УДК 539.3

В. Г. Попов[✉], О. В. Литвин

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПРУЖНОГО ТІЛА З ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ У ВИГЛЯДІ ЛАМАНОЇ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ ХВИЛЬОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ[*]

Розв'язано задачу про визначення напруженого стану в околі тунельного жорсткого включення з перерізом у вигляді ламаної лінії. Включення міститься у пружному просторі, в якому поширюються плоскі гармонічні хвилі поздовжнього зсуву. Задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями, яку розв'язано наближено за допомогою числового методу, що враховує реальну асимптотику невідомих функцій з використанням спеціальних квадратурних формул для сингулярних інтегралів.

Ключові слова: *пружний простір, жорстке тунельне включення, системи сингулярних інтегральних рівнянь, нерухомі особливості.*

Вступ. Проблему визначення двовимірного динамічного напруженого стану в тілах з тонкими дефектами у вигляді відрізків прямої або дуги гладкої кривої на сьогоднішній час можна вважати вирішеною. Однак реальні дефекти бувають складнішої конфігурації, наприклад, з перетинами, розгалуженнями або у вигляді кусково-гладких кривих. Задачі про визначення напруженого стану в тілах з такими дефектами вивчено значно гірше, що, на нашу думку, пов'язано з математичними труднощами при їх розв'язанні за допомогою методу інтегральних рівнянь, зокрема, при зведенні останніх до сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Найбільш дослідженими є задачі рівноваги тіл з тріщинами. У роботах [1, 14] вдалось отримати точні розв'язки і визначити коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) методом Вінера – Хопфа для тіл із розгалуженими тріщинами. В [2, 6, 15] вивчено напружений стан поблизу розгалужених, ламаних і крайових тріщин за допомогою числових методів. Методом граничних інтегральних рівнянь досліджено напружений стан тіл з включеннями у вигляді ламаної або розгалужених включень у [3, 7]. Ці роботи об'єднує те, що при побудові числових розв'язків не враховується справжня асимптотика розв'язків, яка внаслідок наявності нерухомих особливостей є відмінною від кореневої.

У [8, 9] досліджено взаємодію плоских гармонічних хвиль з двома тріщинами, що виходять з однієї точки, і з тріщиною у вигляді триланкової ламаної. Для розв'язання отриманих при цьому систем сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з нерухомими особливостями запропоновано числовий метод, що враховує справжні особливості розв'язків і ґрунтується на застосуванні спеціальних квадратурних формул для сингулярних інтегралів. Тут цей метод поширено для розв'язання задачі про взаємодію хвиль поздовжнього зсуву з включенням, що є ламаною в перерізі.

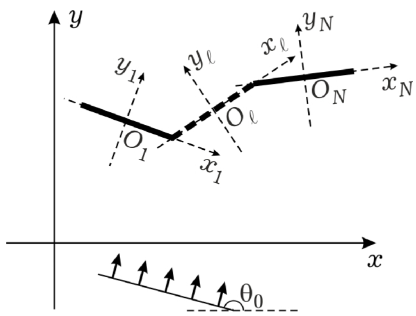

Рис. 1

1. Постановка задачі. Нехай ізотропне пружне тіло перебуває в умовах антиплоскої деформації та містить абсолютно жорстке тунельне включення, яке в перерізі xOy є ламаною, складеною з N ланок довжини $2d_k$,

✉ dr.vg.popov@gmail.com

* Рекомендовано до друку Програмним комітетом 10-ї Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (17–20 вересня 2019 р., Львів, Україна, http://iapmm.lviv.ua/mpmns2019)

$k = 1, 2, \ldots, N$ (рис. 1). У тілі поширюються гармонічні хвилі поздовжнього зсуву, що спричинюють переміщення вздовж осі Oz

$$W_k^0(x, y) = A \exp\left(i\text{æ}_2(x \cos\theta_0 + y \sin\theta_0)\right), \quad \text{æ}_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{G}, \quad k = 1, \ldots, N, \quad (1)$$

де G, ρ – модуль зсуву та густина середовища, ω – частота коливань, θ_0 – кут між напрямком поширення хвилі та віссю Ox. Залежність від часу визначається множником $\exp(-i\omega t)$, який тут і надалі відкинуто.

Нехай $W(x, y)$ – z-компонента вектора переміщень розсіяного хвильового поля, яка є єдиною відмінною від нуля компонентою цього вектора за антиплоскої деформації і в системі координат xOy задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\Delta W + \text{æ}_2^2 W = 0, \quad (2)$$

де Δ – оператор Лапласа.

Для формулювання межових умов на включенні пов'яжемо з кожною його ланкою локальну систему координат $O_\ell x_\ell y_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots, N$, так, що вісь $O_\ell x_\ell$ спрямовано вздовж відповідної ланки включення, а середину ланки взято за початок координат $O_\ell(a_\ell, b_\ell)$. Зв'язок між системами координат визначимо формулами

$$\begin{cases} x = a_k + x_k \cos\beta_k - y_k \sin\beta_k, \\ y = b_k + x_k \sin\beta_k + y_k \cos\beta_k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_\ell = (x - a_\ell)\cos\beta_\ell + (y - b_\ell)\sin\beta_\ell, \\ y_\ell = -(x - a_\ell)\sin\beta_\ell + (y - b_\ell)\cos\beta_\ell; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_k = A_{\ell k} + x_\ell \cos\beta_{\ell k} - y_\ell \sin\beta_{\ell k}, \\ y_k = B_{\ell k} + x_\ell \sin\beta_{\ell k} + y_\ell \cos\beta_{\ell k}; \end{cases}$$

$$A_{\ell k} = (a_\ell - a_k)\cos\beta_k + (b_\ell - b_k)\sin\beta_k,$$

$$B_{\ell k} = -(a_\ell - a_k)\sin\beta_k + (b_\ell - b_k)\cos\beta_k,$$

$$\beta_{\ell k} = \beta_\ell - \beta_k, \quad k, \ell = 1, \ldots, N. \quad (3)$$

Тут β_ℓ – кут нахилу ланки з номером ℓ відносно осі Ox.

Межові умови з боку зовнішнього середовища на включенні, з огляду на його малу товщину h, запишемо відносно серединної поверхні. Припустимо, що включення та пружне середовище контактують ідеально, тобто

$$W_\ell^1(x_\ell, 0) = c - W_\ell^0(x_\ell, 0), \quad W_\ell^0(x_\ell, 0) = A \exp(i\text{æ}_2 z_{0\ell}),$$

$$z_{0\ell} = a_\ell \cos\theta_0 + b_\ell \sin\theta_0 + x_\ell \cos(\beta_\ell - \theta_0) - y_\ell \sin(\beta_\ell - \theta_0),$$

$$\ell = 1, \ldots, N. \quad (4)$$

На включенні ж припускаємо розрив дотичних напружень:

$$\tau_{zy_\ell}(x_\ell, +0) - \tau_{zy_\ell}(x_\ell, -0) = \chi_\ell(x_\ell), \quad -d_\ell < x_\ell < d_\ell, \quad \ell = 1, \ldots, N, \quad (5)$$

де $\chi_\ell(x_\ell)$ – невідомий стрибок дотичних напружень на ℓ-й ланці включення.

До рівностей (4) входить невідоме переміщення c включення під дією падаючої хвилі. Його визначимо з рівняння руху включення, яке у випадку гармонічних коливань має вигляд

$$-\omega^2 c \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell = \sum_{\ell=1}^{N} \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_\ell(\eta) d\eta \,, \tag{6}$$

де m_ℓ – маса ланки включення з номером $\ell = 1, \ldots, N$.

2. Розв'язання задачі. Для розв'язання задачі (1)–(6) для кожної ланки включення з номером ℓ у системі координат $O_\ell x_\ell y_\ell$ побудуємо розривний розв'язок рівняння (2) зі стрибком (5) [10, 11]

$$W_\ell^1(x_\ell, y_\ell) = \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \frac{\chi_\ell(\eta)}{G} r_2(\eta - x_\ell, y_\ell) d\eta \,,$$

$$r_2(\eta - x_\ell, y_\ell) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(æ_2 \sqrt{(\eta - x_\ell)^2 + y_\ell^2} \right). \tag{7}$$

Тут $H_0^{(1)}$ – функція Ганкеля. Після цього переміщення розсіяного хвильового поля в перерізі xOy подамо у вигляді

$$W(x, y) = \sum_{\ell=1}^{N} W_\ell^g(x, y) \,, \tag{8}$$

де $W_\ell^g(x, y)$ отримано з (7) внаслідок перетворення координат за формулами (3) при $k = \ell$.

Щоб скористатись формулами (8), потрібно визначити невідомі стрибки напружень на ланках включення за допомогою умов (4). Для цього їх попередньо замінимо двома еквівалентними рівностями

$$\frac{\partial W_\ell^1(x_\ell, 0)}{\partial x_\ell} = -\frac{\partial W_\ell^0(x_\ell, 0)}{\partial x_\ell}, \quad W_\ell^1(-d_\ell, 0) = c - W_\ell^0(-d_\ell, 0) \,,$$

$$\ell = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Перша рівність (9) є результатом диференціювання першої рівності (4), а друга – умова еквівалентності продиференційованої і вихідної рівностей. Після перетворення координат у (8) за допомогою останніх формул (3) і підстановки в (9) отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь із додатковими умовами:

$$\int_{-1}^{1} \left(-\frac{\mathbf{E}}{\tau - \zeta} + \mathbf{Q}(\tau, \zeta) + \mathbf{R}(\tau, \zeta) \right) \mathbf{\Phi}(\tau) d\tau = \mathbf{F}(\zeta), \quad -1 < \zeta < 1 \,,$$

$$\int_{-1}^{1} (\mathbf{U} \ln|\tau - 1| + \mathbf{D}(\tau)) \mathbf{\Phi}(\tau) d\tau = \mathbf{F}_0 \,. \tag{10}$$

Тут $\mathbf{E}$ – одинична матриця порядку $N \times N$, $\mathbf{U}$ – діагональна матриця порядку $N \times N$ з елементами $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ на головній діагоналі,

$$\mathbf{Q}(\tau, \zeta) = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q_{21} & 0 & q_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{32} & 0 & q_{34} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{N-1,N-2} & 0 & q_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & q_{N,N-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Phi}(\tau)=\begin{pmatrix}\varphi_1(\tau)\\ \varphi_2(\tau)\\ \vdots\\ \varphi_N(\tau)\end{pmatrix},\quad \varphi_\ell(\tau)=\frac{\chi_\ell(d_\ell\tau)}{G},\quad \mathbf{F}(\zeta)=\begin{pmatrix}f_1(\zeta)\\ f_2(\zeta)\\ \vdots\\ f_N(\zeta)\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}_0=\begin{pmatrix}f_{10}\\ f_{20}\\ \vdots\\ f_{N0}\end{pmatrix},$$

$$f_\ell(\zeta)=-2\pi iA_0æ_0\cos(\beta_\ell-\theta_0)\exp(iæ_0r_{0\ell}(\zeta)),\quad æ_0=æ_2d,$$

$$f_{\ell 0}=c_0-A_0\exp(iæ_0r_{0\ell}(-1)),$$

$$r_{0\ell}(\zeta)=\varepsilon_\ell\cos\theta_0+\delta_\ell\sin\theta_0+\gamma_\ell\zeta\cos(\beta_\ell-\theta_0),$$

$$\mathbf{R}(\tau,\zeta)=\{R_{\ell k}(\tau,\zeta)\},\quad \mathbf{D}(\tau)=\left\{D_{\ell k}(\tau)+\frac{\pi}{\ell_0}\right\},\quad \ell_0=\bar{\rho}\varepsilon æ_0^2\sum_{\ell=1}^{N}\gamma_\ell,$$

$$\eta=d_\ell\tau,\ \ x_\ell=d_\ell\zeta,\ \ \gamma_\ell=\frac{d_\ell}{d},\ \ \varepsilon_\ell=\frac{a_\ell}{d},\ \ \delta_\ell=\frac{b_\ell}{d},\ \ d=\max(d_1,\ldots,d_N),$$

$$q_{\ell\ell\mp1}(\tau,\zeta)=\frac{\gamma_{\ell\mp1}\left(\gamma_\ell(\zeta\pm1)-\gamma_{\ell\mp1}(\tau\mp1)\cos\beta_{\ell\ell\mp1}\right)}{s_{\ell\ell\mp1}(\tau,\zeta)},$$

$$s_{\ell\ell\mp1}=\gamma_{\ell\mp1}^2(\tau\mp1)^2-2\gamma_\ell\gamma_{\ell\mp1}(\tau\mp1)(\zeta\pm1)\cos\beta_{\ell\ell\mp1}+\gamma_\ell^2(\zeta\pm1)^2. \qquad (11)$$

Функції $q_{\ell\ell\mp1}(\tau,\zeta)$, які визначають ненульові елементи матриці $\mathbf{Q}(\tau,\zeta)$, мають особливості при $\tau=\pm1$, $\zeta=\mp1$. Матриці $\mathbf{R}(\tau,\zeta)$ і $\mathbf{D}(\tau)$ складаються з функцій, що визначають регулярні інтеграли. До системи (10) необхідно долучити рівність (6) для визначення невідомої амплітуди

$$c_0=-\frac{1}{2\ell_0}\sum_{\ell=1}^{N}\gamma_\ell\int_{-1}^{1}\varphi_\ell(\tau)d\tau,\quad c_0=\frac{c}{d},\quad \bar{\rho}=\frac{\rho_1}{\rho},\quad \varepsilon=\frac{h}{d}, \qquad (12)$$

де ρ_1, h – відповідно густина матеріалу і товщина включення.

3. Наближене розв'язання системи інтегральних рівнянь. Наявність у сингулярній складовій інтегральних рівнянь (10) нерухомих особливостей при $\tau=-1$, $\zeta=1$ та $\tau=1$, $\zeta=-1$ впливає на поведінку її розв'язків в околі точок $\tau=\pm1$. Їхню асимптотику в околі цих точок визначимо з використанням підходу [4, 9]. Шукатимемо невідомі функції у вигляді

$$\varphi_\ell(\tau)=(1-\tau)^{-\sigma_{\ell+1}}(1+\tau)^{-\sigma_\ell}\psi_\ell(\tau),$$

$$\sigma_1=\sigma_{N+1}=\frac{1}{2},\quad \sigma_\ell=\begin{cases}\dfrac{\alpha_{\ell-1}}{\alpha_{\ell-1}-\pi}, & -\pi\le\alpha_{\ell-1}<0,\\[2mm] \dfrac{\alpha_{\ell-1}}{\alpha_{\ell-1}+\pi}, & 0\le\alpha_{\ell-1}<\pi,\end{cases}$$

$$\alpha_{\ell-1}=\beta_\ell-\beta_{\ell-1},\quad 0\le\beta_\ell<\pi. \qquad (13)$$

Розглянемо функції

$$\psi_{0\ell}(\tau)=\psi_\ell(\tau)-\frac{\psi_\ell(-1)}{2}(1-\tau)-\frac{\psi_\ell(1)}{2}(1+\tau). \qquad (14)$$

Тоді $\psi_{0\ell}(\pm1)=0$ і

$$\psi_{0\ell}(\tau)=(1-\tau)^2g_\ell(\tau), \qquad (15)$$

де $g_\ell(\tau)$ – нові невідомі функції, що задовольняють умови Гельдера при $\tau\in(-1,1)$.

Підстановка (14), (15) у (13) приводить до такого подання невідомих функцій:

$$\varphi_\ell(\tau) = (1-\tau)^{\sigma_{\ell+1}}(1+\tau)^{1-\sigma_\ell} g_\ell(\tau) + (1-\tau)^{1-\sigma_{\ell+1}}(1+\tau)^{-\sigma_\ell}\frac{\psi_\ell(-1)}{2} +$$

$$+(1-\tau)^{-\sigma_{\ell+1}}(1+\tau)^{1-\sigma_\ell}\frac{\psi_\ell(1)}{2}. \tag{16}$$

Далі наближений метод розв'язання ґрунтується на апроксимації функцій $g_\ell(\tau)$ інтерполяційним многочленом $(n-1)$-го степеня

$$g_\ell(\tau) \approx g_{\ell,n-1}(\tau) = \sum_{m=1}^{n} g_{m\ell}\frac{Q_{n\ell}(\tau)}{(\tau-\tau_{m\ell})Q'_{n\ell}(\tau_{m\ell})}, \quad g_{m\ell} = g_\ell(\tau_{m\ell}), \tag{17}$$

де $Q_{n\ell}(\tau) = P_n^{1-\sigma_{\ell+1},1-\sigma_\ell}(\tau)$ – многочлени Якобі, $\tau_{m\ell}$ – корені цих многочленів. Це дає можливість використати для інтегралів з ядром Коші квадратурні формули [1, 6]

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_\ell(\tau)}{\tau-\zeta_{j\ell}}d\tau = \sum_{m=1}^{n} g_{m\ell}\frac{A_{m\ell}}{\tau_{m\ell}-\zeta_{j\ell}} + \frac{\psi_\ell(-1)}{2}b_{j\ell}^{-} + \frac{\psi_\ell(1)}{2}b_{j\ell}^{+}, \tag{18}$$

де $\zeta_{j\ell}$ – корені функцій Якобі другого роду $J_n^{1-\sigma_{\ell+1},1-\sigma_\ell}(\zeta)$, $j = 1,\dots,n+1$, а $A_{m\ell}$ – коефіцієнти відповідної квадратурної формули Ґаусса – Якобі [4].

Для отримання формул (18) інтеграли

$$b_{j\ell}^{-} = \int_{-1}^{1}\frac{(1-\tau)^{1-\sigma_{\ell+1}}(1+\tau)^{-\sigma_\ell}}{\tau-\zeta_{j\ell}}d\tau, \quad b_{j\ell}^{+} = \int_{-1}^{1}\frac{(1-\tau)^{-\sigma_{\ell+1}}(1+\tau)^{1-\sigma_\ell}}{\tau-\zeta_{j\ell}}d\tau$$

знайдено за допомогою методу [12], що ґрунтується на їх поданні згорткою Мелліна. Застосування теореми про згортку дає можливість подати ці інтеграли у вигляді суми лишків у полюсах, звідки

$$b_{j\ell}^{\pm} = \pm 2^{1-\sigma_\ell-\sigma_{\ell+1}}\Gamma(2-\nu^\pm-\sigma_{\ell+1})\times$$

$$\times\left(y^{\nu^\pm-\sigma_\ell}\operatorname{ctg}(\pi\sigma_\ell)\sin(\pi\sigma_{\ell+\nu^\pm})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\nu^\pm+\sigma_{\ell+\nu^\pm})y^k}{k!(k+\sigma_{\ell+1}-\nu^\mp)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(\pi(\sigma_\ell+\sigma_{\ell+1}))}{\sin(\pi\sigma_\ell)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\sigma_\ell+\sigma_{\ell+1})y^k}{(1-k-\sigma_\ell-\sigma_{\ell+1})\Gamma(k+\sigma_\ell+\nu^\mp)}\right),$$

$$y = (1\pm\zeta_{j\ell})/2, \quad \nu^\pm = (1\pm 1)/2.$$

Квадратурні формули (18) дозволяють наближений розв'язок (10) знайти методом механічних квадратур з використанням коренів функцій Якобі як точок колокації. Але для цього потрібні квадратурні формули для інтегралів з нерухомими особливостями

$$E_\ell^{\pm} = \int_{-1}^{1} q_{\ell\ell\pm1}(\tau,\zeta_{j\ell})\varphi_{\ell\pm1}(\tau)d\tau, \quad \ell+1 = 2,\dots,N, \quad \ell-1 = 1,\dots,N-1.$$

Якщо $1\pm\zeta_{j\ell} > r > 0$, де r – деяке число, то для обчислення цих інтегралів можна безпосередньо застосовувати формули Ґаусса – Якобі. При $1\pm\zeta_{j\ell}\to +0$ використаємо [5, 6] подання (6) та апроксимації (17):

$$E_\ell^{\pm} = \sum_{m=1}^{n}\frac{g_{m\ell\pm1}}{Q'_{n\ell\pm1}(\tau_{m\ell\pm1})}\int_{-1}^{1}\frac{q_{\ell\ell\pm1}(\tau,\zeta)}{\tau-\tau_{m\ell\pm1}}v_{\ell\pm1}(\tau)Q_{n\ell\pm1}(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{\psi_\ell(-1)}{2}s_{\ell\ell\pm1}^{-} + \frac{\psi_\ell(1)}{2}s_{\ell\ell\pm1}^{+},$$

$$v_{\ell\pm1}(\tau) = (1-\tau)^{1-\sigma_{\ell+1}}(1+\tau)^{1-\sigma_\ell}\,, \tag{19}$$

$$s^{\pm}_{j\ell\ell\pm1} = \int_{-1}^{1} q_{\ell\ell\pm1}(\tau,\zeta_{j\ell})(1-\tau)^{\nu^{\mp}-\sigma_{\ell+1}}(1+\tau)^{\nu^{\pm}-\sigma_\ell}\,d\tau\,. \tag{20}$$

В інтегралах (19) подамо підінтегральні функції у вигляді

$$\frac{q_{\ell\ell\pm1}(\tau,\zeta)}{\tau-\tau_{m\ell\pm1}} = \frac{q_{\ell\ell\pm1}(\tau_{m\ell\pm1},\zeta)}{\tau-\tau_{m\ell\pm1}} - \\ - \frac{\gamma^2_{\ell\pm1}(\tau_{m\ell}\pm1)q_{\ell\pm1}(\tau,\zeta)}{s_{\ell\ell\pm1}(\tau_{\ell\pm1},\zeta)} - \frac{\gamma_\ell\gamma_{\ell\pm1}(\zeta\mp1)q_{\ell\pm1}(\tau,\zeta)}{s_{\ell\ell\pm1}(\tau_{\ell\pm1},\zeta)}\,. \tag{21}$$

Після підстановки (21) в (19) отримані інтеграли обчислимо з використанням методу [5, 6], що базується на застосуванні інтегрального перетворення Мелліна, звідки

$$\int_{-1}^{1}\frac{Q_{n\ell\pm1}(\tau)v_{\ell\pm1}(\tau)}{\tau-\tau_{m\ell\pm1}}\,d\tau = Q'_{n\ell\pm1}(\tau_{m\ell\pm1})A_{m\ell\pm1}\,,$$

$$I^{\pm}(\tau,\zeta) = \int_{-1}^{1} q_{\ell\ell\pm1}(\tau,\zeta)v_{\ell\pm1}(\tau)Q_{n\ell\pm1}(\tau)d\tau = \frac{\mp(\pm1)^n}{\gamma_{\ell\pm1}}B^{(1)}_n(\sigma_\ell,\sigma_{\ell+1},\beta_{\ell\ell\pm1},y)\,,$$

$$I^{\pm}(\zeta,\tau) = \int_{-1}^{1} q_{\ell\ell\pm1}(\zeta,\tau)v_{\ell\pm1}(\tau)Q_{n\ell\pm1}(\tau)d\tau = \frac{\pm(\pm1)^n}{\gamma_{\ell\pm1}}B^{(2)}_n(\sigma_{\ell+1},\sigma_\ell,\beta_{\ell\ell\pm1},y)\,,$$

$$B^{(v)}_n(\alpha,\beta,\theta,Y) = \frac{2^{2-\alpha-\beta}\Gamma(2+n-\beta)}{n!}\times \\ \times\left(-y^{1-\alpha}\frac{\sin\pi\beta}{\sin\pi\alpha}\sum_{p=0}^{\infty}pC_{pn}\cos(\theta(p+3-v-\alpha))Y^p + \right. \\ \left. + \frac{\sin\pi(\alpha+\beta)}{\sin\pi\alpha}\sum_{p=0}^{\infty}D_{pn}\cos(\theta(p+2-v))Y^p\right),\quad Y = \frac{1\mp\zeta}{\gamma_{\ell\ell\pm1}}\,,$$

$$C_{pn} = \frac{\Gamma(p+n+2-\alpha)\Gamma(p-n+\beta)}{(p-n-1+\beta)\Gamma(p+2-\beta)}\frac{(-1)^p}{p!}\,,$$

$$D_{pn} = \frac{\Gamma(p+n+1)\Gamma(p-n-1+\alpha+\beta)}{(p-n+v-3+\alpha+\beta)\Gamma(p+2-\alpha)}\frac{(-1)^p}{p!}\,,$$

$$E^{\pm}_{j\ell} = \sum_{m=1}^{n}\frac{g_{m\ell}H^{\ell\ell\pm1}_{jm}}{s_{\ell\ell\pm1}(\tau_{m\ell\pm1},\zeta_{j\ell})} + \frac{\psi_\ell(-1)}{2}s^{-}_{\ell\ell\pm1} + \frac{\psi_\ell(1)}{2}s^{+}_{\ell\ell\pm1}\,, \tag{22}$$

$$H^{\ell\ell\pm1}_{jm} = \frac{1}{Q'_{n\ell}(\tau_{m\ell\pm1})}\left(q_{\ell\ell\pm1}(\tau_{m\ell\pm1},\zeta_{j\ell\mp1})Q'_{n\ell}(\tau_{m\ell\pm1})A_{m\ell\pm1} - \right. \\ - \frac{\gamma_\ell\gamma_{\ell\pm1}(\zeta_{j\ell\mp1}\mp1)}{Q_{n\ell}(\tau_{m\ell\pm1},\zeta_{j\ell\mp1})}I^{\pm}(\zeta_{j\ell\mp1},\tau_{m\ell\pm1}) - \\ \left. - \frac{\gamma^2_{\ell\pm1}(\tau_{m\ell}\pm1)}{Q_{n\ell}(\tau_{m\ell\pm1},\zeta_{j\ell\mp1})}I^{\pm}(\tau_{m\ell\pm1},\zeta_{j\ell\mp1})\right).$$

Аналогічно при $1\pm\zeta_{j\ell}\to+0$ обчислимо інтеграли (20)

$$s^{\pm}_{j\ell\ell+1} = 2^{1-\sigma_\ell-\sigma_{\ell+1}}\Gamma(2-\nu^{\pm}-\sigma_{\ell+1})\times$$

$$\times\left(\left(\frac{\sin\pi\sigma_{\ell+1}}{\sin\pi\sigma_\ell}\right)^{+1}\left(\frac{y}{\gamma_{\ell\ell+1}}\right)^{\nu^\pm-\sigma_\ell}\times\right.$$

$$\times\sum_{p=0}^{\infty}C^\pm\cos\bigl((\sigma_\ell-p-1-\nu^\pm)\beta_{\ell+1}\bigr)\left(\frac{y}{\gamma_{\ell\ell+1}}\right)^p\pm$$

$$\left.\pm\frac{\sin\pi(\sigma_\ell+\sigma_{\ell+1})}{\sin\pi\sigma_\ell}\sum_{p=0}^{\infty}D^\pm\cos((p+1)\beta_{\ell\ell+1})\left(\frac{y}{\gamma_{\ell\ell+1}}\right)^p\right),$$

$$s^{\pm}_{\ell\ell+1}=-s^{\mp}_{\ell\ell-1},$$

$$C^\pm=\frac{\Gamma(p+\sigma_{\ell+1}+\nu^\pm)}{p+\sigma_{\ell+1}-\nu^\mp}\frac{(-1)^p}{p!},$$

$$D^\pm=\frac{\Gamma(p+\sigma_\ell+\sigma_{\ell+1})(-1)^p}{(p+\sigma_\ell+\sigma_{\ell+1}-1)\Gamma(p+\sigma_\ell+\nu^\mp)}.$$

Для інтегралів з логарифмічною функцією невідомі функції $g_\ell(\tau)$ наближаємо інтерполяційними многочленами (17), які попередньо перетворено за тотожністю Дарбу – Кристофеля [13]. Після цього, аналогічно як в [6, 10], отримуємо формули

$$\int_{-1}^{1}\varphi_\ell(\tau)\ln|\tau\pm1|\,d\tau=\sum_{m=1}^{n}A_{m\ell}g_{m\ell}\theta_{m\ell}+\frac{\psi_\ell(-1)}{2}E^-_\ell+\frac{\psi_\ell(1)}{2}E^+_\ell, \tag{23}$$

де

$$\theta_{m\ell}=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{u_{s\ell}}{\sigma_s^2}Q_{s\ell}(\tau_{m\ell}),$$

$$u_{s\ell}=\int_{-1}^{1}(1-\tau)^{1-\sigma_{\ell+1}}(1+\tau)^{1-\sigma_\ell}Q_{s\ell}(\tau)\ln|\tau\pm1|\,d\tau.$$

Останні інтеграли визначаємо у вигляді [12]

$$u_{0\ell}=\frac{2^{3-\sigma_\ell-\sigma_{\ell+1}}\Gamma(2-\sigma_\ell)\Gamma(2-\sigma_{\ell+1})}{\Gamma(4-\sigma_\ell-\sigma_{\ell+1})}\times$$

$$\times\bigl(\ln2+\Psi(2-\sigma_{\ell+1})-\Psi(4-\sigma_\ell-\sigma_{\ell+1})\bigr),$$

$$u_{s\ell}=-\frac{2^{2-\sigma_\ell-\sigma_{\ell+1}}\Gamma(2-\sigma_\ell+s)\Gamma(2-\sigma_{\ell+1})}{s\Gamma(4-\sigma_\ell-\sigma_{\ell+1}+s)}.$$

Тут $\Psi(x)$ – логарифмічна похідна Γ-функції. Аналогічно знаходимо

$$E^\pm_\ell=\int_{-1}^{1}\ln|\tau\pm1|(1-\tau)^{\nu^\mp-\sigma_{\ell+1}}(1+\tau)^{\nu^\pm-\sigma_\ell}\,d\tau,$$

$$E^\pm_\ell=\frac{2^{2-\sigma_\ell-\sigma_{\ell+1}}\Gamma(1+\nu^\mp-\sigma_\ell)\Gamma(1+\nu^\pm-\sigma_{\ell+1})}{\Gamma(3-\sigma_\ell-\sigma_{\ell+1})}\times$$

$$\times\bigl(\ln2+\Psi(1+\nu^\pm-\sigma_{\ell+1})-\Psi(3-\sigma_\ell-\sigma_{\ell+1})\bigr).$$

Знайдені формули для сингулярних інтегралів (18), (22), (23) і квадратурні формули Гауса – Якобі для інтегралів з регулярними ядрами дозволяють замінити (10) системою лінійних алгебраїчних рівнянь. У результаті її розв'язання знаходимо $g_{m\ell}=g(\tau_{m\ell})$, $\psi_\ell(\pm1)$, $\ell=1,\dots,N$, c_0. Після цього наближений розв'язок системи (10) визначаємо за формулами (12), (16).

Однією з важливих характеристик напруженого стану поблизу включення є коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). Він визначається з відомого асимптотичного подання [2, 15] напружень в околі кінців включення. З урахуванням (11), (16) після обчислення границь знаходимо прості формули для безпосереднього визначення КІН:

$$K_1 = G\sqrt{d_1}\,\frac{\psi_1(-1)}{2^{\sigma_2}}, \quad K_2 = G\sqrt{d_N}\,\frac{\psi_N(1)}{2^{\sigma_N}}.$$

4. Результати числового аналізу. Для демонстрації можливостей запропонованого методу розглянуто триланкове абсолютно жорстке включення з ланками однакової довжини d, що є симетричними відносно осі Oy (рис. 2). На основі отриманих формул побудовано графіки залежності КІН та амплітуди коливань включення від безрозмірного хвильового числа $\ae_0$, а також досліджено практичну збіжність запропонованого методу числового розв'язання інтегральних рівнянь. Внаслідок симетрії $K_1 = K_2 = K$.

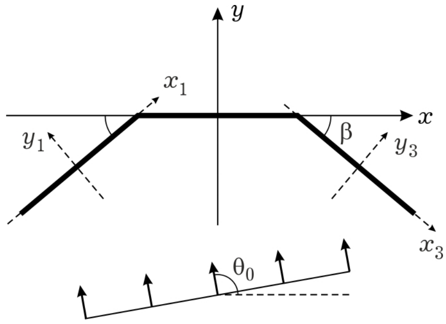

Рис. 2

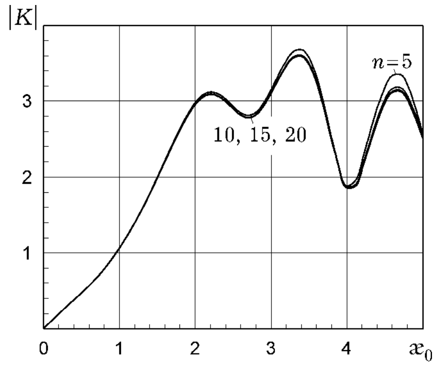

Рис. 3

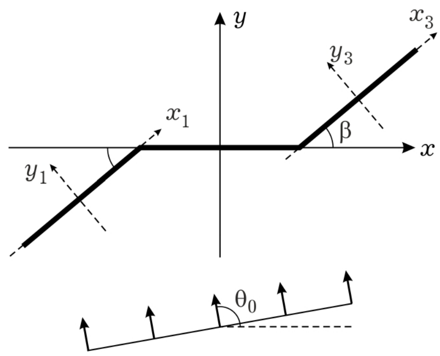

Рис. 4

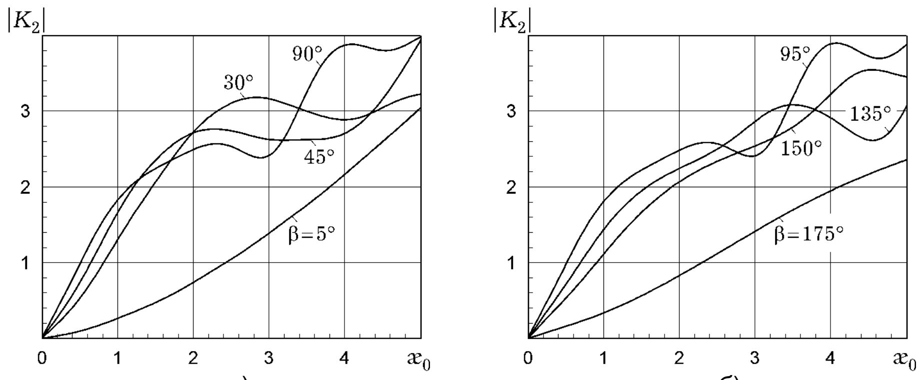

Рис. 5

Результати наведено на рис. 3 у вигляді залежностей КІН $|K|$ від $\ae_0$, де кожна крива відповідає вказаній кількості вузлів інтерполяції. Розрахунки виконано при $\theta_0 = 270°$ і $\beta = 45°$. Показано, що для отримання значень КІН з похибкою, що не перевищує $0.1\,\%$, можна брати до 20 вузлів інтерполяції в (17). Для хвиль із малою частотою $\ae_0 \le 3$ достатньо 5 вузлів.

Для дослідження впливу на значення КІН форми включення розглянуто включення, зображене на рис. 4. Відношення довжин ланок взято з попереднього випадку. Досліджено вплив кута β на залежність КІН від частоти. За такого розташування ланок включення побудовано графіки залежності КІН від $\varkappa_0$ при $\theta_0 = 270°$ (рис. 5).

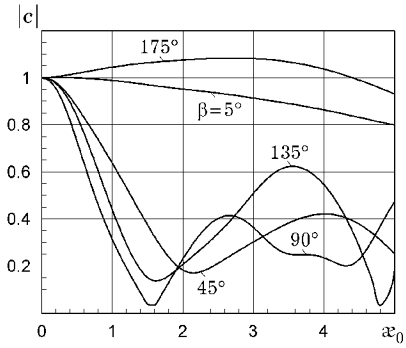

Рис. 6

Аналіз графіків на рис. 5***а***, рис. 5***б*** вказує на те, що у випадку, коли ланки включення розташовані практично на одній прямій, значення КІН монотонно зростають. З ростом кута між ланками включення і віссю Ox залежність КІН від $\varkappa_0$ ускладнюється, при цьому існують частоти, за яких КІН набувають максимальних значень. На рис. 6 наведено графіки залежності амплітуди $|c|$ від $\varkappa_0$ при зміні кута β та поширенні падаючої хвилі під кутом $\theta_0 = 90°$. Найбільшого значення амплітуда набуває, коли ланки включення розташовані майже на одній прямій. Зі зростанням кута між ланками включення та віссю Ox значення амплітуди зменшуються і мають залежність від $\varkappa_0$, відмінну від монотонної.

Висновки. Побудовано числовий розв’язок задачі про визначення напружено-деформованого стану в околі тонкого жорсткого включення у вигляді ламаної при гармонічних коливаннях поздовжнього зсуву, що ґрунтується на наближеному методі розв’язання системи сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Врахування реальної особливості розв’язків і застосування до сингулярних інтегралів спеціальних квадратурних формул забезпечило швидку збіжність і стабільні числові результати в широкому частотному діапазоні. Отримані наближені формули для обчислення КІН і амплітуди коливань включення дали можливість дослідити вплив на їхні значення частоти коливань і конфігурації включення та встановити низку якісних ефектів. Вказано на наявність частот, за яких значення КІН і амплітуда коливання включення сягають максимуму.

1. *Андреев А. В.* Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 1. – С. 126–146.
   Те саме: *Andreev A. V.* Direct numerical method for solving singular integral equations of the first kind with generalized kernels // Mech. Solids. – 2005. – **40**, No. 1. – P. 104–119.
2. *Афян Б. А.* Об интегральных уравнениях с неподвижными особенностями в теории ветвящихся трещин // Докл. АН АрмССР. – 1984. – **79**, № 4. – С. 177–181.
3. *Васільєв К. В., Пастернак Я. М., Сулим Г. Т.* Поздовжній зсув безмежного тіла з тонким дволанковим пружним включенням // Вісн. Дон. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2010. – № 2. – С. 55–63.
4. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. – Москва: Наука, 1967. – 500 с.
5. *Литвин О. В., Попов В. Г.* Взаємодія гармонічної хвилі поздовжнього зсуву з *V*-подібним включенням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 1. – С. 96–106.
   Те саме: *Lytvyn O. V., Popov V. H.* Interaction of harmonic longitudinal shear waves with *V*-shaped inclusions // J. Math. Sci. – 2019. – **240**, No. 2. – P. 113–128. – https://doi.org/10.1007/s10958-019-04341-7.
6. *Литвин О. В., Попов В. Г.* Напружений стан у пружному тілі з триланковим жорстким включенням при гармонічному хвильовому навантаженні // Проблеми обчисл. механіки та міцності конструкцій. – 2018. – Вип. 28. – С. 183–201.

7. *Пастернак Я., Сулим Г.* Плоска задача теорії пружності анізотропного тіла з тонкими гіллястими пружними включеннями// Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2011. – **16**, № 4. – С. 23–31.
8. *Попов В. Г.* Напружений стан навколо двох тріщин, що виходять з однієї точки при гармонічних коливаннях повздовжнього зсуву // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 205–208.
9. *Попов В. Г.* Тріщина у вигляді триланкової ламаної під дією хвилі поздовжнього зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 1. – С. 112–120.
   Те саме: *Popov V. G.* A crack in the form of a three-link broken line under the action of longitudinal shear waves // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, No. 2. – P. 143–154. – https://doi.org/10.1007/s10958-017-3288-5.
10. *Попов В. Г.* Исследование полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении // Изв. РАН Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 139–146.
11. *Попов В. Г.* Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жесткое включение // Динам. системы. – 1993. – Вып. 12. – С. 35–41.
12. *Савірук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка. 1981. – 324 с.
13. *Сулим Г.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослід.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
14. *Vitek V.* Plane strain stress intensity factors for branched cracks // Int. J. Fract. – 1977. – **13**, No. 4. – P. 481–501.
15. *Yan X.* Stress intensity factors for asymmetric branched cracks in plane extension by using crack-tip displacement discontinuity elements // Mech. Res. Commun. – 2005. – **32**, No. 4. – P. 375–384. – https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2004.10.005.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ТЕЛА С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ В ВИДЕ ЛОМАНОЙ ЛИНИИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЛНОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Решена задача определения напряженного состояния в окрестности туннельного жесткого включения, которое в сечении представляет собой ломаную линию. Включение находится в упругом пространстве, в котором распространяются плоские гармонические волны продольного сдвига. Задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений с неподвижными особенностями, которая решена приближенно при помощи числового метода, учитывающего действительную асимптотику неизвестных функций с использованием специальных квадратурных формул для сингулярных интегралов.

Ключевые слова: *упругое пространство, жесткое туннельное включение, системы сингулярных интегральных уравнений, неподвижные особенности.*

THE STRESS STATE OF AN ELASTIC BODY WITH A RIGID INCLUSION WITH THE SHAPE OF A BROKEN LINE UNDER HARMONIC WAVE IMPACT

A problem on the determination of the stress state in the vicinity of a tunnel rigid inclusion with the cross-section in the form of a broken line is solved. The inclusion is located in an elastic space where plane harmonic waves of the longitudinal shift are propagating. The problem is reduced to a system of singular integral equations with fixed singularities, which was solved approximately by means of a numerical method taking into account the true asymptotic of the unknown functions and using special quadrature formulas for singular integrals.

Key words: *elastic space, rigid tunnel inclusion, systems of singular integral equations, fixed singularities.*

Одеська нац. морська акад., Одеса

Одержано
20.09.19