\Phi_1+y\Phi_2+z\Phi_3^{(1)}\right)=2\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_3^{(1)}}{\partial z}\right),$$

$$\nabla^2\int_z^\infty\Phi_3^{(1)}\,dz=\int_z^\infty\left(\frac{\partial^2\Phi_3^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_3^{(1)}}{\partial y^2}\right)dz-\frac{\partial\Phi_3^{(1)}}{\partial z}=\int_z^\infty\nabla^2\Phi_3^{(1)}\,dz=0,$$

де ∇^2 – оператор Лапласа.

За умов (49), (50) напруження із (48) набувають вигляду

$$\frac{1}{2G}\tau_{xz}^{(1)}=2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_1}{\partial z},\qquad \frac{1}{2G}\tau_{yz}^{(1)}=2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_2}{\partial z},$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_z^{(1)}=2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_3^{(1)}}{\partial z}. \tag{51}$$

Отже, крайові умови (44) запишемо так:

$$2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-q_x(x,y),\qquad 2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-q_y(x,y). \tag{52}$$

Для другої складової розв'язку за умов (46) маємо

$$\frac{1}{2G}\sigma_z^{(2)}=\frac{\partial\Phi_3^{(2)}}{\partial z}-z\frac{\partial^2\Phi_3^{(2)}}{\partial z^2}. \tag{53}$$

Першу крайову умову (45) з урахуванням (51), (53) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial\Phi_3^{(2)}}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_3^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=0}. \tag{54}$$

Із умови (54) з огляду на однозначність розв'язності задачі Неймана випливає, що гармонічні функції $\Phi_3^{(2)}$, $\Phi_3^{(1)}$ пов'язані рівністю

$$\Phi_3^{(2)}=-2(1-\nu)\Phi_3^{(1)}. \tag{55}$$

Таким чином, перша крайова задача з крайовими умовами (42) звелася до визначення двох гармонічних функцій Φ_1, Φ_2 із крайових умов (52).

Інші дві гармонічні функції Φ_3, Φ_0 із подання розв'язку (2) визначаємо через функції Φ_1, Φ_2 із рівностей (46), (47), (49), (50), (55).

Запишемо крайові умови (52) у сферичних координатах:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\vartheta}\bigg|_{\vartheta=\pi/2} = q_j(\rho,\varphi), \qquad j = 1, 2, \tag{56}$$

$$q_1(\rho,\varphi) = \frac{1}{2(1-\nu)}q_x(x,y), \qquad q_2(\rho,\varphi) = \frac{1}{2(1-\nu)}q_y(x,y).$$

Для коефіцієнтів Фур'є $\Phi_j^{(km)}$ ($\Phi_j^{(k0)} = \Phi_j^{(0)}$) функцій Φ_j маємо крайові умови

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi_j^{(km)}}{\partial\vartheta}\bigg|_{\vartheta=\pi/2} = q_j^{(km)}(\rho), \qquad j,k = 1,2, \quad m = 0,1,\ldots \tag{57}$$

При цьому праві частини умов (57) виражаються через коефіцієнти Фур'є функцій $q_\rho(\rho,\varphi)$, $q_\varphi(\rho,\varphi)$ так:

$$q_j^{(km)}(\rho) = \frac{1}{4(1-\nu)}\hat{q}_j^{(km)}(\rho), \qquad q_j^{(k0)}(\rho) = q_j^{(0)}(\rho),$$

$$j,k = 1,2, \quad m = 0,1,\ldots,$$

$$\hat{q}_1^{(0)}(\rho) = q_\rho^{(11)}(\rho) - q_\varphi^{(21)}(\rho), \qquad \hat{q}_1^{(11)}(\rho) = 2q_\rho^{(0)}(\rho) + q_\rho^{(12)}(\rho) - q_\varphi^{(22)}(\rho),$$

$$\hat{q}_1^{(21)}(\rho) = q_\rho^{(22)}(\rho) + q_\varphi^{(12)}(\rho) - q_\varphi^{(0)}(\rho),$$

$$\hat{q}_1^{(km)}(\rho) = q_\rho^{(k,m-1)}(\rho) + q_\rho^{(k,m+1)}(\rho) - (-1)^k\left[q_\varphi^{(3-k,m-1)}(\rho) - q_\varphi^{(3-k,m+1)}(\rho)\right],$$

$$\hat{q}_2^{(0)}(\rho) = q_\rho^{(21)}(\rho) + q_\varphi^{(11)}(\rho), \qquad \hat{q}_2^{(11)}(\rho) = q_\rho^{(22)}(\rho) + 2q_\varphi^{(0)}(\rho) + q_\varphi^{(12)}(\rho),$$

$$\hat{q}_2^{(21)}(\rho) = 2q_\rho^{(0)}(\rho) - q_\rho^{(12)}(\rho) + q_\varphi^{(22)}(\rho),$$

$$\hat{q}_2^{(km)}(\rho) = (-1)^k\left[q_\rho^{(3-k,m-1)}(\rho) - q_\rho^{(3-k,m+1)}(\rho)\right] + q_\varphi^{(k,m-1)}(\rho) + q_\varphi^{(k,m+1)}(\rho),$$

$$k = 1,2, \quad m = 2,3,\ldots. \tag{58}$$

Скориставшись рівностями (11), (16), (20), за крайовими умовами (57) знаходимо

$$\Phi_j^{(km)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} B_j^{(km)}(s)P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\rho^{-s}\,ds, \qquad B_j^{(km)}(s) = a_m(s)\tilde{q}_j^{(km)}(s),$$

$$\tilde{q}_j^{(km)}(s) = \int_0^\infty q_j^{(km)}(\rho)\rho^s\,ds, \quad \tilde{q}_j^{(k0)}(s) = \tilde{q}_j^{(0)}(s), \quad j,k = 1,2, \quad m = 0,1,\ldots. \tag{59}$$

Знайдемо тепер функцію $\Phi_3^{(1)}$. Враховуючи рівняння (50) зв'язку між функціями $\Phi_3^{(1)}$, Φ_1, Φ_2, а також співвідношення (43), отримаємо крайові умови для функції $\dfrac{\partial\Phi_3^{(1)}}{\partial z}$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\partial\Phi_3^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{\vartheta=\pi/2} = q_3(\rho,\varphi), \qquad q_3(\rho,\varphi) = \frac{1}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial q_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}q_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial q_\varphi}{\partial\varphi}\right), \tag{60}$$

та для її коефіцієнтів Фур'є:

$$\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\partial\Phi_3^{(km)}}{\partial z}\right|_{\vartheta=\pi/2} = q_3^{(km)}(\rho), \qquad k=1,2, \qquad m=0,1,\ldots,$$

$$q_3^{(km)}(\rho) = -\frac{1}{2(1-\nu)}\left[\left(\frac{d}{d\rho}+\frac{1}{\rho}\right)q_\rho^{(km)}(\rho) - (-1)^k\,\frac{m}{\rho}\,q_\varphi^{(3-k,m)}(\rho)\right],$$

$$m=1,2,\ldots,$$

$$q_3^{(k0)}(\rho) = q_3^{(0)}(\rho) = -\frac{1}{2(1-\nu)}\left(\frac{d}{d\rho}+\frac{1}{\rho}\right)q_\rho^{(0)}(\rho), \qquad k=1,2. \tag{61}$$

Аналогічно до (59) отримаємо

$$\frac{\partial\Phi_3^{(km)}}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} C_{km}(s)P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\rho^{-s}\,ds, \qquad C_{km}(s) = a_m(s)\tilde{q}_3^{(km)}(s),$$

$$\tilde{q}_3^{(km)}(s) = \int\limits_0^\infty q_3^{(km)}(\rho)\rho^s\,ds, \qquad k=1,2, \qquad m=0,1,\ldots,$$

$$\tilde{q}_3^{(km)}(s) = \frac{1}{2(1-\nu)}\left[(s-1)\tilde{q}_\rho^{(km)}(s-1) + (-1)^k m\tilde{q}_\varphi^{(3-k,m)}(s-1)\right], \quad m=1,2,\ldots,$$

$$\tilde{q}_3^{(k0)}(s) = \tilde{q}_3^{(0)}(s) = \frac{1}{2(1-\nu)}(s-1)\tilde{q}_\rho^{(0)}(s-1), \qquad k=1,2. \tag{62}$$

Із першої з рівностей (62) аналогічно до (24) знаходимо

$$\Phi_3^{(km)} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{C_{km}(s)}{s-m-1}P_{s-2}^m(\cos\vartheta)\rho^{-s+1}\,ds,$$

$$\int\limits_z^\infty \Phi_3^{(km)}dz = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{C_{km}(s)}{(s-m-1)(s-m-2)}P_{s-3}^m(\cos\vartheta)\rho^{-s+2}\,ds,$$

$$k=1,2, \qquad m=0,1,\ldots \tag{63}$$

Врахувавши у поданні (2) залежності (46), (47), (49), (50), (55) між гармонічними функціями і перейшовши до сферичних координат, отримаємо переміщення

$$\frac{1}{2(1-\nu)}u_\rho = 2\Phi_\rho\sin\vartheta - (1-4\nu)\Phi_3^{(1)}\cos\vartheta +$$

$$+\rho\frac{\partial\Phi_3^{(1)}}{\partial\rho}\cos\vartheta + 2\nu\frac{\partial}{\partial\rho}\int\limits_z^\infty\Phi_3^{(1)}dz,$$

$$\frac{1}{2(1-\nu)}u_\vartheta = 2\Phi_\rho\cos\vartheta + (1-4\nu)\Phi_3^{(1)}\sin\vartheta +$$

$$+\frac{\partial\Phi_3^{(1)}}{\partial\vartheta}\cos\vartheta + 2\nu\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int\limits_z^\infty\Phi_3^{(1)}\,dz,$$

$$\frac{1}{2(1-\nu)}u_\varphi = 2\Phi_\varphi + \frac{\partial\Phi_3^{(1)}}{\partial\varphi}\operatorname{ctg}\vartheta + 2\nu\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int\limits_z^\infty\Phi_3^{(1)}dz,$$

$$\Phi_\rho = \Phi_1\cos\varphi + \Phi_2\sin\varphi, \qquad \Phi_\varphi = -\Phi_1\sin\varphi + \Phi_2\cos\varphi. \tag{64}$$

Коефіцієнти Фур'є функцій Φ_ρ, Φ_φ на підставі рівностей (58), (59), (64) знаходимо у вигляді

$$\Phi_\rho^{(0)} = \Phi_\rho^{(10)} + \Phi_\rho^{(20)}, \qquad \Phi_\varphi^{(0)} = \Phi_\varphi^{(10)} + \Phi_\varphi^{(20)},$$

$$\Phi_\rho^{(km)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{\Phi}_\rho^{(km)} \rho^{-s}\, ds, \qquad \Phi_\varphi^{(km)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{\Phi}_\varphi^{(km)} \rho^{-s}\, ds,$$

$$\tilde{\Phi}_\rho^{(km)} = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[(b_{m-1} + b_{m+1})\tilde{q}_\rho^{(km)} + (-1)^k (b_{m-1} - b_{m+1})\tilde{q}_\varphi^{(3-k,m)}\right],$$

$$\tilde{\Phi}_\varphi^{(km)} = \frac{1}{4(1-\nu)}\left[(-1)^{k+1}(b_{m-1} - b_{m+1})\tilde{q}_\rho^{(3-k,m)} + (b_{m-1} + b_{m+1})\tilde{q}_\varphi^{(km)}\right],$$

$$b_m = b_m(s,\vartheta) = a_m(s) P_{s-1}^m(\cos\vartheta), \qquad k = 1,2, \qquad m = 0,1,\ldots. \tag{65}$$

2. 1. Розглянемо випадок, коли на межі півпростору діє тільки радіальне дотичне навантаження (за відсутності колового дотичного навантаження), причому функція $\sqrt{\rho^3}\, q_\rho(\rho,\varphi)$ із першої крайової умови (41) є симетричною при перетворенні інверсії:

$$\sqrt{\rho^3}\, q_\rho(\rho,\varphi) \equiv \frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\, q_\rho\left(\frac{\ell^2}{\rho}, \varphi\right), \qquad q_\varphi(\rho,\varphi) \equiv 0. \tag{66}$$

Із (5), (64), зокрема, отримаємо

$$\tilde{u}_\rho^{(km)} = \frac{1}{2}\left\{[2m - s(1-s)]\frac{(s+m)(s-m-1)}{(s+m-1)(s-m)} P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\cos\vartheta - \right.$$

$$\left. - \frac{s(1-s) + 2m^2}{(s+m-1)(s-m)} P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta \right\} c_m(s)\tilde{q}_\rho^{(km)}(s),$$

$$\frac{1}{G}\tilde{\tau}_{\rho\vartheta}^{(km)} = -\left[(s+m)(s-m-1)\left(1 + \frac{m[s(1-s) - m + 1]}{(s+m-1)(s-m)}\operatorname{ctg}^2\vartheta\right)\times\right.$$

$$\times P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\sin\vartheta - \frac{s(1-s)[s(1-s) + m^2 + 1]}{(s+m-1)(s-m)}\times$$

$$\left.\times P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta\right] c_m(s)\tilde{q}_\rho^{(km)}(s),$$

$$\frac{1}{G}\tilde{\tau}_{\rho\varphi}^{(km)} = (-1)^k \frac{m}{(s+m-1)(s-m)}\{(s+m)(s-m-1)[s(1-s) - m + 1]\times$$

$$\times P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta + (m^2 - 1)P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\} c_m(s)\tilde{q}_\rho^{(3-k,m)}(s),$$

$$c_m(s) = \frac{\Gamma((s-m-1)/2)\Gamma(-(s+m)/2)}{2^{m+1}\sqrt{\pi}}, \qquad \nu = 0.5,$$

$$\tilde{u}_\rho^{(km)} = \frac{1}{4}\left[(1-\nu)s(1-s) + m^2\right] d_m(s)\tilde{q}_\rho^{(km)}(s), \qquad \vartheta = \frac{\pi}{2},$$

$$d_m(s) = \frac{\Gamma((s-m-1)/2)\Gamma(-(s+m)/2)}{\Gamma(1-(s+m-1)/2)\Gamma(1-(s-m)/2)}, \quad k = 1,2, \quad m = 0,1,\ldots. \tag{67}$$

Тут виписано тільки ті трансформанти коефіцієнтів Фур'є переміщень і напружень, які при заміні s на $1-s$, подібно до (34), залишаються незмінними з точністю до множника ℓ^{1-2s}. При цьому аналогічно до (33)

$$\tilde{q}_\rho^{(km)}(1-s) \equiv \ell^{1-2s}\tilde{q}_\rho^{(km)}(s), \qquad k = 1,2, \qquad m = 0,1,\ldots .$$

Із (67) аналогічно до (37) встановлюємо, що при перетворенні інверсії для нестисливого матеріалу помножені на $\sqrt{\rho}$ переміщення u_ρ і помножені на $\sqrt{\rho^3}$ напруження $\tau_{\rho\vartheta}$, $\tau_{\rho\varphi}$ є симетричними в усьому півпросторі:

$$\sqrt{\rho}\, u_\rho(\rho,\vartheta,\varphi) \equiv \frac{\ell}{\sqrt{\rho}}\, u_\rho\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right),$$

$$\sqrt{\rho^3}\, \tau_{\rho\vartheta}(\rho,\vartheta,\varphi) \equiv \frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\, \tau_{\rho\vartheta}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right),$$

$$\sqrt{\rho^3}\, \tau_{\rho\varphi}(\rho,\vartheta,\varphi) \equiv \frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\, \tau_{\rho\varphi}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta,\varphi\right), \qquad \nu = 0.5\,. \tag{68}$$

Для стисливого матеріалу ($\nu \ne 0.5$) симетричними є помножені на $\sqrt{\rho}$ переміщення u_ρ на межі півпростору:

$$\sqrt{\rho}\, u_\rho\left(\rho,\frac{\pi}{2},\varphi\right) \equiv \frac{\ell}{\sqrt{\rho}}\, u_\rho\left(\frac{\ell^2}{\rho},\frac{\pi}{2},\varphi\right). \tag{69}$$

2. 2. Тепер розглянемо випадок дії тільки колового дотичного навантаження (за відсутності радіального дотичного навантаження), коли функція $\sqrt{\rho^3}\, q_\varphi(\rho,\varphi)$ з другої крайової умови (41) є симетричною при перетворенні інверсії:

$$\sqrt{\rho^3}\, q_\varphi(\rho,\varphi) \equiv \frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\, q_\varphi\left(\frac{\ell^2}{\rho},\varphi\right), \qquad q_\rho(\rho,\varphi) \equiv 0\,. \tag{70}$$

Із (5), (64) отримаємо

$$\tilde{u}_\vartheta^{(km)} = \frac{(-1)^{k+1}}{2}\left(m(m-2)\frac{(s+m)(s-m-1)}{(s+m-1)(s-m)}\, P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta - \right.$$

$$\left. - \frac{2s(1-s)+m(2m-1)}{(s+m-1)(s-m)}\, P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\right) c_m(s)\tilde{q}_\varphi^{(3-k,m)}(s)\,,$$

$$\tilde{u}_\varphi^{(km)} = \frac{1}{2}\left(m(m+2)\frac{(s+m)(s-m-1)}{(s+m-1)(s-m)}\, P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta - \right.$$

$$\left. - \frac{2s(1-s)+3m^2}{(s+m-1)(s-m)}\, P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\right) c_m(s)\tilde{q}_\varphi^{(k,m)}(s)\,,$$

$$\frac{1}{2G}\,\tilde{\sigma}_\vartheta^{(km)} = (-1)^{k+1}\,\frac{m\cos\vartheta}{(s+m-1)(s-m)}\left\{(s+m)(s-m-1)\left[s(1-s)+\right.\right.$$

$$\left. + 2(m-1)+(m-1)(m-2)\operatorname{cosec}^2\vartheta\right]P_{s-1}^m(\cos\vartheta) +$$

$$\left. + \left[3s(1-s)+2(m^2-1)\right]P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta\right\} c_m(s)\tilde{q}_\varphi^{(3-k,m)}(s)\,,$$

$$\frac{1}{2G}\,\tilde{\sigma}_\varphi^{(km)} = (-1)^{k}\,\frac{m\operatorname{cosec}\vartheta}{(s+m-1)(s-m)}\left\{(m-1)(m-2)(s+m)(s-m-1)\times\right.$$

$$\times P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta + \left[3s(1-s)+2(m^2-1)\right]\times$$

$$\left. \times P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\right\} c_m(s)\tilde{q}_\varphi^{(3-k,m)}(s)\,,$$

$$\frac{1}{G}\tilde{\tau}_{\vartheta\varphi}^{(km)} = -\left[(s+m)(s-m-1)\left(1+\frac{m^2(m-2)}{(s+m-1)(s-m)}\operatorname{ctg}^2\vartheta\right)P_{s-1}^{m}(\cos\vartheta) - \right.$$

$$\left. - \frac{m^2[s(1-s)+m^2-2]}{(s+m-1)(s-m)}P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta\right]c_m(s)\tilde{q}_{\varphi}^{(km)}(s),$$

$$\nu = 0.5,$$

$$\tilde{u}_{\varphi}^{(km)} = \frac{1}{4}\left[s(1-s)+(1-\nu)m^2\right]d_m(s)\tilde{q}_{\varphi}^{(km)}(s),$$

$$\frac{1}{2G}\tilde{\sigma}_{\varphi}^{(km)} = (-1)^{k+1}\frac{m}{4}\left[(1+\nu)s(1-s)+m^2-1\right]d_m(s)\tilde{q}_{\varphi}^{(3-k,m)}(s), \qquad \vartheta = \frac{\pi}{2},$$

$$k = 1,2, \qquad m = 0,1,\ldots. \tag{71}$$

Тільки вказані тут трансформанти при заміні s на $1-s$ після множення на ℓ^{1-2s} переходять самі в себе. При цьому

$$\tilde{q}_{\varphi}^{(km)}(1-s) \equiv \ell^{1-2s}\tilde{q}_{\varphi}^{(km)}(s), \qquad k = 1,2, \qquad m = 0,1,\ldots.$$

Із (71) випливає, що для нестисливого матеріалу помножені на $\sqrt{\rho}$ переміщення u_ϑ, u_φ і помножені на $\sqrt{\rho^3}$ напруження σ_ϑ, σ_φ, $\tau_{\vartheta\varphi}$ є симетричними в усьому півпросторі, тобто виконуються тотожності (37), як і у випадку нормального навантаження. Для стисливого матеріалу ($\nu \ne 0.5$) симетричними є помножені на $\sqrt{\rho}$ переміщення u_φ і помножені на $\sqrt{\rho^3}$ напруження σ_φ на межі півпростору:

$$\sqrt{\rho}\,u_\varphi\left(\rho,\frac{\pi}{2},\varphi\right) \equiv \frac{\ell}{\sqrt{\rho}}u_\varphi\left(\frac{\ell^2}{\rho},\frac{\pi}{2},\varphi\right),$$

$$\sqrt{\rho^3}\,\sigma_\varphi\left(\rho,\frac{\pi}{2},\varphi\right) \equiv \frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\sigma_\varphi\left(\frac{\ell^2}{\rho},\frac{\pi}{2},\varphi\right). \tag{72}$$

Висновки. Для першої крайової задачі теорії пружності для півпростору встановлено, що у випадку, коли одна з крайових умов має симетрію інверсії, а дві інші є однорідними, симетрію інверсії мають також тільки деякі компоненти розв'язку, на відміну від задачі Неймана теорії потенціалу, розв'язок якої цілком має таку симетрію у випадку симетричності крайової умови. Для нестисливого матеріалу симетричними в усьому півпросторі є помножені на $\sqrt{\rho}$ окремі компоненти вектора переміщень і помножені на $\sqrt{\rho^3}$ деякі компоненти тензора напружень. Для стисливого матеріалу симетрію інверсії мають деякі компоненти розв'язку тільки на межі півпростору.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – Т. 1. – Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
3. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. – Москва: Мир, 1964. – 659 с.

   То же: *Milne-Thomson L. M.* Theoretical hydrodynamics. – London: Macmillan, 1955. – xxi +632 p.
4. *Некислих К. М., Острик В. І.* Розклинювання пружного клина // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 3. – С. 91–96.
5. *Острик В. І.* Контактна механіка: Підруч. – Київ: ВПЦ «Київ. ун-т», 2015. – 560 с.

6. *Острик В. І.* Симетрія інверсії розв'язків основних крайових задач двовимірної теорії пружності для клина // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – **60**, № 4. – С. 90–110.
7. *Острик В. І., Щокотова О. М.* Ковзний контакт штампа з пружним клином // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47,** № 4. – С. 82–91.
   Те саме: *Ostryk V. I., Shchokotova O. M.* Sliding contact of a punch with elastic wedge // Mater. Sci. – 2012. – **47**, No. 4. – P. 514–526.
   – https://doi.org/10.1007/s11003-012-9423-z.
8. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. – Ленинград – Москва: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
9. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
10. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.

СИММЕТРИЯ ИНВЕРСИИ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

С применением интегрального преобразования Меллина получено решение первой краевой задачи теории упругости для полупространства в сферических координатах в случаях, когда одно из граничных условий является неоднородным и имеет симметрию инверсии, а два других – однородны. Показано, что отдельные компоненты решения также имеют симметрию инверсии.

Ключевые слова: *симметрия инверсии, упругое полупространство, сферические координаты, гармонические функции, интеграл Меллина.*

THE INVERSION SYMMETRY OF SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM OF ELASTIC THEORY FOR A HALF-SPACE

Using the Mellin integral transformation, solution of the first boundary value problem of elastic theory for a half-space in spherical coordinates is obtained in cases, when one non-homogeneous boundary condition has inversion symmetry, while two other conditions is homogeneous. It is shown that separate components of solution also have the inversion symmetry.

Key words: *inversion symmetry, elastic half-space, spherical coordinates, harmonic functions, Mellin integral.*

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ

Одержано
21.02.19