УДК 512.552.13

А. М. Білоус[✉], А. І. Гаталевич

СТАБІЛЬНИЙ РАНГ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕКОМУТАТИВНИХ КІЛЕЦЬ

Доведено, що адекватне справа дуо кільце з ненульовим радикалом Джекобсона має стабільний ранг один. Установлено, що клас повних матриць порядку 2 над дуо кільцем елементарних дільників має стабільний ранг один. Досліджено деякі класи одинично-регулярних і чистих матриць над дуо кільцем.

Ключові слова: *стабільний ранг, дуо кільце, кільце Ерміта, кільце елементарних дільників, повна матриця.*

Стабільний ранг є одним з основних інваріантів K-теорії. Це поняття, введене H. Bass-ом [4], активно використовується у теорії кілець, зокрема в задачах діагональної редукції матриць [15, 16]. Водночас одержано ряд узагальнень поняття стабільного рангу. Зокрема, таким є поняття одиничного стабільного рангу [15]. Саме воно є надзвичайно актуальним в алгебраїчній K-теорії. Рядок $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ елементів кільця R називають правим унімодулярним, якщо існують елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ такі, що $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 1$. Стабільним рангом кільця R називають таке найменше натуральне число n, для якого виконується умова: для довільного правого унімодулярного рядка $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ елементів кільця R існують такі елементи $b_1, b_2, \ldots, b_n \in R$, що рядок $(a_1 + a_{n+1} b_1, a_2 + a_{n+1} b_2, \ldots, a_n + a_{n+1} b_n)$ є правим унімодулярним. Якщо такого натурального n не існує, то вважаємо, що стабільний ранг кільця R дорівнює нескінченності.

Таким чином, кільце R є кільцем стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, існує елемент $t \in R$, що $a + bt$ є оборотним елементом кільця R. У праці [14] наведено приклади кілець стабільного рангу 1, а також встановлено найпростіші їхні властивості. M. Henriksen [9] вказав, що регулярне кільце є одинично-регулярним тоді й тільки тоді, коли його стабільний ранг дорівнює 1.

Подібно, кільце R є кільцем стабільного рангу 2, якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$, виконується рівність $(a + cx)R + (b + cy)R = R$ для деяких $x, y \in R$.

P. Menal, J. Moncasi [12] довели, що стабільний ранг кільця Ерміта не перевищує 2. Зауважимо, що задача про існування регулярного кільця скінченного стабільного рангу ≥ 3 є відкритою [9].

У роботі [5] показано, що комутативне кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників. А. І. Гаталевич поширив цей результат на випадок дуо кілець [2].

Важливою проблемою є вивчення зв'язків стабільного рангу кільця матриць порядку n над R і стабільного рангу кільця R. У роботі [1] встановлено, що стабільний ранг кільця матриць порядку n над кільцем R стабільного рангу r дорівнює $1 - \left[\frac{r-1}{n} \right]$, де $[m]$ означає цілу частину від числа m. Тому, якщо стабільний ранг кільця R дорівнює 1 або 2, то стабільний ранг кільця матриць дорівнює, відповідно, 1 або 2.

Цікавим і важливим підкласом комутативних кілець елементарних дільників є клас адекватних кілець. Свою назву вони отримали у праці

✉ a.bilous1610@gmail.com

O. Helmer-a [8] у випадку областей. Елемент $a \neq 0$ кільця R називають адекватним справа, якщо для довільного елемента $b \in R$ існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$, $rR + bR = R$, і для довільного елемента $s' \in R$ такого, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$. Кільце, в якому кожний ненульовий елемент є адекватним справа, називають адекватним справа. Абелеве регулярне кільце є прикладом адекватного справа кільця.

Нагадаємо, що кільце R називають кільцем елементарних дільників, якщо довільну матрицю A над кільцем R можна звести до канонічного діагонального вигляду, помноживши A на відповідні оборотні матриці P і Q:

$$D = PAQ = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n),$$

де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Якщо довільна 1×2 (2×1)-матриця над кільцем R має властивість діагональної редукції, то кільце R називають правим (лівим) кільцем Ерміта. Праве і ліве кільця Ерміта називають кільцем Ерміта.

Кільце, над яким довільну матрицю зведено до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями, називають кільцем з елементарною редукцією матриць.

Правим (лівим) дуо кільцем називають кільце, в якому довільний правий (лівий) ідеал є двобічним. Праве і ліве дуо кільце називають дуо кільцем. Прикладом дуо кільця є строго регулярні кільця.

Теорема 1. *Нехай R – адекватне справа дуо кільце таке, що його радикал Джекобсона є ненульовим. Тоді стабільний ранг кільця R дорівнює* 1.

Д о в е д е н н я. Нехай $a, b, c \in R$ і $aR + bR + cR = R$, де $c \neq 0$. Тоді $c = rs$, де $rR + aR = R$ і $s_1R + aR \neq R$ для довільного s_1 такого, що $sR \subset s_1R \neq R$. Згідно з [3], $(a + br)R + cR = R$. Нехай $J(R)$ є ненульовим радикалом Джекобсона адекватного справа дуо кільця R і $a, b \in R$, де $aR + bR = R$. Тоді, вибираючи довільне $c \in J(R)$, $c \neq 0$, бачимо, що існує такий елемент $r \in R$, що $(a + br)R + cR = R$, тобто $(a + br)u + cv = 1$. Оскільки $c \in J(R)$, то $(a + br)u = 1 - cv$ є оборотним елементом, тобто $(a + br)R = R$. Доведення завершено. ♦

Теорема 2. *Нехай R є адекватним справа дуо кільцем. Тоді стабільний ранг кільця R дорівнює* 2.

Д о в е д е н н я. Нехай $aR + bR + cR = R$. Якщо $a = 0$, тоді $bR + cR = R$, тобто $(b + a0)R + (c + a0)R = R$. Це означає, що в цьому випадку виконується умова, яка визначає стабільний ранг 2. Нехай $a \neq 0$, тоді згідно з означенням адекватного дуо кільця R існують елементи $r, s \in R$ такі, що $a = rs$, де $rR + bR = R$ і $s'R + bR \neq R$ для довільного $s' \in R$ такого, що $sR \subset s'R \neq R$. Покажемо, що $aR + (b + cr)R = R$. Дійсно, якщо $aR + (b + cr)R = \delta R$, де δ – необоротний елемент R, тоді δ є дільником $a = rs$. Якщо $\delta R + rR = hR$, де h – необоротний елемент R, тоді h є дільником $b + cr \in R$. Оскільки h є дільником r, то h є дільником елемента b. Але це неможливо, оскільки $rR + bR = R$. Якщо ж δ є дільником елемента s, то згідно з означенням елемента s маємо $\delta R + bR = \alpha R$, де α є необоротним елементом R. Оскільки δ є дільником $b + cr$ і α є дільником δ, то α є дільником $b + cr$. Але це неможливо, оскільки $aR + bR + cR = R$. Отже, $aR + (b + cr)R = R$, тобто $(a + c0)R + (b + cr)R = R$, а це є умовою, яка визначає стабільний ранг 2. Звідси випливає, що R є кільцем стабільного рангу 2. Доведення завершено. ♦

Теорема 3. *Нехай* R *є дуо кільцем Ерміта. Якщо* $aR + xR = R$ і $cR + zR + (ay - bx)R = R$, *тоді для матриць*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$$

існують такі оборотні матриці U, V *і одинична матриця* E, *що* $AU + BV = E$.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що рівності $aR + xR = R$ і $cR + zR + (ay - bx)R = R$ є правильними для матриць A і B. Розглянемо матрицю

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 & x & 0 \\ b & c & y & z \end{pmatrix}.$$

Оскільки $aR + xR = R$, то існують такі елементи $u, v \in R$, що $au + xv = 1$. Тоді

$$\begin{pmatrix} a & 0 & x & 0 \\ b & c & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 & -x' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + xv & 0 & -ax' + xa & 0 \\ bu + yv & c & -bx' + ya & z \end{pmatrix}.$$

Оскільки $au + xv = 1$ і R є дуо кільцем, цю рівність можемо записати так:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ bu + yv & c & ay' - bx' & z \end{pmatrix}.$$

Використовуючи елементарні перетворення з рядками попередньої матриці, отримаємо

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & ay' - bx' & z \end{pmatrix}.$$

Оскільки $cR + zR + (ay - bx)R = R$ і R є кільцем Ерміта стабільного рангу 2, то існує така оборотна матриця P третього порядку над кільцем R, що

$$(c, ay - bx, z)P = (1, 0, 0).$$

Отже,

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & P & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, доведено, що для матриці C можна знайти оборотну матрицю Q четвертого порядку таку, що

$$CQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це означає, що для матриць A, B існують оборотні матриці U і V такі, що $AU + BV = E$. Отже, матриці A і B є взаємно простими зліва. Доведення завершено. ♦

Позначимо через $M(2, R)$ кільце матриць другого порядку над дуо кільцем R. Будемо говорити, що матриця $A \in M(2, R)$ є *повною*, якщо $M(2, R)AM(2, R) = M(2, R)$. Множину всіх повних матриць кільця $M(2, R)$ позначимо через $F(2, R)$.

Теорема 4. *Нехай* R *є дуо кільцем Ерміта. Нехай* $A, B \in M(2, R)$ – *матриці над кільцем* R *такі, що* $AM(2, R) + BM(2, R) = M(2, R)$, *і матриця* B *має властивість діагональної редукції. Тоді існує повна матриця* $T \in F(2, R)$ *така, що* $A + BT$ *є оборотною матрицею.*

Д о в е д е н н я. Оскільки матриця B має властивість діагональної редукції, і кільце R є дуо кільцем Ерміта, отримаємо, що існують оборотні матриці $P, U, Q \in GL(2, R)$ такі, що

$$PAU = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad PBQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Оскільки $AM(2,R) + BM(2,R) = M(2,R)$, то існують матриці $C, D \in GL(2,R)$ такі, що $AC + BD = E$. Тому отримуємо

$$PAU(U^{-1}C) + PBQ(Q^{-1}D) = P.$$

З цієї рівності випливає, що матриці $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ є взаємно простими зліва.

Оскільки стабільний ранг кільця R дорівнює 2, то існують такі елементи $\alpha, \beta \in R$, що $(b + y\alpha)R + (c + y\beta)R = R$. Тому існують такі $n, m \in R$, що $(b + y\alpha)n + (c + y\beta)m = 1$. Більше того, враховуючи [16], елементи $\alpha, \beta \in R$ можна вибрати так, що $\alpha R + \beta R = R$.

Тоді

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m - a & -n \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -n \\ b + y\alpha & c + y\beta \end{pmatrix}$$

є оборотною матрицею. Оскільки $\alpha R + \beta R = R$, то матриця $\begin{pmatrix} m - a & -n \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ є повною матрицею. Доведення завершено. ♦

Розглянемо одинично-регулярні та чисті матриці над дуо кільцем Ерміта. Поняття одинично-регулярного елемента ввела G. Ehrlich [7]: елемент кільця R називають *одинично-регулярним*, якщо $x = xux$ для деякого оборотного елемента $u \in R$. Легко побачити, що елемент x є одинично-регулярним тоді й лише тоді, коли він є добутком оборотного елемента та ідемпотента. Ehrlich назвала кільце одинично-регулярним, якщо всі його елементи є одинично-регулярними. Такі кільця інтенсивно вивчають як важливий клас регулярних за фон Нейманом кілець. Паралельно W. K. Nicholson ввів поняття *чистого елемента* і *чистого кільця* [13]. Ці класи кілець містяться у класі кілець з властивістю заміни, які відіграють важливу роль у некомутативній теорії кілець і модулів.

Означення 1. Кільце R називають *чистим*, якщо для довільного елемента $x \in R$ існують такі оборотний елемент $u \in R$ і ідемпотент $e \in R$, що $x = u + e$ [14].

Означення 2. Кільце R називають *кільцем з властивістю заміни*, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий ідемпотент $e \in R$, що $e \in aR$ і $(1 - e) \in (1 - a)R$ [5].

Означення 3. Кільце R називають *кільцем ідемпотентного стабільного рангу* 1, якщо з умови $aR + bR = R$ для довільних елементів $a, b \in R$ випливає існування ідемпотента $e \in R$ такого, що $(a + be) \in U(R)$.

Означення 4. Кільце R називають *абелевим*, якщо для будь-якого ідемпотента $e = e^2 \in R$ виконується умова $ae = ea$ для довільного елемента $a \in R$. Це означає, що довільний ідемпотент $e = e^2$ кільця R є центральним.

Теорема 5 [6]. *Нехай R – абелеве кільце. Тоді такі твердження є еквівалентними:*

(i) R *є чистим кільцем*;

(ii) R *є кільцем з властивістю заміни*;

(iii) R *є кільцем ідемпотентного стабільного рангу* 1.

Теорема 6. *Нехай* K *– дуо область Ерміта. Матриця* $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *є одинично-регулярною у кільці* $R=M(2,K)$ *тоді й тільки тоді, коли існує ідемпотент* $e\in K$ *і унімодулярний рядок* $(a',b')\in K$ *такий, що* $(a,b)=$ $=e(a',b')$. *Зокрема, якщо* K *– нерозкладне кільце, тоді єдиними ненульовими одинично-регулярними матрицями в* R *з нульовим другим рядком є матриці* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *де* (a,b) *– унімодулярний рядок.*

Д о в е д е н н я. Нехай (a,b) має вигляд $e(a',b')$ де рядок $(a',b')\in K$ є унімодулярним. Оскільки K є кільцем Ерміта, то існує оборотна матриця Q така, що $(a,b)Q=(d,0)$ для довільного елемента $d\in K$. Отже, маємо $a,b\in dK$ і $K=aK+bK\subseteq dK$. Тому елемент d є оборотним і існує елемент $x\in K$ такий, що $xd=1$. Нехай $xdx=x$. Тоді $(xd-1)x=0$. Оскільки K є областю, то з $xd-1=0$ випливає, що $xd=1$. Розглянемо рівність

$$(a,b)Q\begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}=(1,0).$$

Позначимо $U^{-1}=Q\begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}$. Тоді $(a,b)U^{-1}=(1,0)\Rightarrow (a,b)=(1,0)U$. Це означає, що рядок (a,b) є першим рядком матриці $U=\begin{pmatrix} a & b \\ * & * \end{pmatrix}$. Тоді його можна доповнити до оборотної матриці $\begin{pmatrix} a' & b' \\ * & * \end{pmatrix}$, і рівність $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ * & * \end{pmatrix}$ свідчить, що A є одинично-регулярною матрицею.

Навпаки, припустимо, що матриця A є одинично-регулярною. Тоді $A=EU$, де $E=E^2$ і $U\in GL(2,K)$.

Нехай $E=\begin{pmatrix} e & r \\ s & t \end{pmatrix}$ і $U=\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$. Тоді маємо $(s,t)=(0,0)U^{-1}\equiv(0,0)$, а звідси $E=E^2=\begin{pmatrix} e^2 & er \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отже, $e=e^2$, $r=er$. Тому $(a,b)=e(a',b')$, де $(a',b')=(w,x)+r(y,z)$ є унімодулярним рядком, оскільки (w,x) і (y,z) є рядками матриці з $GL(2,K)$. Доведення завершено. ♦

Проблема дослідження чистоти матриці $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ складніша. Природно, що чисті елементи з K відіграють ключову роль у її розв'язанні.

Наслідок 1. *Нехай* $a\in K$ *– чистий елемент. Тоді для довільного елемента* $b\in K$ *матриця* $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *є чистою в* R.

Д о в е д е н н я. Нехай $a=e+u$, де $e^2=e$ і $u\in U(K)$. Тоді рівність

$$A=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

вказує на те, що A є чистою матрицею. Доведення завершено. ♦

Наслідок 2. *Нехай* K *– нерозкладне кільце. Якщо* $a\in K\setminus\{0\}$ *є чистим елементом, який не є оборотним в* K, *то матриця* $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *є чистою, але не є одинично-регулярною в* $R=M(2,K)$.

1. *Васерштейн Л. Н.* Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств // Функц. анализ и его прил. – 1971. – 5, № 2. – С. 17–27.
   Те саме: *Vasershtein L. N.* Stable rank of rings and dimensionality of topological spaces // Funct. Anal. Appl. – 1971. – 5, No. 2. – P. 102–110.
   https://doi.org/10.1007/BF01076414.
2. *Гаталевич А. І.* Про адекватні і узагальнено адекватні дуо-кільця і дуо-кільця елементарних дільників // Мат. студії. – 1998. – 9, № 2. – С. 115–119.
3. *Забавський Б. В., Комарницький М. Я.* Теорема коенового типу для адекватності та кільця елементарних дільників // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 4. – С. 94–98.
   Те саме: *Zabavs'kyi B. V., Komarnyts'kyi M. Ya.* Cohen-type theorem for adequacy and elementary divisor rings // J. Math. Sci. – 2010. – 167, No. 1. – P. 107–111.
4. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publ. Math. I.H.É.S. – 1964. – 22. – P. 5–60.
5. *Brewer J. W., Naudé C., Naud G.* On Bézout domains, elementary divisor rings, and pole assignability // Commun. Algebra. – 1984. – 12, No. 24. – P. 2987–3003.
6. *Chen H.* Rings with many idempotents // Int. J. Math. & Math. Sci. – 1999. – 22, No. 3. – P. 547–558. – https://doi.org/10.1155/S0161171299225471.
7. *Ehrlich G.* Unit-regular rings // Portugal. Math. – 1968. – 27, No. 4. – P. 209–212.
8. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – 49, No. 4. – P. 225–236.
   – https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1943-07886-X.
9. *Henriksen M.* On a class of regular rings that are elementary divisor rings // Arch. Math. – 1973. – 24, No. 1. – P. 133–141. – https://doi.org/10.1007/BF01228189.
10. *Lam T. Y.* A crash course on stable range, cancellation. substitution and exchange // J. Algebra Appl. – 2004. – 03, No. 03. – P. 301–343.
    – https://doi.org/10.1142/S0219498804000897.
11. *Lam T. Y.* Serre's conjecture. – Lect. Notes Math. Vol. 635. – Berlin etc.: Springer, 1978. – xviii+230 p. – doi.10.1007/BFb0068340.
12. *Menal P., Moncasi J.* On regular rings with stable range 2 // J. Pure Appl. Algebra. – 1982. – 24, No. 1. – P. 25–40. – https://doi.org/10.1016/0022-4049(82)90056-1.
13. *Nicholson W. K* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – 229. – P. 269–278. – https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1977-0439876-2.
14. *Vaserstein L. N.* Bass's first stable range condition // J. Pure Appl. Algebra. – 1984. – 34, No. 2-3. – P. 319–330. – https://doi.org/10.1016/0022-4049(84)90044-6.
15. *Zabavsky B. V.* Diagonalizability theorem for matrices over ring with finite stable range // Algebra and Discrete Mathematics. – 2005. – 4, No. 1. – P. 151–165.
16. *Zabavsky B.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable range // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 206–211.

СТАБИЛЬНЫЙ РАНГ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕКОММУТАТИВНЫХ КОЛЕЦ

Доказано, что адекватное справа дуо кольцо с ненулевым радикалом Джекобсона имеет стабильный ранг один. Установлено, что класс полных матриц порядка 2 над дуо кольцом элементарных делителей имеет стабильный ранг один. Исследованы некоторые классы единично-регулярных и чистых матриц над дуо кольцом.

***Ключевые слова**: стабильный ранг, дуо кольцо, кольцо Эрмита, кольцо элементарных делителей, полная матрица.*

STABLE RANGE OF SOME CLASSES OF NON-COMMUTATIVE RINGS

It is proved that the right adequate duo ring with a nonzero Jacobson radical has a stable range one. It is established that the class of complete matrices of order 2 over the duo ring of elementary divisors has a stable range one. Some classes of unit-regular and clean matrices over a duo ring are studied.

Key words: stable range, duo ring, Hermite ring, elementary divisors ring, complete matrix.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.02.19