УДК 536.21

А. П. Янковский✉

КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСА КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН, ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. I. ОБЩИЕ ДВУМЕРНЫЕ ТЕОРИИ

На основе использования вариационных принципов рассмотрены два подхода к получению двумерных уравнений теории стационарной теплопроводности композитных пластин. Температура пластин аппроксимируется полиномом по поперечной координате с неизвестными коэффициентами разложения. В рамках первого подхода тепловые граничные условия на лицевых поверхностях пластин не учитываются, но получающиеся двумерные уравнения Эйлера и соответствующие им граничные условия на кромках являются согласованными с теплофизической точки зрения, так как согласно этим уравнениям для любой подобласти пластины и всей конструкции в целом выполняется уравнение теплового баланса. В рамках второго подхода учитываются тепловые граничные условия на лицевых поверхностях. Последнее обстоятельство приводит к необходимости введения неопределенных множителей Лагранжа, т. е. к решению вариационной задачи на условный экстремум. Показано, что получающиеся при этом двумерные уравнения Эйлера и соответствующие им граничные условия на кромках являются несогласованными (противоречивыми) с теплофизической точки зрения, так как для произвольной подобласти пластины и всей конструкции в целом не выполняется уравнение теплового баланса.

***Ключевые слова**: композитные пластины, теория теплопроводности, уравнение теплового баланса, методы понижения размерности, вариационные принципы, метод взвешенных невязок.*

Эффективность использования композиционных материалов (КМ) – сочетание относительной легкости с достаточно высокой прочностью – наиболее ярко проявляется в тонкостенных конструкциях типа пластин и оболочек, которые часто подвергаются интенсивному тепловому воздействию [1]. Следовательно, актуальной является проблема адекватного определения тепловых и температурных полей в таких КМ-конструкциях, потому что они могут оказывать существенное влияние на механическое поведение соответствующих изделий. Определение теплового состояния тонкостенных КМ-конструкций в пространственной постановке на основе прямого численного моделирования (МКР, МКЭ) хоть и является желательным [10, 12, 15], но в силу их относительной тонкости не всегда является эффективными. Поэтому при изучении термомеханического поведения пластин и оболочек, как правило, стремятся понизить размерность соответствующих механических и тепловых краевых задач, переходя от трехмерных пространственных уравнений к двумерным. Это приводит к существенному упрощению инженерных методик расчета соответствующих КМ-изделий. Для понижения размерности краевых задач теории теплопроводности пластин и оболочек используют асимптотические методы [3, 13, 14] (в качестве малого параметра при этом выступает относительная толщина конструкции), метод начальных функций [7], метод дополнительных граничных условий [4] или вводят различные гипотезы об особенностях распределения температурного поля по толщине КМ-конструкции [5, 6, 16] (чаще всего предполагается линейное распределение температуры в поперечном направлении тонкостенной конструкции). В последнем случае основная трудность заключается в корректном определении двумерных тепловых факторов (сопряженных неизвестным коэффициентам в выбранных разложениях температуры по по-

✉ yankovsky_ap@rambler.ru

перечной координате), получении теплофизически согласованных (непротиворечивых) уравнений теплового баланса и граничных условий для них. Для вывода двумерных уравнений теплового баланса пластин и оболочек из трехмерных уравнений используют метод взвешенных невязок [7] (обобщенный метод Галеркина [1]), когда в качестве весовых функций выбирают базисные функции разложения температуры по поперечной координате либо вариационные принципы [2, 5, 6]. Вариационный подход привлекателен еще и потому, что на его основе можно разрабатывать двумерные конечные элементы [1, 10]. Однако некорректное использование вариационных принципов может привести к получению двумерных уравнений Эйлера и соответствующих им граничных условий на кромках, не согласованных с основными положениями теории теплопроводности твердых тел. Как будет показано ниже, таким недостатком обладают теории, предложенные в [5, 6].

В связи с изложенным выше предлагаемая работа посвящена построению с разной степенью точности двумерных стационарных уравнений теплового баланса КМ-пластин на основе использования вариационных принципов теории теплопроводности и метода взвешенных невязок, а также критическому анализу получающихся двумерных уравнений и соответствующих им граничных условий.

1. **Исходные уравнения теории теплопроводности анизотропных твердых тел**. Для простоты изложения рассматриваем КМ-пластину постоянной толщины $2h$, материал которой обладает анизотропией общего вида. Например, это может быть пространственно армированный КМ (рис. 1) [9]. С пластиной свяжем декартову прямоугольную систему координат Ox_i, $i = 1, 2, 3$, причем ось Ox_3 направим по толщине конструкции, а отсчетную плоскость Ox_1x_2 ($x_3 = 0$) совместим со срединной плоскостью пластины.

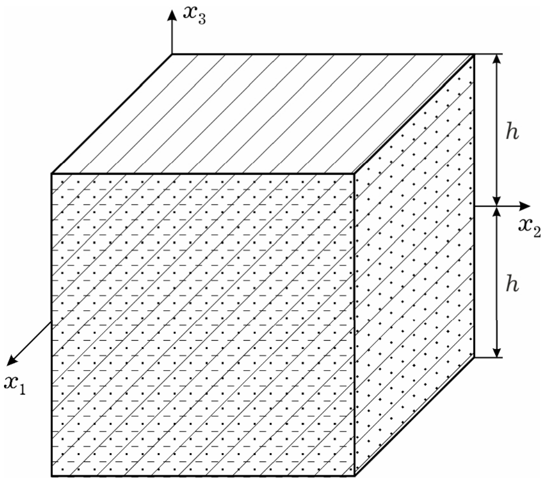

Рис. 1. Элемент КМ-пластины с пространственной 3D-структурой армирования.

Стационарное тепловое состояние такой конструкции в трехмерной постановке описывается следующими уравнениями и соотношениями [7, 11] :

– *законом теплопроводности Фурье*

$$q_i(\mathbf{r}) = -\sum_{j=1}^{3} æ_{ij} T_{,j}(\mathbf{r}), \qquad i = 1, 2, 3, \qquad \mathbf{r} \in V, \qquad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}; \tag{1}$$

– *уравнением теплового баланса*

$$\sum_{i=1}^{3} q_{i,i} - w(\mathbf{r}) = 0, \qquad \mathbf{r} \in V; \tag{2}$$

– *граничными условиями* II *и/или* III *рода на лицевых поверхностях* $A^{(\pm)}$

$$\pm q_3(\rho) = q_n^{(\pm)}(\xi) + \alpha^{(\pm)}(T(\rho) - T_\infty^{(\pm)}),$$

$$\rho \in A^{(\pm)}, \qquad \xi \in G, \qquad x_3 = \pm h, \qquad \xi = \{x_1, x_2\}; \tag{3}$$

– *граничными условиями* II *и/или* III *рода на части торцевой поверхности* A_q

$$q_1(\rho)n_1 + q_2(\rho)n_2 = q_n(\rho) + \alpha_q(T(\rho) - T_\infty), \qquad \rho \in A_q; \tag{4}$$

– *граничными условиями* I *рода на части торцевой поверхности* A_T

$$T(\rho) = T_*(\rho), \qquad \rho \in A_T. \tag{5}$$

Здесь T – температура пластины; q_i – компоненты вектора плотности теплового потока; $\varkappa_{ij}$ – компоненты тензора теплопроводности материала пластины; w – плотность мощности внутренних источников тепла; $q_n^{(\pm)}$ – заданный тепловой поток через лицевую поверхность $A^{(\pm)}$ ($x_3 = \pm h$); q_n – заданный тепловой поток на торцевой поверхности A_q ($q_n^{(\pm)}$ и q_n считаются положительными, если направлены в сторону внешней нормали к поверхности); $T_\infty^{(\pm)}$ – температура окружающей среды со стороны поверхности $A^{(\pm)}$; T_∞ – температура окружающей среды со стороны поверхности A_q; $\alpha^{(\pm)}$ – коэффициент теплоотдачи на поверхности $A^{(\pm)}$; α_q – коэффициент теплоотдачи на поверхности A_q; T_* – заданная температура на торцевой поверхности A_T; n_i – компоненты единичного вектора внешней нормали к ограничивающей поверхности (на торцевой поверхности $n_3 = 0$); V – объем, занимаемый конструкцией; G – область, занимаемая пластиной в плане; индекс после запятой – дифференцирование по переменной x_i, $i = 1, 2, 3$. В настоящем исследовании мнимые индексы не используются.

Как уже отмечалось во введении, для понижения размерности задачи теплопроводности КМ-пластин используют вариационные принципы [5, 6], в частности, принцип «наименьшего теплового рассеяния», согласно которому вариация функционала

$$\delta L = 0, \tag{6}$$

где

$$L \equiv \iiint_V D\, dV + \iiint_V wT\, dV - \sum_{i=1}^{3} \oiint_{\bar{A}_q} q_i n_i T\, dA, \tag{7}$$

D – удельная тепловая диссипация:

$$D \equiv -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \varkappa_{ij} T_{,i} T_{,j},$$

причем (см. (1))

$$q_i = \frac{\partial D}{\partial T_{,i}}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{8}$$

$\bar{A}_q$ – часть поверхности тела A, на которой заданы граничные условия, отличные от условий I рода (отличные от (5)): $\bar{A}_q = A_q \cup A^{(+)} \cup A^{(-)}$. Согласно (5), (6) и (8), на торцевой поверхности A_T вариация температуры

$$\delta T(\rho) = 0, \qquad \rho \in A_T, \tag{9}$$

поэтому соответствующее слагаемое в (7) не выписано.

Так как рассматриваемое тело является пластиной постоянной толщины $2h$, интегралы в выражении (7) можно преобразовать следующим образом:

$$\iiint_V \Phi(\mathbf{r})\,dV = \iint_G \left(\int_{-h}^{h} \Phi(\mathbf{r})\,dx_3 \right) dS,$$

$$\iint_{\bar{A}_q} \Phi(\mathbf{r})\,dA = \iint_G \Phi(\mathbf{r})\big|_{x_3=h}\,dS + \iint_G \Phi(\mathbf{r})\big|_{x_3=-h}\,dS +$$

$$+ \oint_{\Gamma_q} \left(\int_{-h}^{h} \Phi(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_q}\,dx_3 \right) d\Gamma, \qquad dS = dx_1 dx_2, \tag{10}$$

где Γ_q – проекция торцевой поверхности A_q на срединную плоскость пластины (часть контура Γ, ограничивающего область G); $d\Gamma$ – элемент длины контура Γ; Φ – условное обозначение для подынтегральных функций в равенстве (7).

2. **Двумерные теории теплопроводности пластин**, **не учитывающие граничные условия на лицевых поверхностях**. Согласно наиболее распространенной идее понижения размерности задач для тонкостенных элементов конструкций, аппроксимируем температуру пластины в виде частичных сумм степенного ряда по поперечной координате x_3:

$$T(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{K} T_k(\mathbf{x})\,x_3^k, \qquad \mathbf{x}\in G, \qquad |x_3| \le h, \tag{11}$$

где $T_k(\mathbf{x})$ – коэффициенты разложений, подлежащие в дальнейшем определению и зависящие только от двух пространственных переменных x_1 и x_2. (Возможно разложение температуры и по другим базисным функциям от переменной x_3, отличным от x_3^k, например по тригонометрическим функциям [7] или полиномам Лежандра. Это не принципиально.)

На основании (11) вариация температуры имеет следующий вид:

$$\delta T(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{K} \delta T_k(\mathbf{x})\,x_3^k, \qquad \mathbf{x}\in G, \qquad |x_3| \le h. \tag{12}$$

Подставив выражения (7) в вариационное уравнение (6) с учетом равенства (8), получим

$$\iiint_V \sum_{i=1}^{3} q_i\,\delta T_{,i}\,dV + \iiint_V w\,\delta T\,dV - \oiint_{\bar{A}_q} \sum_{i=1}^{3} q_i n_i\,\delta T\,dA = 0. \tag{13}$$

После подстановки разложения (12) в равенство (13) при учете представлений (10) будем иметь

$$\iiint_V \left(\sum_{i=1}^{2} q_i \sum_{k=0}^{K} \delta T_{k,i}\,x_3^k + q_3 \sum_{k=1}^{K} k\,\delta T_k\,x_3^{k-1} \right) dV = -\iiint_V w \sum_{k=0}^{K} \delta T_k\,x_3^k\,dV +$$

$$+ \iint_G \left[q_3\big|_{x_3=h} \sum_{k=0}^{K} \delta T_k h^k - q_3\big|_{x_3=-h} \sum_{k=0}^{K} \delta T_k (-h)^k \right] dS +$$

$$+ \oint_{\Gamma} \left(\int_{-h}^{h} \sum_{i=1}^{2} q_i n_i \sum_{k=0}^{K} \delta T_k\,x_3^k\,dx_3 \right) d\Gamma. \tag{14}$$

В последнем (контурном) интеграле необходимо учесть равенства (9) и (12).

Введем в рассмотрение следующие интегралы, которые по аналогии с механическими теориями пластин [1, 16] назовем «тепловыми факторами»:

$$Q_i^{(k)}(\xi) = \int_{-h}^{h} q_i(\rho) x_3^k \, dx_3 \,,$$

$$W_q^{(k)}(\xi) = W^{(k)}(\xi) - h^k \left(q_3^{(+)}(\xi) - (-1)^k q_3^{(-)}(\xi)\right),$$

$$W^{(k)}(\xi) = \int_{-h}^{h} w(\rho) x_3^k \, dx_3 , \qquad \xi \in G \,,$$

$$Q^{(k)}(\xi) = \int_{-h}^{h} \bar{q}_n(\rho) x_3^k \, dx_3 , \qquad \rho \in A_q , \quad \xi \in \Gamma_q \,,$$

$$i = 1, 2, 3, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \,, \tag{15}$$

где $q_3^{(\pm)}(\xi) \equiv q_3(\xi, \pm h)$, причем значения $q_3(\xi, \pm h)$ определяются граничными условиями (3); $\bar{q}_n(\rho)$ задается правой частью в (4). Согласно (15), $Q_i^{(0)}$ – суммарные по толщине пластины компоненты вектора теплового потока в тангенциальных направлениях x_i, $i = 1, 2$; $W^{(0)}$ – плотность мощности производства (стока) тепла в элементе пластины объемом $2h\, dx_1 dx_2$; $Q^{(0)}$ – плотность суммарного по толщине пластины теплового потока через торцевую поверхность с элементом площади $2h\, d\Gamma$. Остальные величины, введенные равенствами (15), – это математические моменты высших порядков от тепловых потоков и плотности мощности внутренних источников тепла.

Используя формулу Гаусса, левую часть равенства (14), которую обозначим как I_1, при учете обозначений (15) можем преобразовать к виду

$$I_1 = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} , \tag{16}$$

где

$$I_1^{(1)} \equiv \sum_{k=0}^{K} \iiint_V \sum_{i=1}^{2} q_i \delta T_{k,i} x_3^k \, dV = \sum_{k=0}^{K} \iint_G \sum_{i=1}^{2} Q_i^{(k)} \delta T_{k,i} \, dS =$$

$$= \sum_{k=0}^{K} \sum_{i=1}^{2} \left(\oint_\Gamma Q_i^{(k)} n_i \delta T_k \, d\Gamma - \iint_G Q_{i,i}^{(k)} \delta T_k \, dS \right),$$

$$I_1^{(2)} \equiv \sum_{k=1}^{K} \iiint_V k q_3 x_3^{k-1} \delta T_k \, dV = \sum_{k=1}^{K} \iint_G k Q_3^{(k-1)} \delta T_k \, dS \,. \tag{17}$$

Вариационное равенство (14) при учете обозначений (15) запишем так:

$$I_1 = -I_2 + I_3 , \tag{18}$$

где

$$I_2 \equiv \sum_{k=0}^{K} \iint_G W_q^{(k)} \delta T_k \, dS , \qquad I_3 \equiv \sum_{k=0}^{K} \oint_\Gamma Q^{(k)} \delta T_k \, d\Gamma . \tag{19}$$

Подставим в уравнение (18) выражения (16) при учете (17), (19) и приравняем коэффициенты при произвольных вариациях $\delta T_k(\xi)$, тогда на основе вариационного принципа (13) получим систему двумерных *уравнений теплового баланса* пластины

$$-Q_{1,1}^{(k)} - Q_{2,2}^{(k)} + k Q_3^{(k-1)} = -W_q^{(k)}(\xi), \qquad \xi \in G, \qquad k = 0, 1, \ldots, K \,, \tag{20}$$

и соответствующие им *тепловые*

$$Q_1^{(k)} n_1 + Q_2^{(k)} n_2 = Q^{(k)}(\mathrm{x}), \qquad \mathrm{x} \in \Gamma_q, \qquad k = 0, 1, \ldots, K, \tag{21}$$

и *температурные*

$$T_k(\mathrm{x}) = T_k^*(\mathrm{x}), \qquad \mathrm{x} \in \Gamma_T, \qquad k = 0, 1, \ldots, K, \tag{22}$$

граничные условия, заданные на кромке. Здесь Γ_T – часть контура Γ, на которой заданы температурные граничные условия, – проекция торцевой поверхности A_T (см. (5) и (9)) на отсчетную плоскость, причем $\Gamma = \Gamma_q \cup \Gamma_T$; T_k^* – коэффициенты разложения известной функции T_* в (5) в виде полинома (11).

Отметим, что уравнения (20) и граничные условия (21) при учете обозначений (15) могут быть получены и методом взвешенных невязок, т. е. путем умножения исходного уравнения теплового баланса (2) и тепловых граничных условий (4) на функцию x_3^k (которая и является весовой) и последующего интегрирования результата по толщине пластины при использовании формулы интегрирования по частям.

Проинтегрируем уравнение (20) при $k = 0$ по произвольной подобласти $\tilde{G} \subset G$, ограниченной контуром $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$. Тогда при учете тепловых граничных условий на $\tilde{\Gamma}$, аналогичных (21) при $k = 0$, применяя формулу Гаусса, получим

$$\iint_{\tilde{G}} \left(Q_{1,1}^{(0)} + Q_{2,2}^{(0)} - W_q^{(0)}\right) dS = \oint_{\tilde{\Gamma}} \left(Q_1^{(0)} n_1 + Q_2^{(0)} n_2\right) d\tilde{\Gamma} - \iint_{\tilde{G}} W_q^{(0)}\, dS =$$

$$= \oint_{\tilde{\Gamma}} Q^{(0)} d\tilde{\Gamma} - \iint_{\tilde{G}} W_q^{(0)}\, dS = 0. \tag{23}$$

Согласно обозначениям (15), из последнего равенства в цепочке соотношений (23) вытекает уравнение теплового баланса (закон сохранения энергии) в осредненных по толщине пластины величинах для произвольной подобласти $\tilde{G} \subset G$ и всей конструкции ($\tilde{G} = G$). Это уравнение баланса вытекает непосредственно и из дифференциального уравнения (2) при интегрировании его по толщине пластины с учетом граничных условий на лицевых поверхностях (3) и граничных условий (аналогичных (4)) на торцевой поверхности $\tilde{A}_q$ выделенной из пластины подобласти, т. е. равенство (23) получается из (2)–(4) методом взвешенных невязок при использовании весовой функции $x_3^0 = 1$ и обозначений (15).

Таким образом, двумерные уравнения (20) и граничные условия (21), полученные для пластины на основе вариационного принципа (13) при учете конечного разложения (11), являются согласованными (непротиворечивыми) с теплофизической точки зрения, поэтому равенства (20) вполне обоснованно можно называть уравнениями теплового баланса элемента пластины, а соотношения (21) – тепловыми граничными условиями на кромке, записанными в тепловых факторах.

Если в соотношения закона Фурье (1) подставить разложение для температуры (11), а затем по формулам (15) вычислить тепловые факторы $Q_i^{(k)}$, $W_q^{(k)}$, $Q^{(k)}$ и подставить их в уравнения теплового баланса пластины (20) и тепловые граничные условия (21), то при учете (22) получим замкнутую систему разрешающих уравнений и соответствующие ей граничные условия в коэффициентах разложения температуры $T_k(\mathrm{x})$, $0 \le k \le K$. Исследование вопросов, связанных с корректностью постановки возникающей при этом краевой задачи, выходит за рамки данного исследования.

Недостатком рассмотренного подхода к понижению размерности теплофизической задачи для пластины является следующее обстоятельство. Несмотря на то, что система разрешающих уравнений является замкнутой, на лицевых поверхностях пластины $A^{(\pm)}$ $(x_3 = \pm h)$ тепловые граничные условия (3) при этом не выполняются. Тепловые потоки $q_3^{(\pm)}$, поступающие в конструкцию через эти поверхности, учитываются лишь в двумерных уравнениях теплового баланса пластины (20), так как входят в источниковый член $W_q^{(k)}$ (см. (15)).

3. **Теории**, **получаемые методом взвешенных невязок и учитывающие тепловые граничные условия на лицевых поверхностях**. Потребность удовлетворения тепловых граничных условий (3) приводит к возникновению дополнительных связей, накладываемых на неизвестные коэффициенты разложения температуры $T_k(\mathrm{x})$, $0 \le k \le K$ (см. (11)). Действительно, подставив разложения (11) в соотношения закона Фурье (1), а результат – в граничные условия на лицевых поверхностях (3), получим

$$\mp \sum_{k=0}^{K} (\text{æ}_{31}^{(\pm)} T_{k,1} + \text{æ}_{32}^{(\pm)} T_{k,2})(\pm h)^k \mp \text{æ}_{33}^{(\pm)} \sum_{k=1}^{K} k T_k(\mathrm{x})(\pm h)^{k-1} -$$

$$- \alpha^{(\pm)} \sum_{k=0}^{K} T_k(\mathrm{x})(\pm h)^k = q_n^{(\pm)}(\mathrm{x}) - \alpha^{(\pm)} T_\infty^{(\pm)}, \qquad \mathrm{x} \in G, \tag{24}$$

где

$$\text{æ}_{3i}^{(\pm)}(\mathrm{x}) \equiv \text{æ}_{3i}(\mathrm{x}, \pm h), \qquad \mathrm{x} \in G, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{25}$$

Равенства (25) необходимо учитывать в том случае, когда материал пластины неоднороден по ее толщине, в частности, когда он является термочувствительным.

Чтобы система двумерных разрешающих уравнений при обязательном выполнении равенств (24) была замкнута относительно функций $T_k(\mathrm{x})$, необходимо отказаться от двух «лишних» уравнений в системе (20). При этом естественно пренебречь уравнениями (20) для наибольших значений индекса $k = K - 1$ и $k = K$ (т.е. пренебречь тепловым балансом моментов $Q_i^{(k)}$ наивысших порядков). Поэтому в (20) и (21) необходимо учесть, что $k = 0, 1, \ldots, K - 2$.

Так как при $K \ge 2$ в этом случае равенство (23) по-прежнему выполняется, то в соответствующих теориях выполняется и условие теплового баланса для любой произвольной подобласти пластины и для всей конструкции. Следовательно, теории теплопроводности пластин, построенные на базе двумерных уравнений (20) и (24) (при $0 \le k \le K - 2$), полученных методом взвешенных невязок, являются согласованными (непротиворечивыми) с теплофизической точки зрения. Отметим, что в этом случае при $K = 2$ (параболическое распределение температуры по толщине конструкции (см. (11)) получаются уравнения, которые полностью соответствуют реализации простейшего варианта метода дополнительных граничных условий [4].

4. **Теории типа Бабина – Немировского**. В работах [5, 6] предлагается получать двумерные уравнения теплового баланса для тонкостенных элементов композитных конструкций на основе вариационных принципов теории теплопроводности при обязательном учете граничных условий (24). Покажем, что такой подход приводит к двумерным уравнениям Эйлера, несогласованным (противоречивым) с теплофизической точки зрения.

По-прежнему предполагаем, что температура аппроксимируется разложением (11) и обязательно учитываются тепловые граничные условия на лицевых поверхностях пластины (24), которые перепишем в виде ограничений:

$$F^{(\pm)}(\xi,\Theta) \equiv q_n^{(\pm)}(\xi) - \alpha^{(\pm)}T_\infty^{(\pm)} \pm \sum_{k=0}^{K}(\kappa_{31}^{(\pm)}T_{k,1}+\kappa_{32}^{(\pm)}T_{k,2})(\pm h)^k \pm$$
$$\pm\,\kappa_{33}^{(\pm)}\sum_{k=1}^{K}kT_k(\xi)(\pm h)^{k-1}+\alpha^{(\pm)}\sum_{k=0}^{K}T_k(\xi)(\pm h)^k = 0,$$
$$\xi\in G, \qquad (26)$$

где

$$\Theta(\xi) \equiv \{T_0(\xi), T_1(\xi), \ldots, T_K(\xi)\}. \qquad (27)$$

Как и в работах [5, 6], считаем, что разложение (11) аппроксимирует истинную температуру, т. е. удовлетворяет вариационному уравнению (6) (при учете (7), (8)) и дифференциальным связям (26), заданным на лицевых поверхностях пластины. Следовательно, получаем вариационную задачу на условный экстремум. Согласно методу неопределенных множителей Лагранжа, эта задача эквивалентна вариационному уравнению

$$\delta\tilde{L} = 0, \qquad (28)$$

где расширенный функционал определяется так:

$$\tilde{L} \equiv L + \iiint_V[\lambda^{(+)}(\rho)F^{(+)}(\xi,\Theta)+\lambda^{(-)}(\rho)F^{(-)}(\xi,\Theta)]dV + \oiint_A[\lambda^{(+)}(\rho)\times$$
$$\times F^{(+)}(\xi,\Theta)+\lambda^{(-)}(\rho)F^{(-)}(\xi,\Theta)]dA = L + \iint_G[\Lambda^{(+)}(\xi)F^{(+)}+$$
$$+\Lambda^{(-)}(\xi)F^{(-)}]dS + \iint_G[\lambda^{(+)}(\xi,h)F^{(+)}+\lambda^{(-)}(\xi,h)F^{(-)}]dS+$$
$$+\iint_G[\lambda^{(+)}(\xi,-h)F^{(+)}+\lambda^{(-)}(\xi,-h)F^{(-)}]dS+$$
$$+\oint_\Gamma[\Lambda^{(+)}(\xi)F^{(+)}+\Lambda^{(-)}(\xi)F^{(-)}]d\Gamma = L + \iint_G[\gamma^{(+)}(\xi)F^{(+)}+$$
$$+\gamma^{(-)}(\xi)F^{(-)}]dS+\oint_\Gamma[\Lambda^{(+)}(\xi)F^{(+)}+\Lambda^{(-)}(\xi)F^{(-)}]d\Gamma, \qquad (29)$$

$$\gamma^{(\pm)}(\xi) \equiv \Lambda^{(\pm)}(\xi)+\lambda^{(\pm)}(\xi,h)+\lambda^{(\pm)}(\xi,-h),$$
$$\Lambda^{(\pm)}(\xi) \equiv \int_{-h}^{h}\lambda^{(\pm)}(\rho)\,dx_3, \qquad (30)$$

$\lambda^{(\pm)}(\rho)$ – неопределенные множители Лагранжа. При выводе окончательного выражения (29) использовались формулы (10) (см. последнее равенство (30)). Согласно введенным обозначениям (30), функции $\Lambda^{(\pm)}(\xi)$ и $\gamma^{(\pm)}(\xi)$ можно рассматривать как новые неопределенные множители Лагранжа, зависящие, в отличие от $\lambda^{(\pm)}(\rho)$, только от двух пространственных переменных x_1 и x_2.

На вариационное уравнение (28) при учете (29) никакие дополнительные связи не накладываются, только вариация температуры должна быть согласована с температурными граничными условиями (5) (см. равенство (9) при учете (12)).

Уравнение (28) при учете соотношений (7), (8), (11), (27) и (29) в развернутом виде запишется так:

$$\delta\tilde{L} = I_1+I_2-I_3+I_4+I_5+\iint_G[F^{(+)}\delta\gamma^{(+)}+F^{(-)}\delta\gamma^{(-)}]dS+$$
$$+\oint_\Gamma[F^{(+)}\delta\Lambda^{(+)}+F^{(-)}\delta\Lambda^{(-)}]d\Gamma = 0, \qquad (31)$$

где

$$I_4 \equiv \iint_G (\gamma^{(+)}\delta\Phi^{(+)} + \gamma^{(-)}\delta\Phi^{(-)})\,dS = \iint_G \sum_{k=0}^{K} \Big\{ h^k \sum_{i=1}^{2} [(-1)^k (\kappa_{3i}^{(-)}\gamma^{(-)})_{,i} -$$

$$- (\kappa_{3i}^{(+)}\gamma^{(+)})_{,i}] + h^{k-1}[\gamma^{(+)}(\alpha^{(+)}h + k\kappa_{33}^{(+)}) -$$

$$- (-1)^{k-1}\gamma^{(-)}(\alpha^{(-)}h + k\kappa_{33}^{(-)})]\Big\}\,\delta T_k\,dS +$$

$$+ \oint_\Gamma \sum_{k=0}^{K} h^k \sum_{i=1}^{2} n_i[\kappa_{3i}^{(+)}\gamma^{(+)} - (-1)^k \kappa_{3i}^{(-)}\gamma^{(-)}]\,\delta T_k\,d\Gamma,$$

$$I_5 \equiv \oint_\Gamma (\Lambda^{(+)}\delta\Phi^{(+)} + \Lambda^{(-)}\delta\Phi^{(-)})\,d\Gamma = \oint_\Gamma \sum_{k=0}^{K} h^k \sum_{i=1}^{2} n_i[\kappa_{3i}^{(+)}\Lambda^{(+)} -$$

$$- (-1)^k \kappa_{3i}^{(-)}\Lambda^{(-)}]\,\delta T_{k,n}\,d\Gamma + \oint_\Gamma \sum_{k=0}^{K} \Big\{ h^{k-1}[\Lambda^{(+)}(\alpha^{(+)}h + k\kappa_{33}^{(+)}) -$$

$$- (-1)^{k-1}\Lambda^{(-)}(\alpha^{(-)}h + k\kappa_{33}^{(-)})] + h^k \sum_{i=1}^{2} (-1)^i [n_i(\kappa_{3j}^{(+)}\Lambda^{(+)} -$$

$$- (-1)^k \kappa_{3j}^{(-)}\Lambda^{(-)})]_{,\tau}\Big\}\,\delta T_k\,d\Gamma - I_6, \qquad j = 3 - i, \tag{32}$$

$$I_6 \equiv \oint_\Gamma \Big\{ \sum_{k=0}^{K} [h^k \sum_{i=1}^{2} (-1)^i n_i(\kappa_{3j}^{(+)}\Lambda^{(+)} - (-1)^k \kappa_{3j}^{(-)}\Lambda^{(-)})]\,\delta T_k \Big\}_{,\tau}\,d\Gamma = 0,$$

$$j = 3 - i, \tag{33}$$

$$(\cdot)_{,n} \equiv n_1(\cdot)_{,1} + n_2(\cdot)_{,2}, \qquad (\cdot)_{,\tau} \equiv -n_2(\cdot)_{,1} + n_1(\cdot)_{,2},$$

интегралы I_1, I_2 и I_3 определяются по формулам (16), (17) и (19); направляющие косинусы n_1 и n_2 внешней нормали к контуру Γ имеют тот же смысл, что и в граничном условии (4); $(\cdot)_{,n}$ – производная по направлению внешней нормали к Γ; $(\cdot)_{,\tau}$ – производная вдоль контура Γ.

При выводе выражений (32) с учетом (33) использовались равенства (26) и формула Гаусса. Преобразование левых частей равенств (32) к их правым частям проводилось традиционным путем, поэтому промежуточные выкладки не выписаны.

Согласно равенству (33), интеграл I_6 в (32) равен нулю в силу замкнутости контура Γ и естественного предположения о дифференцируемости вдоль контура Γ функций, заключенных в (33) в фигурную скобку. Это допущение приемлемо, например, для гладкого контура Γ.

В силу произвольности вариаций функций $\delta\gamma^{(\pm)}$, $\delta\Lambda^{(\pm)}$, δT_k и $\delta T_{k,n}$, $0 \le k \le K$, из уравнения (31) при учете соотношений (15)–(17), (19), (25), (32) и (33) получаем граничные условия на лицевых поверхностях пластины (26) (или, что то же самое, равенства (24)), а также следующие двумерные уравнения Эйлера:

$$-Q_{1,1}^{(k)} - Q_{2,2}^{(k)} + kQ_3^{(k-1)} + h^k \sum_{i=1}^{2} [(-1)^k (\kappa_{3i}^{(-)}\gamma^{(-)})_{,i} - (\kappa_{3i}^{(+)}\gamma^{(+)})_{,i}] +$$

$$+ h^{k-1}[\gamma^{(+)}(\alpha^{(+)}h + k\kappa_{33}^{(+)}) - (-1)^{k-1}\gamma^{(-)}(\alpha^{(-)}h + k\kappa_{33}^{(-)})] =$$

$$= -W_q^{(k)}(\xi), \qquad \xi \in G, \tag{34}$$

и соответствующие им граничные условия в тепловых факторах на кромке пластины:

$$Q_1^{(k)}n_1 + Q_2^{(k)}n_2 + h^k\sum_{i=1}^{2} n_i[\varkappa_{3i}^{(+)}\gamma^{(+)} - (-1)^k\varkappa_{3i}^{(-)}\gamma^{(-)}] +$$
$$+ h^{k-1}[\Lambda^{(+)}(\alpha^{(+)}h + k\varkappa_{33}^{(+)}) - (-1)^{k-1}\Lambda^{(-)}(\alpha^{(-)}h + k\varkappa_{33}^{(-)})] +$$
$$+ h^k\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[n_i(\varkappa_{3j}^{(+)}\Lambda^{(+)} - (-1)^k\varkappa_{3j}^{(-)}\Lambda^{(-)})]_{,\tau} = Q^{(k)}(\mathrm{x}),$$
$$\mathrm{x}\in\Gamma_q,\quad j = 3 - i,\quad 0\le k\le K, \tag{35}$$

$$\sum_{i=1}^{2} n_i[\varkappa_{3i}^{(+)}\Lambda^{(+)} - (-1)^k\varkappa_{3i}^{(-)}\Lambda^{(-)}] = 0,\qquad \mathrm{x}\in\Gamma,\qquad 0\le k\le K. \tag{36}$$

На части кромки Γ_T по-прежнему должны быть заданы температурные граничные условия (22).

Из $K+1$ равенств (36) только два являются независимыми (например, при $k=0$ и $k=1$), из которых, как из системы линейных алгебраических уравнений, вытекает

$$\Lambda^{(+)}(\mathrm{x}) = \Lambda^{(-)}(\mathrm{x}) = 0,\qquad \mathrm{x}\in\Gamma. \tag{37}$$

Левые части соотношений (34) и (35) существенно отличаются от левых частей уравнений теплового баланса (20) и тепловых граничных условий (21) наличием слагаемых, содержащих в качестве сомножителей функции $\gamma^{(\pm)}$ и их частные производные по переменным x_1 и x_2. В общем случае $\gamma^{(\pm)}\ne 0$, поэтому из соотношений (34) и (35) при $k=0$ и общей анизотропии материала пластины (когда $\varkappa_{3i}\ne 0$, $i=1,2$) не вытекают интегральные равенства (23). Следовательно, при общей анизотропии материала пластины и при выполнении уравнений (34) и граничных условий (35) для произвольной подобласти $\hat{G}\subset G$ и для всей пластины ($\hat{G}=G$) соотношение теплового баланса не выполняется (нарушается закон сохранения энергии). Таким образом, равенства (34) и (35) образуют несогласованную (противоречивую) с теплофизической точки зрения систему уравнений и соответствующих ей граничных условий в тепловых факторах. В силу этого обстоятельства уравнения (34) некорректно называть локальными двумерными уравнениями теплового баланса анизотропной пластины, а равенства (35) некорректно называть тепловыми граничными условиями. Поэтому далее уравнения (34) по-прежнему будем называть уравнениями Эйлера рассматриваемой вариационной задачи, а равенства (35) при учете (37) – соответствующими им граничными условиями в тепловых факторах.

Пусть на лицевых поверхностях пластины заданы граничные условия II рода (т. е. $\alpha^{(\pm)}=0$ в соотношениях (3) и (34)), тогда при $k=0$ из равенств (34) и (35) при учете (37) получаем

$$-Q_{1,1}^{(0)} - Q_{2,2}^{(0)} + \sum_{i=1}^{2}(\varkappa_{3i}^{(-)}\gamma^{(-)} - \varkappa_{3i}^{(+)}\gamma^{(+)})_{,i} = -W_q^{(0)}(\mathrm{x}),\qquad \mathrm{x}\in G, \tag{38}$$

$$Q_1^{(0)}n_1 + Q_2^{(0)}n_2 - \sum_{i=1}^{2} n_i(\varkappa_{3i}^{(-)}\gamma^{(-)} - \varkappa_{3i}^{(+)}\gamma^{(+)}) = Q^{(0)}(\mathrm{x}),\qquad \mathrm{x}\in\Gamma_q. \tag{39}$$

Используя соотношения (38) и (39), вычислим величину, стоящую слева в цепочке равенств (23):

$$\iint_{\hat{G}}(Q_{1,1}^{(0)} + Q_{2,2}^{(0)} - W_q^{(0)})\,dS = \iint_{\hat{G}}\sum_{i=1}^{2}(\varkappa_{3i}^{(-)}\gamma^{(-)} - \varkappa_{3i}^{(+)}\gamma^{(+)})_{,i}\,dS =$$
$$= \oint_{\Gamma}\sum_{i=1}^{2} n_i(\varkappa_{3i}^{(-)}\gamma^{(-)} - \varkappa_{3i}^{(+)}\gamma^{(+)})\,d\hat{\Gamma} = \oint_{\Gamma}(Q_1^{(0)}n_1 + Q_2^{(0)}n_2 - Q^{(0)})\,d\hat{\Gamma}. \tag{40}$$

Так как первое и последнее соотношения в цепочке равенств (40) между собой равны, то получаем

$$\iint\limits_{G}\left(Q^{(0)}_{1,1}+Q^{(0)}_{2,2}-W^{(0)}_{q}\right)dS-\oint\limits_{\Gamma}\left(Q^{(0)}_{1}n_{1}+Q^{(0)}_{2}n_{2}-Q^{(0)}\right)d\Gamma=0. \qquad (41)$$

Используя формулу Гаусса, из (41) получим последнее равенство (23). Следовательно, если на лицевых поверхностях пластины заданы граничные условия II рода, то уравнения (34) получаются согласованными с граничными условиями (35) при учете (37), так как уравнение теплового баланса при этом выполняется для произвольной подобласти пластины (см. (41) и последнее равенство (23)).

Если же на лицевых поверхностях пластины заданы граничные условия III рода (т. е. $\alpha^{(\pm)}\neq 0$ в соотношениях (3) и (34)), то цепочка равенств (40) уже не выполняется, и поэтому последнее равенство (23) не имеет места, т. е. уравнения (34) и граничные условия (35) получаются несогласованными с теплофизической точки зрения.

Структура равенств (38) и (39) свидетельствует о том, что при задании на лицевых поверхностях граничных условий II рода в пластине как бы появляются дополнительные фиктивные источники тепла, интенсивность которых (ср. (38) и (20) при $k=0$)

$$W^{(0)}_{\gamma}(\mathrm{x})\equiv\sum_{i=1}^{2}\left(\varkappa^{(-)}_{3i}\gamma^{(-)}-\varkappa^{(+)}_{3i}\gamma^{(+)}\right)_{,i}, \qquad \mathrm{x}\in G, \qquad (42)$$

а через кромку Γ_q протекает дополнительный фиктивный тепловой поток (ср. (39) и (21) при $k=0$)

$$\bar{Q}^{(0)}(\mathrm{x})\equiv\sum_{i=1}^{2}n_i\left(\varkappa^{(-)}_{3i}\gamma^{(-)}-\varkappa^{(+)}_{3i}\gamma^{(+)}\right), \qquad \mathrm{x}\in\Gamma_q,$$

согласованный с (42).

Заключение. Проведенный анализ показывает, что получение двумерных стационарных уравнений теплового баланса композитных (анизотропных) пластин на основе применения вариационных принципов теории теплопроводности при задании аппроксимации температуры в виде полинома по поперечной координате с неизвестными коэффициентами разложения приводит к двум типам теорий.

В первом типе теорий не учитываются тепловые граничные условия (II и/или III рода) на лицевых поверхностях пластины. Двумерные уравнения теплового баланса и соответствующие им граничные условия на кромках конструкции при этом получаются согласованными с теплофизической точки зрения в том смысле, что для любой подобласти пластины и всей конструкции в целом выполняются условия теплового баланса. Двумерные уравнения теорий такого типа могут быть получены не только вариационным путем, но и независимо методом взвешенных невязок, т. е. путем умножения исходных трехмерных уравнений теплопроводности на весовые функции – однородные полиномы от поперечной координаты – с последующим интегрированием результата по толщине конструкции.

Во втором типе теорий учитываются тепловые граничные условия (II и/или III рода) на лицевых поверхностях пластины, играющие роль дифференциальных связей, накладываемых на коэффициенты разложения температуры. Двумерные уравнения Эйлера в тепловых факторах и соответствующие им граничные условия на кромках, полученные по этим теориям, являются несогласованными (противоречивыми) с теплофизической точки зрения, так как при этом для любой подобласти пластины и всей конструкции в целом не выполняется уравнение теплового баланса. При этом двумерные уравнения Эйлера и соответствующие им граничные условия на кромках уже нельзя получить независимо методом взвешенных невязок, что косвенно подтверждает их теплофизическую несогласованность. Частные теории такого типа были предложены в работах А. И. Бабина и Ю. В. Немировского [5, 6].

Построить согласованные с теплофизической точки зрения двумерные уравнения теплового баланса анизотропных пластин, учитывая тепловые граничные условия на лицевых поверхностях, позволяет применение метода взвешенных невязок, а не использование вариационных принципов теории теплопроводности.

Все полученные результаты остаются качественно справедливыми и в тех случаях, когда для аппроксимации температуры используются конечные разложения не по однородным полиномам, как это принято выше, а по другим базисным функциям, зависящим от поперечной координаты, и результаты переносятся на композитные (анизотропные) оболочки и на нестационарные задачи теплопроводности тонкостенных композитных конструкций.

Открытым пока остался вопрос о том, насколько сильно двумерные теории типа Бабина – Немировского искажают качественно и количественно решения теплофизических задач для композитных пластин с анизотропией общего вида.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017–2020 годы (проект 23.4.1 – Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

1. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – Москва: Мир, 1987. – 542 с.
   То же: *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. – Oxford etc.: Pergamon Press, 1982. – 630 p.
2. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. – Москва: Мир, 1975. – 304 с.
   То же: *Gyarmati I.* Non-equilibrium thermodynamics. Field theory and variational principles. – Berlin – New York: Springer, 1970. – xi+184 p.
3. *Зино Е. И., Тропп Э. А.* Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 224 с.
4. *Кудинов В. А., Кудинов И. В.* Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности / Под ред. Э. М. Карташова. – Москва: ЛИБРОКОМ, 2012. – 280 с.
5. *Немировский Ю. В., Бабин А. И.* Нестационарная теплопередача в многослойных анизотропных оболочках вращения // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1992. – Вып. 35. – С. 106–114.
   То же: *Nemirovskii Yu. V., Babin A. I.* Nonstationary heat transfer in multilayer anisotropic shells of revolution // J. Sov. Math. – 1993. – 67, No. 2. – P. 2917–2924. – https://doi.org/10.1007/BF01095869.
6. *Немировский Ю. В., Бабин А. И.* Связанная задача термоупругости слоистых композитных оболочек вращения. I. Теоретические аспекты проблемы // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 1. – С. 86–98.
   То же: *Nemirovskii Yu. V., Babin A. I.* Coupled thermoelasticity problem for multilayer composite shells of revolution. I. Theoretical aspects of the problem // J. Math. Sci. – 2018. – 229, No. 2. – P. 211–225.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-018-3672-9.
7. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций. – Новосибирск: Арт-Авеню, 2008. – 512 с.
8. *Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андрюшин В. А.* Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. – Москва: Физматлит, 2014. – 408 с.
9. *Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А.* Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник. – Москва: Машиностроение, 1987. – 224 с.
10. *Формалев В. Ф.* Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. – Москва: Физматлит, 2015. – 280 с.
11. *Формалев В. Ф.* Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. – Москва: Физматлит, 2015. – 312 с.

12. *Якимов А. С.* Математическое моделирование тепловой защиты и некоторых задач тепломассообмена. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2015. – 214 с.
13. *Янковский А. П.* Асимптотический анализ решения нелинейной задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек при малых числах Био на лицевых поверхностях // Теплофизика и аэромеханика. – 2017. – 24, № 2. – С. 293–310.
14. *Aghalovyan L.* Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. – London–Singapore: World Scientific Publ., 2015. – 376 p.
15. *Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M.* Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // Mech. Compos. Mater. – 2009. – 45, No. 2. – P. 165–174. – https://doi.org/10.1007/s11029-009-9072-y.
16. *Vasiliev V., Morozov E.* Advanced mechanics of composite materials and structural elements. – Amsterdam: Elsevier, 2013. – 832 p.

КРИТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДВОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСУ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН, ОТРИМАНИХ НА ОСНОВІ ВАРІАЦІЙНИХ ПРИНЦИПІВ ТЕОРІЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ. I. ЗАГАЛЬНІ ДВОВИМІРНІ ТЕОРІЇ

На основі використання варіаційних принципів розглянуто два підходи до отримання двовимірних рівнянь теорії стаціонарної теплопровідності композитних пластин. Температура пластин апроксимується поліномом від поперечної координати з невідомими коефіцієнтами розкладу. В рамках першого підходу теплові граничні умови на лицевих поверхнях пластин не враховуються, але отримані двовимірні рівняння Ейлера і відповідні їм граничні умови на кромках є узгодженими з теплофізичної точки зору, оскільки згідно з цим рівнянням для довільної підобласті пластини і всієї конструкції в цілому виконується рівняння теплового балансу. В рамках другого підходу враховуються теплові граничні умови на лицевих поверхнях, що приводить до необхідності введення неозначених множників Лагранжа, тобто до розв'язання варіаційної задачі на умовний екстремум. Показано, що отримані при цьому двовимірні рівняння Ейлера і відповідні їм граничні умови на кромках є неузгодженими (суперечливими) з теплофізичної точки зору, оскільки для довільної підобласті пластини і всієї конструкції в цілому не виконується рівняння теплового балансу.

***Ключові слова**: композитні пластини, теорія теплопровідності, рівняння теплового балансу, методи зниження розмірності, варіаційні принципи, метод зважених нев'язок.*

CRITICAL ANALYSIS OF THE TWO-DIMENSIONAL HEAT BALANCE EQUATIONS OF COMPOSITE PLATES, OBTAINED ON THE BASIS OF THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF THE THEORY OF THERMAL CONDUCTIVITY. I. GENERAL TWO-DIMENSIONAL THEORIES

Based on the use of variational principles, two approaches to obtaining two-dimensional equations of the theory of stationary thermal conductivity of composite plates are considered. The temperature of the plates is approximated by a polynomial in the transverse coordinate with unknown decomposition coefficients. In the framework of the first approach, thermal boundary conditions on the facial surfaces of the plates are not taken into account. The resulting two-dimensional Euler equations and the corresponding boundary conditions at the edges are consistent from the thermophysical point of view. In this case, for an arbitrary subdomain of the plate and the entire structure as a whole, the heat balance equation is satisfied. In the framework of the second approach, thermal boundary conditions on the facial surfaces are taken into account. The latter circumstance leads to the necessity of introducing undetermined Lagrange multipliers and to solving a variational problem for a conditional extremum. It is shown that the resulting two-dimensional Euler equations and the corresponding boundary conditions at the edges are inconsistent (contradictory) from a thermophysical point of view. In this case, for an arbitrary subdomain of the plate and the entire structure as a whole, the heat balance equation is not satisfied.

Keywords: composite plates, heat conduction theory, heat balance equation, dimensionality reduction techniques, variational principles, weighted residuals method.

Ин-т теорет. и прикл. механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
01.06.19

ISSN 0130–9420. **Мат. методи та фіз.-мех. поля**. 2019. – 62, **№** 2. – **С**. 107–119.
Бібліогр.: 16 **назв**. – **Рос**.

УДК 536.21

А. П. Янковский✉

КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСА КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН, ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. I. ОБЩИЕ ДВУМЕРНЫЕ ТЕОРИИ

На основе использования вариационных принципов рассмотрены два подхода к получению двумерных уравнений теории стационарной теплопроводности композитных пластин. Температура пластин аппроксимируется полиномом по поперечной координате с неизвестными коэффициентами разложения. В рамках первого подхода тепловые граничные условия на лицевых поверхностях пластин не учитываются, но получающиеся двумерные уравнения Эйлера и соответствующие им граничные условия на кромках являются согласованными с теплофизической точки зрения, так как согласно этим уравнениям для любой подобласти пластины и всей конструкции в целом выполняется уравнение теплового баланса. В рамках второго подхода учитываются тепловые граничные условия на лицевых поверхностях. Последнее обстоятельство приводит к необходимости введения неопределенных множителей Лагранжа, т. е. к решению вариационной задачи на условный экстремум. Показано, что получающиеся при этом двумерные уравнения Эйлера и соответствующие им граничные условия на кромках являются несогласованными (противоречивыми) с теплофизической точки зрения, так как для произвольной подобласти пластины и всей конструкции в целом не выполняется уравнение теплового баланса.

Ключевые слова: *композитные пластины, теория теплопроводности, уравнение теплового баланса, методы понижения размерности, вариационные принципы, метод взвешенных невязок.*

КРИТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДВОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСУ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН, ОТРИМАНИХ НА ОСНОВІ ВАРІАЦІЙНИХ ПРИНЦИПІВ ТЕОРІЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ. I. ЗАГАЛЬНІ ДВОВИМІРНІ ТЕОРІЇ

На основі використання варіаційних принципів розглянуто два підходи до отримання двовимірних рівнянь теорії стаціонарної теплопровідності композитних пластин. Температура пластин апроксимується поліномом від поперечної координати з невідомими коефіцієнтами розкладу. В рамках першого підходу теплові граничні умови на лицевих поверхнях пластин не враховуються, але отримані двовимірні рівняння Ейлера і відповідні їм граничні умови на кромках є узгодженими з теплофізичної точки зору, оскільки згідно з цим рівнянням для довільної підобласті пластини і всієї конструкції в цілому виконується рівняння теплового балансу. В рамках другого підходу враховуються теплові граничні умови на лицевих поверхнях, що приводить до необхідності введення неозначених множників Лагранжа, тобто до розв'язання варіаційної задачі на умовний екстремум. Показано, що отримані при цьому двовимірні рівняння Ейлера і відповідні їм граничні умови на кромках є неузгодженими (суперечливими) з теплофізичної точки зору, оскільки для довільної підобласті пластини і всієї конструкції в цілому не виконується рівняння теплового балансу.

Ключові слова: *композитні пластини, теорія теплопровідності, рівняння теплового балансу, методи зниження розмірності, варіаційні принципи, метод зважених нев'язок.*

✉ yankovsky_ap@rambler.ru

CRITICAL ANALYSIS OF THE TWO-DIMENSIONAL HEAT BALANCE EQUATIONS OF COMPOSITE PLATES, OBTAINED ON THE BASIS OF THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF THE THEORY OF THERMAL CONDUCTIVITY. I. GENERAL TWO-DIMENSIONAL THEORIES

Based on the use of variational principles, two approaches to obtaining two-dimensional equations of the theory of stationary thermal conductivity of composite plates are considered. The temperature of the plates is approximated by a polynomial in the transverse coordinate with unknown decomposition coefficients. In the framework of the first approach, thermal boundary conditions on the facial surfaces of the plates are not taken into account. The resulting two-dimensional Euler equations and the corresponding boundary conditions at the edges are consistent from the thermophysical point of view. In this case, for an arbitrary subdomain of the plate and the entire structure as a whole, the heat balance equation is satisfied. In the framework of the second approach, thermal boundary conditions on the facial surfaces are taken into account. The latter circumstance leads to the necessity of introducing undetermined Lagrange multipliers and to solving a variational problem for a conditional extremum. It is shown that the resulting two-dimensional Euler equations and the corresponding boundary conditions at the edges are inconsistent (contradictory) from a thermophysical point of view. In this case, for an arbitrary subdomain of the plate and the entire structure as a whole, the heat balance equation is not satisfied.

Keywords: composite plates, heat conduction theory, heat balance equation, dimensionality reduction techniques, variational principles, weighted residuals method.

Ин-т теорет. и прикл. механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
01.06.19