УДК 539.3

Б. В. Процюк[✉]

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН КУСКОВО-НЕОДНОРІДНОГО ОРТОТРОПНОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА

Визначено термопружний стан, зумовлений плоским осесиметричним температурним полем і поверхневими навантаженнями, у багатошаровому порожнистому ортотропному циліндрі з урахуванням залежностей фізико-механічних характеристик від температури і координати. Задачу термопружності зведено до розв'язання відносно радіальних переміщень систем інтегро-алгебричних рівнянь, які отримано з інтегрального подання розв'язку відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння з узагальненими похідними. При цьому використано функцію Гріна задачі пружності для багатошарового ортотропного циліндра зі сталими фізико-механічними характеристиками шарів. Розв'язок отриманих систем знайдено методом послідовних наближень, обмеженим лише першим наближенням. Числові дослідження, виконані для тришарового ортотропного циліндра з температурозалежними фізико-механічними характеристиками шарів, ілюструють високу точність визначення переміщень і напружень.

Ключові слова: *термопружний стан, багатошаровий ортотропний циліндр, залежність фізико-механічних характеристик від температури і координати, узагальнені функції, функція Ґріна, інтегро-алгебричні рівняння, метод послідовних наближень.*

Для переважної більшості елементів сучасної техніки, які залежно від призначення можуть зазнавати різноманітних термосилових навантажень, характерною є неоднорідність їхньої структури. Це зумовлено, перш за все, конструкційними та експлуатаційними вимогами, а в умовах високих перепадів температур – також і термочутливістю (температурною залежністю фізико-механічних характеристик (ФМХ)). Визначенню і дослідженню термопружної поведінки таких елементів присвячено значну кількість публікацій. Зокрема, для функціонально-ґрадієнтних циліндрів зі сталим коефіцієнтом Пуассона та степеневою залежністю решти ФМХ задачі термопружності розглянуто в працях [16, 18, 23 та ін.]. Проаналізовано [17] вплив термочутливості на температурні напруження функціонально-ґрадієнтних циліндрів. Визначено термопружний стан неоднорідних і кусково-неоднорідних циліндрів шляхом зведення задачі до систем інтегральних рівнянь Вольтерра відносно визначальних напружень [3, 5, 9, 15, 24] і до систем інтегро-алгебричних рівнянь (СІАР) [11, 12] відносно переміщень, які входять в оператори Вольтерра і Фредгольма, а також як значення на обмежувальних поверхнях підобластей. Підходи до розв'язання задач термопружності для циліндрів, у яких передбачається апроксимація ФМХ кусково-сталими функціями координати або температури, наведено в [2, 4, 8, 19, 20]. Широке застосування у задачах пружності і термопружності для неоднорідних і термочутливих тіл отримали різні модифікації методу малого параметра [3, 4, 7, 21, 22]. Метод розв'язування задач термопружності для термочутливих тіл, в основі якого лежить модель термічного шару, запропоновано в [10].

У цьому дослідженні метод [11, 12] поширюємо на задачі термопружності для багатошарових циліндричних ортотропних тіл із залежними від температури і координати ФМХ шарів. СІАР отримуємо з інтегрального подання розв'язку відповідної задачі термопружності для звичайного диференціального рівняння з узагальненими похідними з використанням функції Ґріна задачі пружності для багатошарового ортотропного циліндра зі сталими ФМХ шарів. Розв'язки цих систем знаходимо, як і в [12], методом послі-

✉ dept19@iapmm.lviv.ua

довних наближень, обмеженим лише першим наближенням. За нульове наближення вибираємо точний розв'язок задачі термопружності для багатошарового ортотропного циліндра зі сталими пружними ФМХ і заданими залежностями температурних коефіцієнтів лінійного розширення.

1. Формулювання задачі термопружності. Розглянемо пружне тіло, складене з ідеально контактуючих концентрично розташованих порожнистих ортотропних циліндрів. Вважаємо, що обмежувальні циліндричні поверхні тіла перебувають під дією рівномірно прикладених навантажень σ_0, σ_n відповідно, а торцеві − під дією зусиль, рівнодійна яких дорівнює P. Саме тіло перебуває у температурному полі, яке описується функцією

$$t(r) = t_1(r) + \sum_{i=1}^{n-1} \left[t_{i+1}(r) - t_i(r) \right] S(r - r_i) , \tag{1}$$

де $t_p(r)$, $p = 1,\ldots,n$, − відомі розподіли температур при $r_{p-1} < r < r_p$; r, r_0 і r_p − віднесені до характерного лінійного розміру ℓ відповідно радіальна координата, внутрішній радіус першого і зовнішній радіус p-го шару; n − кількість шарів; $S(\zeta)$ − функція Гевісайда.

Для визначення термопружного стану тіла за припущення, що ФМХ матеріалів шарів залежать від температури і координати, використаємо співвідношення

$$\sigma_r = c_{11}(r) \frac{du}{dr} + c_{12}(r) \frac{u}{r} + c_{13}(r)\varepsilon_z - \Theta_r(r) ,$$

$$\sigma_\varphi = c_{12}(r) \frac{du}{dr} + c_{22}(r) \frac{u}{r} + c_{23}(r)\varepsilon_z - \Theta_\varphi(r) ,$$

$$\sigma_z = c_{13}(r) \frac{du}{dr} + c_{23}(r) \frac{u}{r} + c_{33}(r)\varepsilon_z - \Theta_z(r) \tag{2}$$

та отримане аналогічно, як у [14], рівняння з узагальненими похідними стосовно віднесеного до ℓ радіального переміщення $u(r)$:

$$\frac{d}{dr}\left[c_{11}(r) \frac{du}{dr} \right] + \frac{d}{dr}\left[c_{12}(r) \frac{u}{r} \right] + \left[c_{11}(r) - c_{12}(r) \right] \frac{1}{r} \frac{du}{dr} +$$

$$+ \left[c_{12}(r) - c_{22}(r) \right] \frac{u}{r^2} = \frac{d\Theta_r(r)}{dr} + \frac{\Theta_r(r) - \Theta_\varphi(r)}{r} -$$

$$- \left[\frac{dc_{13}(r)}{dr} + \frac{c_{13}(r) - c_{23}(r)}{r} \right] \varepsilon_z , \tag{3}$$

а також граничні умови

$$\sigma_r \big|_{r=r_0} = -\sigma_0 , \qquad \sigma_r \big|_{r=r_n} = -\sigma_n . \tag{4}$$

Тут

$$c_{11}(r) = \frac{1 - \nu_{\varphi z}(t,r)\nu_{z\varphi}(t,r)}{d(r)} E_r(t,r) ,$$

$$c_{12}(r) = \frac{\nu_{\varphi r}(t,r) + \nu_{\varphi z}(t,r)\nu_{zr}(t,r)}{d(r)} E_r(t,r) ,$$

$$c_{13}(r) = \frac{\nu_{zr}(t,r) + \nu_{z\varphi}(t,r)\nu_{\varphi r}(t,r)}{d(r)} E_r(t,r) ,$$

$$c_{22}(r) = \frac{1 - \nu_{rz}(t,r)\nu_{zr}(t,r)}{d(r)} E_\varphi(t,r) ,$$

$$c_{23}(r) = \frac{\nu_{z\varphi}(t,r) + \nu_{r\varphi}(t,r)\nu_{zr}(t,r)}{d(r)} E_{\varphi}(t,r),$$

$$c_{33}(r) = \frac{1 - \nu_{r\varphi}(t,r)\nu_{\varphi r}(t,r)}{d(r)} E_{z}(t,r),$$

$$d(r) = 1 - \nu_{rz}(t,r)\nu_{zr}(t,r) - \nu_{\varphi z}(t,r)\nu_{z\varphi}(t,r) -$$

$$- \nu_{\varphi r}(t,r)\nu_{r\varphi}(t,r) - 2\nu_{rz}(t,r)\nu_{\varphi r}(t,r)\nu_{z\varphi}(t,r),$$

$$\Theta_r(r) = c_{11}(r)\Phi_r(r) + c_{12}(r)\Phi_{\varphi}(r) + c_{13}(r)\Phi_z(r),$$

$$\Theta_{\varphi}(r) = c_{12}(r)\Phi_r(r) + c_{22}(r)\Phi_{\varphi}(r) + c_{23}(r)\Phi_z(r),$$

$$\Theta_z(r) = c_{13}(r)\Phi_r(r) + c_{23}(r)\Phi_{\varphi}(r) + c_{33}(r)\Phi_z(r).$$

Функції $c_{ij}(r)$, $i,j = 1,2,3$, $\Theta_r(r)$, $\Theta_{\varphi}(r)$, $\Theta_z(r)$, $E_r(t,r)$, $E_{\varphi}(t,r)$, $E_z(t,r)$, $\nu_{ij}(t,r)$, $i,j = r,\varphi,z$, і $\Phi_r(r)$, $\Phi_{\varphi}(r)$, $\Phi_z(r)$ мають вигляд (1), а в межах p-го шару співпадають відповідно з $c_{ij}^{(p)}(r)$, $i,j = 1,2,3$, $\Theta_{rp}(r)$, $\Theta_{\varphi p}(r)$, $\Theta_{zp}(r)$, модулями пружності $E_{rp}(t_p,r)$, $E_{\varphi p}(t_p,r)$, $E_{zp}(t_p,r)$ у радіальному, кутовому і осьовому напрямах [6], коефіцієнтами Пуассона $\nu_{ij}^{(p)}(t_p,r)$, $i,j = r,\varphi,z$, і чисто тепловими деформаціями

$$\Phi_{rp}(r) = \int\limits_0^{t_p(r)} \alpha_{rp}^t(\zeta,r)\,d\zeta, \qquad \Phi_{\varphi p}(r) = \int\limits_0^{t_p(r)} \alpha_{\varphi p}^t(\zeta,r)\,d\zeta,$$

$$\Phi_{zp}(r) = \int\limits_0^{t_p(r)} \alpha_{zp}^t(\zeta,r)\,d\zeta.$$

Тут $\alpha_{rp}^t(t_p,r)$, $\alpha_{\varphi p}^t(t_p,r)$, $\alpha_{zp}^t(t_p,r)$ – температурні коефіцієнти лінійного розширення p-го шару в радіальному, кутовому і осьовому напрямах; ε_z – осьова деформація. Модулі пружності і коефіцієнти Пуассона пов'язані співвідношеннями $\nu_{ij}^{(p)}(t_p,r)E_{jp}(t_p,r) = \nu_{ji}^{(p)}(t_p,r)E_{ip}(t_p,r)$, $i,j = r,\varphi,z$.

Зауважимо, що рівняння (3) еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{d}{dr}\left[c_{11}^{(p)}(r)\frac{du_p}{dr}\right] + \frac{d}{dr}\left[c_{12}^{(p)}(r)\frac{u_p}{r}\right] + \left[c_{11}^{(p)}(r) - c_{12}^{(p)}(r)\right]\frac{1}{r}\frac{du_p}{dr} +$$

$$+ \left[c_{12}^{(p)}(r) - c_{22}^{(p)}(r)\right]\frac{u_p}{r^2} = \frac{d\Theta_{rp}(r)}{dr} + \frac{\Theta_{rp}(r) - \Theta_{\varphi p}(r)}{r} -$$

$$- \left[\frac{dc_{13}^{(p)}(r)}{dr} + \frac{c_{13}^{(p)}(r) - c_{23}^{(p)}(r)}{r}\right]\varepsilon_z, \qquad p = 1,2,\ldots,n,$$

і умовам ідеального термомеханічного контакту при $r = r_k$, $k = 1,2,\ldots,n-1$:

$$u_{k+1} = u_k,$$

$$c_{11}^{(k+1)}(r)\frac{du_{k+1}}{dr} + c_{12}^{(k+1)}(r)\frac{u_{k+1}}{r} + c_{13}^{(k+1)}(r)\varepsilon_z - \Theta_{r,k+1}(r) =$$

$$= c_{11}^{(k)}(r)\frac{du_k}{dr} + c_{12}^{(k)}(r)\frac{u_k}{r} + c_{13}^{(k)}(r)\varepsilon_z - \Theta_{rk}(r).$$

2. Інтегральне подання розв'язку. Для його отримання використаємо функцію Ґріна задачі пружності для шаруватого ортотропного циліндра зі сталими ФМХ шарів, тобто функцію $G(r,\rho)$, яка є розв'язком задачі

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{k^2(r)}{r^2} G -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} \left(K_{11}^{(0i)} \frac{\partial G}{\partial r} + K_{12}^{(0i)} \frac{G}{r} \right) \Bigg|_{r=r_i-0} \delta(r-r_i) - \frac{\delta(r-\rho)}{\rho c_{11}^{(0)}(\rho)}, \qquad (5)$$

$$c_{11}^{(0)}(r) \frac{\partial G(r,\rho)}{\partial r} + c_{12}^{(0)}(r) \frac{G(r,\rho)}{r} = 0, \qquad r = r_0, \quad r = r_n, \qquad (6)$$

де функції

$$k^2(r) = \frac{c_{22}^{(0)}(r)}{c_{11}^{(0)}(r)}, \quad c_{11}^{(0)}(r) = \frac{1 - \nu_{\varphi z}^{(0)}(r)\nu_{z\varphi}^{(0)}(r)}{d_0(r)} E_r^{(0)}(r),$$

$$c_{22}^{(0)}(r) = \frac{1 - \nu_{rz}^{(0)}(r)\nu_{zr}^{(0)}(r)}{d_0(r)} E_\varphi^{(0)}(r),$$

$$c_{12}^{(0)}(r) = \frac{\nu_{\varphi r}^{(0)}(r) + \nu_{\varphi z}^{(0)}(r)\nu_{zr}^{(0)}(r)}{d_0(r)} E_r^{(0)}(r),$$

$$d_0(r) = 1 - \nu_{rz}^{(0)}(r)\nu_{zr}^{(0)}(r) - \nu_{\varphi z}^{(0)}(r)\nu_{z\varphi}^{(0)}(r) -$$

$$- \nu_{\varphi r}^{(0)}(r)\nu_{r\varphi}^{(0)}(r) - 2\nu_{rz}^{(0)}(r)\nu_{\varphi r}^{(0)}(r)\nu_{z\varphi}^{(0)}(r)$$

мають вигляд (1); $E_r^{(0)}(r)$, $E_\varphi^{(0)}(r)$, $\nu_{ij}^{(0)}(r)$, $i,j = r,\varphi,z$, в межах p-го шару співпадають відповідно з модулями пружності $E_r^{(0p)}$, $E_\varphi^{(0p)}$ і коефіцієнтами Пуассона $\nu_{ij}^{(0p)}(r)$, $i,j = r,\varphi,z$, які вибираються з інтервалів зміни $E_{rp}(t_p,r)$, $E_{\varphi p}(t_p,r)$, $\nu_{ij}^{(p)}(t_p,r)$, $i,j = r,\varphi,z$; $\delta(\zeta)$ – дельта-функція Дірака,

$$K_{11}^{(0i)} = 1 - K_{0c}^{(i+1)}, \qquad K_{0c}^{(i+1)} = \frac{c_{11}^{(0i)}}{c_{11}^{(0,i+1)}}, \qquad K_{12}^{(0i)} = \frac{c_{12}^{(0,i+1)} - c_{12}^{(0i)}}{c_{11}^{(0,i+1)}}.$$

Після домноження рівняння (3) зліва на $rG(r,\rho)$, виконання відповідних операцій з узагальненими функціями [1, 14], використання (5) та інтегрування по r у межах від r_0 до r_n одержимо

$$\frac{c_{11}(\rho)}{c_{11}^{(0)}(\rho)} u(\rho) = \Bigg\{ rG(r,\rho)\sigma_r(r) - \Bigg[rc_{11}(r) \frac{\partial G(r,\rho)}{\partial r} +$$

$$+ c_{12}(r)G(r,\rho) \Bigg] u(r) \Bigg\} \Bigg|_{r=r_0}^{r=r_n} + \int_{r_0}^{r_n} c(r)G(r,\rho) \frac{u(r)}{r}\, dr +$$

$$+ \int_{r_0}^{r_n} \left[r \frac{\partial G(r,\rho)}{\partial r} \left(\frac{dc_{11}(r)}{dr} \right)_{\text{cl}} + G(r,\rho) \left(\frac{dc_{12}(r)}{dr} \right)_{\text{cl}} \right] u(r)\, dr +$$

$$+ \int_{r_0}^{r_n} \left[r \frac{\partial G(r,\rho)}{\partial \rho} \Theta_r(r) + G(r,\rho)\Theta_\varphi(r) \right] dr +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\left\{K_{11}^{(i)}\frac{\partial}{\partial r}\left[rG(r,\rho)\right]\Big|_{r=r_i+0}-K_{22}^{(i)}G(r_i,\rho)-\right.$$

$$-\left[K_{11}^{(0i)}r_i\frac{\partial G(r,\rho)}{\partial r}\Big|_{r=r_i-0}+K_{12}^{(0i)}G(r_i,\rho)\right]c_{11}(r_i-0)\left.\vphantom{\frac{\partial}{\partial r}}\right\}u_i(r_i)-$$

$$-\varepsilon_z\int_0^{r_n}\left[rc_{13}(r)\frac{\partial G(r,\rho)}{\partial r}+c_{23}(r)G(r,\rho)\right]dr,\quad r_0<\rho<r_n,\quad (7)$$

де $c(r)=\dfrac{c_{22}^{(0)}(r)}{c_{11}^{(0)}(r)}c_{11}(r)-c_{22}(r)$, $K_{11}^{(i)}=c_{11}^{(i+1)}(r_i)-c_{11}^{(i)}(r_i)$, $K_{22}^{(i)}=K_{11}^{(i)}-K_{12}^{(i)}$, $K_{12}^{(i)}=c_{12}^{(i+1)}(r_i)-c_{12}^{(i)}(r_i)$; індекс «cl» означає, що відповідна похідна є класичною.

3. Система інтегро-алгебричних рівнянь. Замінимо в (7) інтеграли по товщині циліндра сумою інтегралів по товщині шарів і розглянемо отримане співвідношення в межах p-го шару. При цьому беремо до уваги, що переміщення мають вигляд

$$u_p(\rho)=u_p^t(\rho)+u_p^y(\rho)-\varepsilon_z u_p^\varepsilon(\rho),\qquad (8)$$

де з урахуванням термочутливості і неоднорідності шарів відповідні доданки описують переміщення, зумовлені температурним полем, поверхневими навантаженнями та умовами на торцях, а функція $G(r,\rho)$ при $r_{p-1}<\rho<r_p$, $r_{j-1}<r<r_j$, $p,j=1,2,\ldots,n$, співпадає з елементами матриці Ґріна [13]:

$$G_{jp}(r,\rho)=\frac{1}{4k_jk_pQ}\begin{cases}P_{jp}\varphi_{1j}(r)\varphi_{2p}(\rho)/c_{11}^{(0p)}, & j<p,\\ P_{pj}\varphi_{1p}(\rho)\varphi_{2j}(r)/c_{11}^{(0j)}, & j>p,\end{cases}$$

$$G_{jj}(r,\rho)=\frac{1}{2k_jc_{11}^{(0j)}}\left[\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k_j}S(\rho-r)+\left(\frac{\rho}{r}\right)^{k_j}S(r-\rho)\right]+$$

$$+\frac{1}{4k_j^2c_{11}^{(0j)}Q}\left[M_{1j}^-\left(\frac{r_{j-1}}{r}\right)^{k_j}\varphi_{2j}(\rho)-M_{2j}^-\left(\frac{r}{r_j}\right)^{k_j}\varphi_{1j}(\rho)\right],$$

де

$$P_{jp}=\left(\frac{r_p}{r_{p-1}}\right)^{k_p}\prod_{i=j+1}^{p}\left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\right)^{k_i},$$

$$\varphi_{1s}(x)=M_{1s}^+\left(\frac{x}{r_s}\right)^{k_s}+M_{1s}^-\frac{r_{s-1}^{2k_s}}{(xr_s)^{k_s}},\qquad s=1,2,\ldots,n,$$

$$M_{11}^{\pm}=2k_1(k_1\mp\beta_{11}^{(0)}),\qquad M_{1s}^{\pm}=\Phi_{s-1}^{(0)}(r_{s-1})(k_s\pm K_\nu^{(s)})\pm\Phi_{s-1}^{(1)}(r_{s-1})K_{0c}^{(s)},$$

$$\Phi_1^{(m)}(r)=k_1^m\left[k_1-\beta_{11}^{(0)}+(-1)^m(k_1+\beta_{11}^{(0)})\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2k_1}\right],$$

$$\Phi_s^{(m)}(r)=\Phi_{s-1}^{(0)}(r_{s-1})f_{s1}^{(m)}(r)+\Phi_{s-1}^{(1)}(r_{s-1})f_{s2}^{(m)}(r),$$

$$f_{s1}^{(m)}(r)=\frac{1}{2k_s^{1-m}}\left[k_s+K_\nu^{(s)}+(-1)^m(k_s-K_\nu^{(s)})\left(\frac{r_{s-1}}{r}\right)^{2k_s}\right],$$

$$f_{s2}^{(m)}(r) = \frac{K_{0c}^{(s)}}{2k_s^{1-m}} \left[1 - (-1)^m \left(\frac{r_{s-1}}{r} \right)^{2k_s} \right],$$

$$K_\nu^{(s)} = K_{0c}^{(s)} \beta_{1,s-1}^{(0)} - \beta_{1s}^{(0)}, \qquad m = 0, 1, \qquad s = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\varphi_{2s}(x) = M_{2s}^{+} \left(\frac{r_{s-1}}{x} \right)^{k_s} - M_{2s}^{-} \frac{(x r_{s-1})^{k_s}}{r_s^{2k_s}},$$

$$M_{2s}^{\pm} = \text{æ}_{ns}^{(2)} + \beta_{1n}^{(0)} \text{æ}_{ns}^{(1)} \pm k_s \left(\text{æ}_{ns}^{(4)} + \beta_{1n}^{(0)} \text{æ}_{ns}^{(3)} \right),$$

$$\beta_{1s}^{(0)} = \frac{c_{12}^{(0s)}}{c_{11}^{(0s)}}, \qquad s = 1, 2, \ldots, n,$$

$$Q = \Phi_n^{(1)}(r_n) + \beta_{1n}^{(0)} \Phi_n^{(0)}(r_n),$$

$$\text{æ}_{ii}^{(1)} = \text{æ}_{ii}^{(4)} = 1, \quad \text{æ}_{ii}^{(2)} = \text{æ}_{ii}^{(3)} = 0,$$

$$\text{æ}_{n,i}^{(1)} = f_{n1}^{(0)}(r_n) \text{æ}_{n-1,i}^{(1)} + f_{n2}^{(0)}(r_n) \text{æ}_{n-1,i}^{(2)},$$

$$\text{æ}_{n,i}^{(2)} = f_{n1}^{(1)}(r_n) \text{æ}_{n-1,i}^{(1)} + f_{n2}^{(1)}(r_n) \text{æ}_{n-1,i}^{(2)},$$

$$\text{æ}_{n,i}^{(3)} = f_{n1}^{(0)}(r_n) \text{æ}_{n-1,i}^{(3)} + f_{n2}^{(0)}(r_n) \text{æ}_{n-1,i}^{(4)},$$

$$\text{æ}_{n,i}^{(4)} = f_{n1}^{(1)}(r_n) \text{æ}_{n-1,i}^{(3)} + f_{n2}^{(1)}(r_n) \text{æ}_{n-1,i}^{(4)}, \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

Виконавши відповідні перетворення з урахуванням граничних умов (4) і (6), одержимо для знаходження кожної із функцій $u_p^s(\rho)$, $s = t, y, \varepsilon$, системи рівнянь

$$c_{11}^{(p)}(\rho) u_p^s(\rho) - \frac{L_{1p}^s \varphi_{2p}(\rho) + L_{2p}^s \varphi_{1p}(\rho)}{4k_p Q} - \frac{V_{bp}^{s+}(\rho) + V_{bp}^{s-}(\rho)}{2k_p} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} g_{up}^{(i)}(\rho) u_i^s(r_i) = u_{sp}(\rho), \qquad s = t, y, \varepsilon, \tag{9}$$

де

$$L_{1p}^s = H_{1p}^s + 4k_1 P_{1p} \gamma_1 \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{k_1} u_1^s(r_0), \qquad \gamma_1 = c_{12}^{(1)}(r_0) - \frac{c_{12}^{(01)}}{c_{11}^{(01)}} c_{11}^{(1)}(r_0),$$

$$L_{2p}^s = H_{2p}^s - 2\gamma_n P_{pn} \left(\frac{r_{n-1}}{r_n} \right)^{k_n} \frac{c_{11}^{(0p)}}{c_{11}^{(0n)}} u_n^s(r_n), \qquad \gamma_n = c_{12}^{(n)}(r_n) - \frac{c_{12}^{(0n)}}{c_{11}^{(0n)}} c_{11}^{(n)}(r_n),$$

$$H_{1p}^s = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{k_j} P_{jp} M_{1j}^{+} V_{bj}^{s+}(r_j) + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{k_j} P_{jp} M_{1j}^{-} \left(\frac{r_{j-1}}{r_j} \right)^{k_j} V_{bj}^{s-}(r_{j-1}),$$

$$H_{2p}^s = \sum_{j=p+1}^{n} \frac{c_{11}^{(0p)}}{k_j c_{11}^{(0j)}} P_{pj} M_{2j}^{+} V_{bj}^{s-}(r_{j-1}) - \sum_{j=p}^{n} \frac{c_{11}^{(0p)}}{k_j c_{11}^{(0j)}} P_{pj} M_{2j}^{-} \left(\frac{r_{j-1}}{r_j} \right)^{k_j} V_{bj}^{s+}(r_j),$$

$$V_{bp}^{s+}(\rho) = \rho^{-k_p} \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^{k_p} B_p^{+}(r) u_p^s(r)\, dr, \qquad V_{bp}^{s-}(\rho) = \rho^{k_p} \int_{\rho}^{r_p} r^{-k_p} B_p^{-}(r) u_p^s(r)\, dr,$$

$$B_p^{\pm}(r) = \frac{dc_p^{\pm}(r)}{dr} + \frac{1}{r}c_p(r), \qquad c_p^{\pm}(r) = c_{12}^p(r) \pm k_p c_{11}^p(r),$$

$$g_{up}^{(i)}(\rho) = \frac{K_{11}^{(i)} g_{up}^{(2i)}(\rho) - g_{up}^{(1i)}(\rho)}{4q_p Q},$$

$$g_{up}^{(1i)}(\rho) = \begin{cases} b_{2p}^{(i)}\varphi_{1p}(\rho), & p \le i, \\ b_{1p}^{(i)}\varphi_{2p}(\rho), & p > i, \end{cases} \qquad g_{up}^{(2i)}(\rho) = \begin{cases} b_{4p}^{(i)}\varphi_{1p}(\rho), & p < i+1, \\ b_{3p}^{(i)}\varphi_{2p}(\rho), & p \ge i+1, \end{cases}$$

$$b_{2p}^{(i)} = \frac{P_{pi}c_{11}^{(0p)}}{k_i c_{11}^{(0i)}}\left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\right)^{k_i}\left[m_{0i}m_{2i}^{-} - k_i K_{11}^{(0i)} c_{11}^{(i)}(r_i) m_{2i}^{+}\right],$$

$$b_{1p}^{(i)} = \frac{P_{ip}}{k_i}\left[m_{0i}m_{1i}^{+} + k_i K_{11}^{(0i)} c_{11}^{(i)}(r_i) m_{1i}^{-}\right], \qquad m_{0i} = K_{22}^{(i)} + K_{12}^{(0i)} c_{11}^{(i)}(r_i),$$

$$b_{4p}^{(i)} = \frac{P_{p,i+1}c_{11}^{(0p)}}{k_{i+1}c_{11}^{(0,i+1)}}\left[(1-k_{i+1})M_{2,i+1}^{+} - (1+k_{i+1})M_{2,i+1}^{-}\left(\frac{r_i}{r_{i+1}}\right)^{2k_{i+1}}\right],$$

$$b_{3p}^{(i)} = \frac{P_{i+1,p}}{k_{i+1}}\left[(1+k_{i+1})M_{1,i+1}^{+} + (1-k_{i+1})M_{1,i+1}^{-}\right]\left(\frac{r_i}{r_{i+1}}\right)^{k_{i+1}},$$

$$m_{1i}^{\pm} = M_{1i}^{+} \pm M_{1i}^{-}\left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\right)^{2k_i}, \qquad m_{2i}^{\pm} = M_{2i}^{+} \pm M_{2i}^{-},$$

$$u_{sp}(\rho) = \frac{R_{1p}^{s}\varphi_{2p}(\rho) + R_{2p}^{s}\varphi_{1p}(\rho)}{4k_p Q} + \frac{V_{sp}^{+}(\rho) + V_{sp}^{-}(\rho)}{2k_p}, \qquad s = t, \varepsilon,$$

$$R_{1p}^{s} = \sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{k_j}P_{jp}M_{1j}^{+}V_{sj}^{+}(r_j) + \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{k_j}P_{jp}M_{1j}^{-}\left(\frac{r_{j-1}}{r_j}\right)^{k_j}V_{sj}^{-}(r_{j-1}),$$

$$R_{2p}^{s} = \sum_{j=p+1}^{n}\frac{c_{11}^{(0p)}}{k_j c_{11}^{(0j)}}P_{pj}M_{2j}^{+}V_{sj}^{-}(r_{j-1}) - \sum_{j=p}^{n}\frac{c_{11}^{(0p)}}{k_j c_{11}^{(0j)}}P_{pj}M_{2j}^{-}\left(\frac{r_{j-1}}{r_j}\right)^{k_j}V_{sj}^{+}(r_j),$$

$$V_{sp}^{+}(\rho) = \rho^{-k_p}\int_{r_{p-1}}^{\rho} r^{k_p}Y_{sp}^{+}(r)dr, \qquad V_{sp}^{-}(\rho) = \rho^{k_p}\int_{\rho}^{r_p} r^{-k_p}Y_{sp}^{-}(r)dr,$$

$$Y_{tp}^{\pm}(r) = \left[c_{12}^{(p)}(r) \pm k_p c_{11}^{(p)}(r)\right]\Phi_{rp}(r) +$$

$$+\left[c_{22}^{(p)}(r) \pm k_p c_{12}^{(p)}(r)\right]\Phi_{\varphi p}(r) + \left[c_{23}^{(p)}(r) \pm k_p c_{13}^{(p)}(r)\right]\Phi_{zp}(r),$$

$$Y_{\varepsilon p}^{\pm}(r) = c_{23}^{(p)}(r) \pm k_p c_{13}^{(p)}(r),$$

$$u_{yp}(\rho) = \frac{R_{1p}^{y}\varphi_{2p}(\rho) - R_{2p}^{y}\varphi_{1p}(\rho)}{k_p Q},$$

$$R_{1p}^{y} = k_1\sigma_0 r_0 P_{1p}\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{k_1}, \qquad R_{2p}^{y} = \sigma_n r_n P_{pn}\left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{k_n}\frac{c_{11}^{(0p)}}{2c_{11}^{(0n)}}.$$

4. Співвідношення для деформацій і напружень. Продиференціювавши (9), одержимо з урахуванням (8) вирази для радіальних деформацій

$$c_{11}^{(p)}(\rho)\frac{du_p(\rho)}{d\rho} = \varepsilon_{rp}^t(\rho) + \varepsilon_{rp}^y(\rho) - \varepsilon_z\varepsilon_{rp}^\varepsilon(\rho)\,, \tag{10}$$

де

$$\varepsilon_{rp}^s(\rho) = e_p^s + \frac{L_{1p}^s\varphi_{4p}(\rho) + L_{2p}^s\varphi_{3p}(\rho)}{4Q\rho} - \frac{V_{bp}^{s+}(\rho) - V_{bp}^{s-}(\rho)}{2\rho} + \sum_{i=1}^{n-1} g_{\varepsilon p}^{(i)}(\rho)u_i^s(r_i)\,,$$

$$s = t, y, \varepsilon\,,$$

$$e_p^s(\rho) = T_{rp}^s(\rho) - \frac{V_{sp}^+(\rho) - V_{sp}^-(\rho)}{2\rho} + \frac{R_{1p}^s\varphi_{4p}(\rho) + R_{2p}^s\varphi_{3p}(\rho)}{4Q\rho}, \qquad s = t, \varepsilon\,,$$

$$T_{rp}^t(\rho) = \Theta_{rp}(\rho), \qquad T_{rp}^\varepsilon(\rho) = c_{13}^{(p)}(\rho)\,,$$

$$e_p^y(\rho) = \frac{R_{1p}^y\varphi_{4p}(\rho) - R_{2p}^y\varphi_{3p}(\rho)}{Q\rho}\,,$$

$$\varphi_{3p}(\rho) = M_{1p}^+\left(\frac{\rho}{r_p}\right)^{k_p} - M_{1p}^-\frac{r_{p-1}^{2k_p}}{(r_p\rho)^{k_p}}\,,$$

$$\varphi_{4p}(\rho) = -M_{2p}^+\left(\frac{r_{p-1}}{\rho}\right)^{k_p} - M_{2p}^-\frac{(r_{p-1}\rho)^{k_p}}{r_p^{2k_p}}\,,$$

$$g_{\varepsilon p}^{(i)}(\rho) = \frac{K_{11}^{(i)}g_{\varepsilon p}^{(2i)}(\rho) - g_{\varepsilon p}^{(1i)}(\rho)}{4Q\rho}\,,$$

$$g_{\varepsilon p}^{(1i)}(\rho) = \begin{cases} b_{2p}^{(i)}\varphi_{3p}(\rho), & p \le i, \\ b_{1p}^{(i)}\varphi_{4p}(\rho), & p > i, \end{cases} \qquad g_{\varepsilon p}^{(2i)}(\rho) = \begin{cases} b_{4p}^{(i)}\varphi_{3p}(\rho), & p < i+1, \\ b_{3p}^{(i)}\varphi_{4p}(\rho), & p \ge i+1. \end{cases}$$

Підставляючи (9), (10) в отримані на основі співвідношень (2) залежності для p-го шару, одержуємо вирази для напружень

$$\sigma_{jp}(\rho) = \sigma_{jp}^t(\rho) + \sigma_{jp}^y(\rho) - \varepsilon_z\sigma_{jp}^\varepsilon(\rho), \qquad j = r, \varphi, z\,,$$

де

$$\sigma_{rp}^s(\rho) = c_{11}^{(p)}(\rho)\varepsilon_{rp}^s(\rho) + c_{12}^{(p)}(\rho)\frac{u_p^s(\rho)}{\rho} - T_{rp}^s(\rho)\,,$$

$$\sigma_{\varphi p}^s(\rho) = c_{12}^{(p)}(\rho)\varepsilon_{rp}^s(\rho) + c_{22}^{(p)}(\rho)\frac{u_p^s(\rho)}{\rho} - T_{\varphi p}^s(\rho)\,,$$

$$\sigma_{zp}^s(\rho) = c_{13}^{(p)}(\rho)\varepsilon_{rp}^s(\rho) + c_{23}^{(p)}(\rho)\frac{u_p^s(\rho)}{\rho} - T_{zp}^s(\rho), \qquad s = t, y, \varepsilon\,,$$

$$T_{jp}^t(\rho) = \Theta_{jp}(\rho), \qquad T_{jp}^y(\rho) = 0, \qquad j = r, \varphi, z\,,$$

$$T_{rp}^\varepsilon(\rho) = c_{13}^{(p)}(\rho), \qquad T_{\varphi p}^\varepsilon(\rho) = c_{23}^{(p)}(\rho), \qquad T_{zp}^\varepsilon(\rho) = c_{33}^{(p)}(\rho)\,.$$

Осьову деформацію з використанням умови $\sum\limits_{p=1}^{n} \int\limits_{r_{p-1}}^{r_p} \rho \sigma_{zp}(\rho)\, d\rho = \frac{P}{2\pi}$ знаходимо за формулою

$$\varepsilon_z = \left[\sum_{p=1}^{n} \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho [\sigma_{zp}^{t}(\rho) + \sigma_{zp}^{y}(\rho)]\, d\rho - \frac{P}{2\pi} \right] \cdot \left[\sum_{p=1}^{n} \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho \sigma_{zp}^{\varepsilon}(\rho)\, d\rho \right]^{-1} .$$

5. Визначення радіальних переміщень. Для цього скористаємось методом послідовних наближень, вибравши за нульові наближення переміщення $\bar{u}_p^{(s)}(\rho)$, $s = t, y, \varepsilon$, що відповідають точному розв'язку задачі термопружності для багатошарового циліндра зі сталими модулями пружності і коефіцієнтами Пуассона. Вирази для цих переміщень, отримані з (9) для тих самих модулів пружності та коефіцієнтів Пуассона, що й у задачі (5), (6), мають вигляд

$$\bar{u}_p^{s}(\rho) = \frac{R_{1p}^{(0s)} \varphi_{2p}(\rho) + R_{2p}^{(0s)} \varphi_{1p}(\rho)}{4 k_p Q} + \frac{V_{sp}^{(0+)}(\rho) + V_{sp}^{(0-)}(\rho)}{2 k_p}, \qquad s = t, \varepsilon ,$$

$$\bar{u}_p^{y}(\rho) = \frac{R_{1p}^{(0y)} \varphi_{2p}(\rho) - R_{2p}^{(0y)} \varphi_{1p}(\rho)}{k_p Q} . \tag{11}$$

Тут

$$R_{1p}^{(0s)} = \sum_{j=1}^{p-1} P_{jp} M_{1j}^{+} V_{sj}^{(0+)}(r_j) \frac{c_{11}^{(0j)}}{k_j c_{11}^{(0p)}} + \sum_{j=1}^{p} P_{jp} M_{1j}^{-} V_{sj}^{(0-)}(r_{j-1}) \frac{c_{11}^{(0j)}}{k_j c_{11}^{(0p)}} \left(\frac{r_{j-1}}{r_j} \right)^{k_j} ,$$

$$R_{2p}^{(0s)} = \sum_{j=p+1}^{n} P_{pj} M_{2j}^{+} V_{sj}^{(0-)}(r_{j-1}) \frac{1}{k_j} - \sum_{j=p}^{n} P_{pj} M_{2j}^{-} V_{sj}^{(0+)}(r_j) \frac{1}{k_j} \left(\frac{r_{j-1}}{r_j} \right)^{k_j} ,$$

$$V_{tp}^{(0+)}(\rho) = \rho^{-k_p} \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^{k_p} Y_{tp}^{(0+)}(r)\, dr, \qquad V_{tp}^{(0-)}(\rho) = \rho^{k_p} \int_{\rho}^{r_p} r^{-k_p} Y_{tp}^{(0-)}(r)\, dr ,$$

$$Y_{tp}^{(0\pm)}(r) = \left(\frac{c_{12}^{(0p)}}{c_{11}^{(0p)}} \pm k_p \right) \left[\Phi_{rp}(r) \pm k_p \Phi_{\varphi p}(r) \right] + \left(\frac{c_{23}^{(0p)}}{c_{11}^{(0p)}} \pm k_p \frac{c_{13}^{(0p)}}{c_{11}^{(0p)}} \right) \Phi_{zp}(r) ,$$

$$V_{\varepsilon p}^{(0+)}(\rho) = \frac{c_{23}^{(0p)} + k_p c_{13}^{(0p)}}{c_{11}^{(0p)}(1 + k_p)} \left[\rho - r_{p-1} \left(\frac{r_{p-1}}{\rho} \right)^{k_p} \right],$$

$$V_{\varepsilon p}^{(0-)}(\rho) = \frac{c_{23}^{(0p)} - k_p c_{13}^{(0p)}}{c_{11}^{(0p)}(1 - k_p)} \left[r_p \left(\frac{\rho}{r_p} \right)^{k_p} - \rho \right], \qquad k_p \neq 1 ,$$

$$V_{\varepsilon p}^{(0-)}(\rho) = \frac{c_{23}^{(0p)} - c_{13}^{(0p)}}{c_{11}^{(0p)}} \rho \ln \frac{r_p}{\rho} , \qquad k_p = 1 ,$$

$$c_{13}^{(0p)} = \frac{\nu_{zr}^{(0p)} + \nu_{z\varphi}^{(0p)} \nu_{\varphi r}^{(0)}}{d_{0p}} E_{rp}^{(0)} ,$$

$$c_{23}^{(0p)} = \frac{\nu_{z\varphi}^{(0p)} + \nu_{r\varphi}^{(0p)} \nu_{zr}^{(0p)}}{d_{0p}} E_{\varphi p}^{(0)} ,$$

$$d_{0p} = 1 - \nu_{rz}^{(0p)}\nu_{zr}^{(0p)} - \nu_{\varphi z}^{(0p)}\nu_{z\varphi}^{(0p)} - \nu_{\varphi r}^{(0p)}\nu_{r\varphi}^{(0p)} - 2\nu_{rz}^{(0p)}\nu_{\varphi r}^{(0p)}\nu_{z\varphi}^{(0p)},$$

$$R_{1p}^{(0y)} = k_1 r_0 P_{1p}\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{k_1}\frac{\sigma_0}{c_{11}^{(0p)}}, \qquad R_{2p}^{(0y)} = r_n P_{pn}\left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{k_n}\frac{\sigma_n}{2c_{11}^{(0n)}}.$$

Тоді переміщення, що відповідають першому наближенню, будуть такими:

$$c_{11}^{(p)}(\rho)u_p^s(\rho) = u_{sp}(\rho) + \frac{\bar{L}_{1p}^s\varphi_{2p}(\rho) + \bar{L}_{2p}^s\varphi_{1p}(\rho)}{4k_pQ} + \frac{\bar{V}_{bp}^{(s+)}(\rho) + \bar{V}_{bp}^{(s-)}(\rho)}{2k_p} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} g_{up}^{(i)}(\rho)\bar{u}_i^s(r_i), \qquad s = t, y, \varepsilon, \tag{12}$$

де

$$\bar{L}_{1p}^s = \bar{H}_{1p}^s + 4k_1P_{1p}\gamma_1\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{k_1}\bar{u}_1^s(r_0),$$

$$L_{2p}^s = \bar{H}_{2p}^s - 2\gamma_nP_{pn}\left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{k_n}\frac{c_{11}^{(0p)}}{c_{11}^{(0n)}}\bar{u}_n^s(r_n),$$

$$\bar{H}_{1p}^s = \sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{k_j}P_{jp}M_{1j}^+\bar{V}_{bj}^{(s+)}(r_j) + \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{k_j}P_{jp}M_{1j}^-\left(\frac{r_{j-1}}{r_j}\right)^{k_j}\bar{V}_{bj}^{(s-)}(r_{j-1}),$$

$$\bar{H}_{2p}^s = \sum_{j=p+1}^{n}\frac{c_{11}^{(0p)}}{k_jc_{11}^{(0j)}}P_{pj}M_{2j}^+\bar{V}_{bj}^{(s-)}(r_{j-1}) - \sum_{j=p}^{n}\frac{c_{11}^{(0p)}}{k_jc_{11}^{(0j)}}P_{pj}M_{2j}^-\left(\frac{r_{j-1}}{r_j}\right)^{k_j}\bar{V}_{bj}^{(s+)}(r_j),$$

$$\bar{V}_{bp}^{(s+)}(\rho) = c_p^+(\rho)\bar{u}_p^s(\rho) - c_p^+(r_{p-1})\bar{u}_p^s(r_{p-1})\left(\frac{r_{p-1}}{\rho}\right)^{k_p} - \rho^{-k_p}\int_{r_{p-1}}^{\rho} r^{k_p}\bar{U}_p^{(s+)}(r)\,dr,$$

$$\bar{V}_{bp}^{(s-)}(\rho) = c_p^-(r_p)\bar{u}_p^s(r_p)\left(\frac{\rho}{r_p}\right)^{k_p} - c_p^-(\rho)\bar{u}_p^s(\rho) - \rho^{k_p}\int_{\rho}^{r_p} r^{-k_p}\bar{U}_p^{(s-)}(r)\,dr,$$

$$\bar{U}_p^{(s\pm)}(r) = \left[c_p^\pm(r)\frac{d\bar{u}_p^s(r)}{dr} + c_p^{*\pm}(r)\frac{\bar{u}_p^s(r)}{r}\right], \qquad c_p^{*\pm}(r) = c_{22}^{(p)}(r) \pm k_pc_{12}^{(p)}(r).$$

Для оцінки точності аналогічно знаходимо переміщення, що відповідають першому наближенню у такому самому кусково-неоднорідному циліндрі, але вважаючи при цьому, що область $r_{p-1} < r < r_p$ складена з n_p концентричних циліндричних шарів, кожен з яких має модулі пружності, коефіцієнти Пуассона і коефіцієнти лінійного розширення p-ї області. В цьому випадку відповідні формули для переміщень мають також вигляд (12), у яких тепер вхідними будуть відповідні параметри задачі термопружності для N-шарового циліндра, де $N = \sum_{p=1}^{n} n_p$.

Потім порівнюємо переміщення, обчислені на основі перших наближень для n- і N-шарових циліндрів. Якщо різниця між їхніми значеннями на одних і тих самих поверхнях знаходиться не в межах заданої точності, то збільшуємо n_p, повторюємо процедуру знаходження перших наближень і порівнюємо на тих самих поверхнях значення переміщень, отримані в суміжних процедурах. Такий процес продовжуємо, допоки не буде досягнуто заданої точності.

За відомими переміщеннями, використовуючи формули (10)–(12), знаходимо деформації і напруження.

Зауважимо, що радіальні $\overline{\varepsilon}^s_{rp}(\rho)$ і осьова $\overline{\varepsilon}_z$ деформації та напруження $\overline{\sigma}_{jp}(\rho)$, $j = r, \varphi, z$, які відповідають (11), визначаються за формулами

$$\overline{\varepsilon}^s_{rp}(\rho) = \frac{d\overline{u}^s_p(\rho)}{d\rho} = \frac{R^{(0s)}_{1p}\varphi_{4p}(\rho) + R^{(0s)}_{2p}\varphi_{3p}(\rho)}{4Q\rho} -$$

$$- \frac{V^{(0+)}_{sp}(\rho) - V^{(0-)}_{sp}(\rho)}{2\rho} + \theta^s_{rp}(\rho), \qquad s = t, \varepsilon,$$

$$\overline{\varepsilon}^y_{rp}(\rho) = \frac{d\overline{u}^y_p(\rho)}{d\rho} = \frac{R^{(0y)}_{1p}\varphi_{4p}(\rho) - R^{(0y)}_{2p}\varphi_{3p}(\rho)}{Q\rho},$$

$$\overline{\varepsilon}_z = \left[\sum_{p=1}^{n} \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho\left[\overline{\sigma}^t_{zp}(\rho) + \overline{\sigma}^y_{zp}(\rho)\right] d\rho - \frac{P}{2\pi}\right] \cdot \left[\sum_{p=1}^{n} \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho\overline{\sigma}^\varepsilon_{zp}(\rho)\, d\rho\right]^{-1},$$

$$\overline{\sigma}_{jp}(\rho) = \overline{\sigma}^t_{jp}(\rho) + \overline{\sigma}^y_{jp}(\rho) - \overline{\varepsilon}_z\overline{\sigma}^\varepsilon_{jp}(\rho), \qquad j = r, \varphi, z,$$

$$\overline{\sigma}^s_{rp}(\rho) = c^{(0p)}_{11}\overline{\varepsilon}^s_{rp}(\rho) + c^{(0p)}_{12}\frac{\overline{u}^s_p(\rho)}{\rho} - \overline{T}^s_{rp}(\rho),$$

$$\overline{\sigma}^s_{\varphi p}(\rho) = c^{(0p)}_{12}\overline{\varepsilon}^s_{rp}(\rho) + c^{(0p)}_{22}\frac{\overline{u}^s_p(\rho)}{\rho} - \overline{T}^s_{\varphi p}(\rho),$$

$$\overline{\sigma}^s_{zp}(\rho) = c^{(0p)}_{13}\overline{\varepsilon}^s_{rp}(\rho) + c^{(0p)}_{23}\frac{\overline{u}^s_p(\rho)}{\rho} - \overline{T}^s_{zp}(\rho), \qquad s = t, y, \varepsilon,$$

де

$$\theta^t_{rp}(\rho) = \Phi_{rp}(\rho) + \frac{c^{(0p)}_{12}}{c^{(0p)}_{11}}\Phi_{\varphi p}(\rho) + \frac{c^{(0p)}_{13}}{c^{(0p)}_{11}}\Phi_{zp}(r), \qquad \theta^\varepsilon_{rp}(\rho) = \frac{c^{(0p)}_{13}}{c^{(0p)}_{11}},$$

$$\overline{T}^t_{jp}(\rho) = \overline{\Theta}_{jp}(\rho), \qquad \overline{T}^y_{jp}(\rho) = 0, \qquad j = r, \varphi, z,$$

$$\overline{T}^\varepsilon_{rp}(\rho) = c^{(0p)}_{13}, \qquad \overline{T}^\varepsilon_{\varphi p}(\rho) = c^{(0p)}_{23}, \qquad \overline{T}^\varepsilon_{zp}(\rho) = c^{(0p)}_{33},$$

$$\overline{\Theta}_{rp}(r) = c^{(0p)}_{11}\Phi_{rp}(r) + c^{(0p)}_{12}\Phi_{\varphi p}(r) + c^{(0p)}_{13}\Phi_{zp}(r),$$

$$\overline{\Theta}_{\varphi p}(r) = c^{(0p)}_{12}\Phi_{rp}(r) + c^{(0p)}_{22}\Phi_{\varphi p}(r) + c^{(0p)}_{23}\Phi_{zp}(r),$$

$$\overline{\Theta}_{zp}(r) = c^{(0p)}_{13}\Phi_{rp}(r) + c^{(0p)}_{23}\Phi_{\varphi p}(r) + c^{(0p)}_{33}\Phi_{zp}(r).$$

У випадку циліндра, складеного з трансверсально-ізотропних шарів, у наведених вище співвідношеннях необхідно прийняти

$$c_{11}(r) = c_{22}(r) = \left[1 - \nu^2_{rz}(t,r)\frac{E_r(t,r)}{E_z(t,r)}\right]\frac{E_r(t,r)}{d_T(r)\left[1 + \nu_{r\varphi}(t,r)\right]},$$

$$c_{12}(r) = \left[\nu_{r\varphi}(t,r) + \nu^2_{rz}(t,r)\frac{E_r(t,r)}{E_z(t,r)}\right]\frac{E_r(t,r)}{d_T(r)\left[1 + \nu_{r\varphi}(t,r)\right]},$$

$$c_{13}(r) = c_{23}(r) = \frac{\nu_{rz}(r)}{d_T(r)} E_r(t, r),$$

$$c_{33}(r) = \frac{1 - \nu_{r\varphi}(t, r)}{d_T(r)} E_z(t, r),$$

$$d_T(r) = 1 - \nu_{r\varphi}(t, r) - 2\nu_{rz}^2(t, r) \frac{E_r(t, r)}{E_z(t, r)}.$$

Для ізотропного циліндра відповідні співвідношення отримаємо при

$$c_{11}(r) = c_{22}(r) = c_{33}(r) = \lambda(r) + 2\mu(r),$$

$$c_{12}(r) = c_{13}(r) = c_{23}(r) = \lambda(r),$$

де

$$\lambda(r) = \frac{E(t, r)\nu(t, r)}{[1 + \nu(t, r)][1 - 2\nu(t, r)]}, \qquad \mu(r) = \frac{E(t, r)}{2[1 + \nu(t, r)]}.$$

Якщо у наведених вище співвідношеннях для u_p^s, σ_{rp}^s, $\sigma_{\varphi p}^s$, $s = t, y$, замінити $c_{11}(r)$, $c_{12}(r)$, $c_{22}(r)$ відповідно на $c_{11}^*(r) = \dfrac{E_r(t, r)}{1 - \nu_{r\varphi}(t, r)\nu_{\varphi r}(t, r)}$, $c_{12}^*(r) = c_{11}^*(r)\nu_{\varphi r}(t, r)$, $c_{22}^*(r) = \dfrac{E_\varphi(t, r)}{1 - \nu_{r\varphi}(t, r)\nu_{\varphi r}(t, r)}$, а $\Theta_r(r)$, $\Theta_\varphi(r)$ – на $\Theta_r^*(r) = c_{11}^*(r)\Phi_r(r) + c_{12}^*(r)\Phi_\varphi(r)$, $\Theta_\varphi^*(r) = c_{12}^*(r)\Phi_r(r) + c_{22}^*(r)\Phi_\varphi(r)$, то отримаємо вирази для переміщень $u_p(\rho) = u_p^t(\rho) + u_p^y(\rho)$ і напружень $\sigma_{rp}(\rho) = \sigma_{rp}^t(\rho) + \sigma_{rp}^y(\rho)$, $\sigma_{\varphi p}(\rho) = \sigma_{\varphi p}^t(\rho) + \sigma_{\varphi p}^y(\rho)$ у тонкому круглому багатошаровому ортотропному диску при його плоскому напруженому стані, зумовленому плоским температурним полем $t_p(r)$.

У квазістатичних задачах час в отримані співвідношення входитиме як параметр.

6. Числовий приклад. Запропоновану методику апробовано на статичній задачі термопружності для тришарового вільного від навантажень ($\sigma_0 = \sigma_n = 0$) із закріпленими торцями ($\varepsilon_z = 0$) термочутливого ортотропного циліндра, на внутрішній і зовнішній поверхнях якого задано відповідно тепловий потік $q_0 = 3 \cdot 10^6$ Вт/м^2 і температура $t_c = 300\,$°C. Обчислення виконано для таких геометричних і фізико-механічних характеристик:

$$r_0 = 0.2, \qquad r_1 = 0.4, \qquad r_2 = 0.7, \qquad r_3 = 1, \qquad \ell = 0.09 \text{ м},$$

$$\lambda_t^{(p)}(t_p) = 35.2 + 0.035 t_p \, [\text{Вт/(м} \cdot {}^\circ\text{C)}], \qquad p = 1, 3,$$

$$\lambda_t^{(2)}(t_2) = 69.1 + 0.0898 t_2 \, [\text{Вт/(м} \cdot {}^\circ\text{C)}],$$

$$E_{ip}(t_p) = E_{ip}^* E(t_p), \qquad \alpha_{ip}^t(t_p) = \alpha_{ip}^* \alpha(t_p), \qquad i = r, \varphi, z,$$

$$\nu_{zr}^{(p)}(t_p) = 0.4\nu(t_p), \qquad \nu_{z\varphi}^{(p)}(t_p) = 0,35\nu(t_p), \qquad \nu_{\varphi r}^{(p)}(t_p) = 0.3\nu(t_p),$$

$$E_{\varphi p}^* = 1.5 E_{rp}^*, \qquad E_{zp}^* = 2 E_{rp}^*, \qquad \alpha_{\varphi p}^* = 0.8 \alpha_{rp}^*, \qquad \alpha_{zp}^* = 1.2 \alpha_{rp}^*,$$

$$E(t) = 1 + 0.0001 t + 9.5 \cdot 10^{-7} t^2, \qquad \alpha(t) = 1 + 0.000833 t + 6 \cdot 10^{-7} t^2,$$

$$\nu(t) = 1 + 0.00012 t,$$

$$E_{r1}^{*} = 100\,[\text{ГПа}], \qquad E_{r2}^{*} = 150\,[\text{ГПа}], \qquad E_{r3}^{*} = 200\,[\text{ГПа}],$$

$$\alpha_{r1}^{*} = 12\cdot 10^{-6}\,[{}^{\circ}\text{C}^{-1}], \quad \alpha_{r2}^{*} = 15\cdot 10^{-6}\,[{}^{\circ}\text{C}^{-1}], \quad \alpha_{r3}^{*} = 9\cdot 10^{-6}\,[{}^{\circ}\text{C}^{-1}].$$

Розподіли температур $t_i(\rho)$, $i = 3,2,1$, знаходили за формулою

$$t_i(\rho) = \frac{\sqrt{1 + 2\beta_i\theta_i(\rho)} - 1}{\beta_i},$$

у якій

$$\theta_i(\rho) = \theta_c - T_s\left[f_i(\rho) - f_n(r_n)\right] - \sum_{j=i}^{n-1} F_j, \qquad \theta_c = t_c + \frac{\beta_n t_c^2}{2}, \qquad n = 3,$$

$$f_i(\rho) = \ln\rho - \sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j+1)}} - \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j)}}\right)\ln\frac{\rho}{\rho_j},$$

$$F_j = \left(1 - \frac{\beta_j}{\beta_{j+1}}\right)\left[\theta_{j+1}(r_j) - \frac{\sqrt{1 + 2\beta_{j+1}\theta_{j+1}(r_j)} - 1}{\beta_{j+1}}\right], \qquad T_s = \frac{q_0\ell r_0}{\lambda_0^{(1)}},$$

$$\theta_i(r_{i-1}) = \theta_c - T_s[f_i(r_{i-1}) - f_n(r_n)] - \sum_{j=i}^{n-1} F_j, \qquad i = 3,2,$$

$\lambda_0^{(i)}$, β_i вибирали відповідно до подання наведених залежностей коефіцієнтів теплопровідності у вигляді $\lambda_i(t_i) = \lambda_0^{(i)}(1 + \beta_i t_i)$. При цьому, зокрема, отримали такі значення температур на обмежувальних поверхнях:

$$t_1(r_0) \approx 1384\ {}^{\circ}\text{C}, \qquad t_1(r_1) = t_2(r_1) \approx 886\ {}^{\circ}\text{C},$$

$$t_2(r_2) = t_3(r_2) \approx 668\ {}^{\circ}\text{C}, \qquad t_3(r_3) = 300\ {}^{\circ}\text{C}.$$

У табл. 1–4 наведено значення безрозмірних температурних переміщень $\tilde{u} = \dfrac{u_1^t}{\alpha_{r1}^{*} T_s}$ і напружень $\tilde{\sigma}_j = \dfrac{\sigma_{j1}^t}{\alpha_{r1}^{*} T_s E_{r1}^{*}}$, $j = r, \varphi, z$, на обмежувальних $r = r_0$, $r = r_1$ і серединній $r = r_c$ поверхнях першої області (області з найбільшим перепадом температур), обчислених на основі нульових ($k = 0$) і перших наближень ($k = 1$) для різних N. При цьому кожну з областей $r_{p-1} < r < r_p$, $p = 1,2,3$, було поділено на однакову кількість концентричних шарів ($n_1 = n_2 = n_3 = N/3$). З аналізу отриманих результатів, зокрема, випливає, що для визначення радіальних переміщень і радіальних напружень з точністю, яка не перевищує 1.5%, достатньо обмежитися нульовим наближенням при $N = 12$ (див. табл. 1, 2). При такому самому N точність їх визначення на основі першого наближення не перевищує $0.15\,\%$, тобто є на порядок вищою, а точність визначених кільцевих і осьових напружень (див. табл. 3, 4), наприклад, на поверхні нагріву на основі першого наближення, ще не досягається за нульового наближення при $N = 3072$ ($n_1 = 1024$). Крім того, дані, наведені в таблицях, ілюструють стійкий характер поведінки відповідних величин зі збільшенням кількості розбиттів, а отже, застосовність наведених розв'язків (нульового і першого наближень) до визначення термопружного стану циліндрів із шаруватих композитних матеріалів, армованих однорідними і неоднорідними ортотропними шарами.

Таблиця 1. Значення радіальних переміщень $10\tilde{u}$.

N	k	r_0	$r_c - 0$	$r_c + 0$	r_1
6	0	0.19763	0.67542	0.67542	0.91090
	1	0.20936	0.68422	0.68227	0.91750
12	0	0.20660	0.68039	0.68039	0.91453
	1	0.20995	0.68256	0.68231	0.91617
24	0	0.20910	0.68177	0.68177	0.91553
	1	0.20999	0.68230	0.68227	0.91593
48	0	0.20975	0.68212	0.68212	0.91578
	1	0.20998	0.68226	0.68225	0.91588
96	0	0.20992	0.68221	0.68221	0.91585
	1	0.20997	0.68225	0.68225	0.91578
192	0	0.20996	0.68224	0.68224	0.91586
	1	0.20997	0.68224	0.68224	0.91587
384	0	0.20997	0.68224	0.68224	0.91587
	1	0.20997	0.68224	0.68224	0.91587

Таблиця 2. Значення радіальних напружень $\tilde{\sigma}_r$.

N	k	r_0	$r_c - 0$	$r_c + 0$	r_1
6	0	0.0	−0.23584	−0.23584	−0.20763
	1	0.00019	−0.24003	−0.23992	−0.21055
12	0	0.0	−0.23845	−0.23845	−0.20948
	1	0.00002	−0.23955	−0.23954	−0.21025
24	0	0.0	−0.23917	−0.23917	−0.20999
	1	0.0	−0.23945	−0.23944	−0.21018
48	0	0.0	−0.23935	−0.23935	−0.21011
	1	0.0	−0.23942	−0.23942	−0.21016
96	0	0.0	−0.23940	−0.23940	−0.21015
	1	0.0	−0.23942	−0.23942	−0.21016
192	0	0.0	−0.23941	−0.23941	−0.21015
	1	0.0	−0.23941	−0.23941	−0.21016
384	0	0.0	−0.23941	−0.23941	−0.21016
	1	0.0	−0.23941	−0.23941	−0.21016

Таблиця 3. Значення кільцевих напружень $\tilde{\sigma}_\varphi$.

N	k	r_0	$r_c - 0$	$r_c + 0$	r_1
6	0	−1.24299	−0.33565	−0.27634	−0.00151
	1	−1.41185	−0.29394	−0.29623	−0.00347
12	0	−1.31488	−0.31297	−0.28431	−0.00240
	1	−1.41054	−0.29571	−0.29601	−0.00429
24	0	−1.35911	−0.30380	−0.28960	−0.00328
	1	−1.41045	−0.29598	−0.29602	−0.00443
48	0	−1.38383	−0.29975	−0.29266	−0.00384
	1	−1.41048	−0.29603	−0.29603	−0.00446
96	0	−1.39692	−0.29785	−0.29431	−0.00414
	1	−1.41049	−0.29604	−0.29604	−0.00447
192	0	−1.40364	−0.29693	−0.29516	−0.00431
	1	−1.41050	−0.29604	−0.29604	−0.00447
384	0	−1.40706	−0.29648	−0.29560	−0.00439
	1	−1.41050	−0.29604	−0.29604	−0.00447
768	0	−1.40877	−0.29626	−0.29582	−0.00443
1536	0	−1.40964	−0.29615	−0.29593	−0.00445
3072	0	−1.41007	−0.29609	−0.29598	−0.00446

Таблиця 4. Значення осьових напружень $\tilde{\sigma}_z$.

N	k	r_0	$r_c - 0$	$r_c + 0$	r_1
6	0	−3.08850	−2.10720	−1.68550	−1.16901
	1	−3.55020	−1.87318	−1.87377	−1.06451
12	0	−3.30187	−1.98352	−1.77477	−1.11446
	1	−3.54990	−1.87346	−1.87354	−1.06460
24	0	−3.42096	−1.92696	−1.82284	−1.08899
	1	−3.54989	−1.87349	−1.87350	−1.06461
48	0	−3.48412	−1.89985	−1.84783	−1.07667
	1	−3.54990	−1.87349	−1.87349	−1.06461
96	0	−3.51667	−1.88658	−1.86057	−1.07061
	1	−3.54990	−1.87349	−1.87349	−1.06461
192	0	−3.53320	−1.88001	−1.86701	−1.06760
	1	−3.54990	−1.87349	−1.87349	−1.06461
384	0	−3.54153	−1.87675	−1.87024	−1.06610
	1	−3.54990	−1.87349	−1.87349	−1.06461
768	0	−3.54571	−1.87512	−1.87187	−1.06536
1536	0	−3.54781	−1.87430	−1.87268	−1.06498
3072	0	−3.54886	−1.87390	−1.87308	−1.06480

Висновки. Запропоновано методику визначення термопружного стану, зумовленого одновимірним температурним полем та поверхневими навантаженнями, в кусково-неоднорідному термочутливому порожнистому ортотропному циліндрі, яка передбачає отримання з використанням узагальнених функцій і функції Ґріна задачі пружності для шаруватого циліндра зі сталими ФМХ відповідних систем інтегро-алгебричних рівнянь відносно радіальних переміщень і їх роз'язання методом послідовних наближень, обмеженим лише першим наближенням. Апробація на статичній задачі термопружності для тришарового термочутливого циліндра показала ефективність методики.

1. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – Москва: Наука, 1976. – 280 с.
2. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
4. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Процюк Б. В.* Про розвиток досліджень термомеханічної поведінки термочутливих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 3. – С. 7–27.
   Те саме: *Kushnir R. M., Popovych V. S., Protsyuk B. V.* On the development of investigations of the thermomechanical behavior of thermally sensitive bodies // J. Math. Sci. – 2019. – **236**, No. 1. – P. 1–20.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-018-4094-4.
5. *Леонова В. А.* Температурные напряжения в круговом цилиндре с переменными термоупругими характеристиками // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1976. – **1**, № 3. – С. 161–166.
6. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
7. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 367 с.
8. *Махоркін І. М., Мастикаш Л. В.* Про один аналітично-числовий спосіб розв'язування одновимірної квазістатичної задачі термопружності для термочутливого тіла простої геометрії // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 4. – С. 99–106.

Те саме: *Makhorkin I. M., Mastykash L. V.* On one numerical-analytic method for the solution of one-dimensional quasistatic problems of thermoelasticity for thermosensitive bodies of simple geometry // J. Math. Sci. – 2018. – **228**, No. 2. – P. 122–132. – https://doi.org/10.1007/s10958-017-3610-2.

9. *Попович В. С., Калиняк Б. М.* Математичне моделювання і методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 2. – С. 169–186.
   Те саме: *Popovych V. S., Kalynyak B. M.* Mathematical modeling and methods for the determination of the static thermoelastic state of multilayer thermally sensitive cylinders // J. Math. Sci. – 2016. – **215**, No. 2. – P. 218–242. – https://doi.org/10.1007/s10958-016-2833-y.
10. *Постольник Ю. С., Огурцов А. П.* Металургійна термомеханіка. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2002. – 633 с.
11. *Процюк Б. В.* Визначення термопружного стану кусково-неоднорідних термочутливих тіл з циліндричними поверхнями поділу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57,** № 4. – С. 139–153.
   Те саме: *Protsyuk B. V.* Determination of the thermoelastic states of piecewise inhomogeneous thermosensitive bodies with cylindrical interfaces // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 2. – P. 173–192. – https://doi.org/10.1007/s10958-016-3175-5.
12. *Процюк Б. В.* Визначення термопружного стану кусково-неоднорідного термочутливого порожнистого циліндра // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 101–110.
13. *Процюк Б. В.* Застосування методу функцій Ґріна до визначення термопружного стану шаруватих трансверсально-ізотропних сферичних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 95–109.
14. *Процюк Б. В.* Метод функцій Гріна в осесиметричних задачах пружності та термопружності кусково-однорідних ортотропних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 94–101.
15. *Термопрочность* деталей машин. Теория. Экспериментальные исследования. Расчет / Под ред. И. А. Биргера, Б. Ф. Шорра. – Москва: Машиностроение, 1975. – 455 с.
16. *Afshin A., Nejad M. Z., Dastani K.* Transient thermoelastic analysis of FGM rotating thick cylindrical pressure vessels under arbitrary boundary and initial conditions // J. Comput. Appl. Mech. – 2017. – **48**, No. 1. – P. 15–26. – https://doi.org/10.22059/JCAMECH.2017.233643.144.
17. *Ching H. K., Chen J. K.* Thermal stress analysis of functionally graded composites with temperature-dependent material properties // J. Mech. Mater. Struct. – 2007. – **2**, No. 4. – P. 633–653. – https://doi.org/10.2140/jomms.2007.2.633
18. *Jabbari M., Bahtui A., Eslami M. R.* Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick long FGM cylinders // J. Therm. Stresses. – 2006. – **29**. № 7. –P. 643–663. – https://doi.org/10.1080/01495730500499118.
19. *Kushnir R., Protsiuk B.* Determination of the thermal fields and stresses in multilayer solids by means of the constructed Green functions // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931.
20. *Liew K. M., Kitipornchai S., Zhang X. Z., Lim C. W.* Analysis of the thermal stress behavior of functionally graded hollow circular cylinders // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40**, No. 10. – P. 2355–2380. – https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00061-1.
21. *Noda N.* Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // In: Thermal Stresses I // In: R. B. Hetnarski (ed.). Thermal Stresses I. – Amsterdam: Elsevier, 1986. – P. 391–483.
22. *Obata Y., Noda N.* Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Therm. Stresses. – 1994. – **17**, No. 3. – P. 471–487. – https://doi.org/10.1080/01495739408946273.
23. *Ootao Y.* Transient thermoelastic analysis for a multilayered hollow cylinder with piecewise power law nonhomogeneity // J. Solid Mech. Mater. Eng. – 2010. – **4**, No. 8. – P. 1167–1177. – https://doi.org/10.1299/jmmp.4.1167.
24. *Tokovyy Y. V., Ma C.-C.* Thermal stresses in anisotropic and radially inhomogeneous annular domains // J. Therm. Stresses. – 2008. – **31,** No. 9. – P. 892–913. – https://doi.org/10.1080/01495730802194433.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОГО ОРТОТРОПНОГО ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЦИЛИНДРА

Определено термоупругое сотояние, обусловленное плоским осесимметричным температурным полем и поверхностными нагрузками, в многослойном полом ортотропным цилиндре с учетом зависимости физико-механических характеристик от температуры и координаты. Задача термоупругости сведена к решению относительно радиальных перемещений систем интегро-алгебраических уравнений, которые получены из интегрального представления решения соответствующей задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с обобщенными производными. При этом использована функция Грина задачи упругости для многослойного ортотропного цилиндра с постоянными физико-механическими характеристиками слоев. Решение полученных систем найдено методом последовательных приближений, ограниченным лишь первым приближением. Числовые исследования, выполненные для трехслойного ортотропного цилиндра с температурозависящими физико-механическими характеристиками, иллюстрируют высокую точность определения перемещений и напряжений.

Ключевые слова: *термоупругое состояние, многослойный ортотропный цилиндр, зависимость физико-механических характеристик от температуры и координаты, обобщенные функции, функция Грина, интегро-алгебраические уравнения, метод последовательных приближений.*

THERMOELASTIC STATE OF A PIECEWISE INHOMOGENEOUS ORTHOTROPIC THERMOSENSITIVE CYLINDER

The thermoelastic state due to a plane axisymmetric temperature field and surface loads in a multilayered hollow orthotropic cylinder with regard to the dependence of physical and mechanical characteristics on the temperature and the coordinate is determined. The thermoelasticity problem is reduced to solving the systems of integral-algebraic equations for radial displacements. These systems are obtained from the integral representation of the solution of the corresponding problem for the ordinary differential equation with generalized derivatives. Wherein the Green function of the elasticity problem for a multilayered orthotropic cylinder with constant physical and mechanical characteristics of layers is used. The solution of obtained systems is found by the sequential approximation method, limited only by the first approximation. Numerical studies performed for a three-layered orthotropic cylinder with temperature dependent physical and mechanical characteristics demonstrate the high accuracy of displacements and stresses determination.

Key words: *thermoelastic state, multilayered orthotropic cylinder, dependence of physical and mechanical characteristics on temperature and coordinate, generalized functions, Green's function, integral-algebraic equations, sequential approximation method.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
09.02.19