

АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВЕ ВИЗНАЧЕННЯ СТАТИЧНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ПЛОСКИХ БАГАТОШАРОВИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ СТРУКТУР

Запропоновано аналітично-числову методикку визначення одновимірного статичного термопружного стану плоских багатошарових структур за довільного характеру температурної залежності фізико-механічних характеристик матеріалу складових. Методика ґрунтується на використанні апарату узагальнених функцій, апроксимації залежностей фізико-механічних характеристик від температури кусково-сталими функціями та введенні у розгляд аналога функції Кірхгофа. Методикку апробовано при дослідженні статичного термопружного стану дво- та тришарової плит.

Ключові слова: багатошарова плита, температурозалежні характеристики, аналітично-числовий розв'язок, термопружний стан

Вступ. Елементи конструкцій сучасного промислового обладнання, як правило, експлуатуються за умов інтенсивного термосилового навантаження і є здебільшого неоднорідними функціонально-градієнтними плоскими тілами або їх фрагментами. Очевидно, що на адекватність теоретичних досліджень термопружної поведінки таких елементів конструкцій істотно впливає нехтування неоднорідністю, зокрема, функціональною градієнтністю (шаруватістю елемента) та залежністю від температури (термочутливістю) фізико-механічних характеристик (ФМХ) матеріалів. Аналіз стану досліджень термомеханічної поведінки таких тіл засвідчує, що комплексне врахування чинників (зокрема, геометрії тіла та неоднорідності його структури, термочутливості ФМХ матеріалу та термосилової дії) приводить до математичної задачі, розв'язання якої навіть числовими методами пов'язане зі значними труднощами і потребує спеціально розроблених алгоритмів або суттєво адаптації існуючих [2, 4, 5, 12, 13, 15]. В інженерній практиці ж віддають перевагу відносно простим аналітично-числовим співвідношенням та алгоритмам, які дають можливість з прогнозованою достовірністю досліджувати термомеханічну поведінку об'єкта.

У роботах [3, 6, 10, 13] запропоновано методикку визначення одновимірних стаціонарних температурних полів та зумовлених ними напружень у шаруватих тілах за лінійної, квадратичної та кубічної залежностей коефіцієнтів теплопровідності матеріалів шарів від температури. Ці методикки за довільної кількості шарів та прийнятого виду термозалежності їхніх коефіцієнтів теплопровідності шляхом перетворення (заміни) Кірхгофа [4] зводять проблему, залежно від умов теплообміну, до розв'язання одного або системи двох нелінійних алгебричних рівнянь, розв'язок яких рекомендується шукати числовими методами (послідовних наближень, збурень тощо). При цьому вибір початкового наближення і з'ясування існування і єдиності розв'язку потребує додаткових досліджень. У додатку роботи [10] для часткового випадку нагрівання багатошарових тіл простої геометричної форми, внутрішня поверхня яких піддається впливу теплового потоку $q_0 = \text{const}$, а зовнішня підтримується при температурі $t_0 = \text{const}$, запропоновано інтегральне подання розв'язку одновимірної стаціонарної задачі теплопровідності, яке не передбачає обмежень на характер температурних залежностей коефіцієнтів теплопровідності.

У цій статті на прикладі плоскої багатошарової плити ілюструється методика аналітично-числового розв'язання задач такого типу. Вона ґрунтується на використанні апарату узагальнених функцій, апроксимації темпе-

[✉] mahorkin@ukr.net

ратурних залежностей ФМХ матеріалів кусково-сталими функціями та введенням у розгляд аналога функції Кірхгофа. Це дає змогу досліджувати тепловий і зумовлений ним термонапружений стани шаруватих тіл за довільного вигляду температурних залежностей ФМХ матеріалів складових та умов теплообміну, а також уникнути необхідності з'ясування існування та єдиності розв'язку нелінійної задачі теплопровідності.

1. Постановка задачі. Розглянемо багат шарову плиту (рис. 1), яка віднесена до декартової системи координат x, y, z . На поверхнях спряження шарів $z = z_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, n-1$, виконуються умови ідеального термомеханічного контакту. Вважаємо, що тепловий стан, спричинений термічним навантаженням на вільні від силового навантаження граничні поверхні $z = z_i$, $i = 0, n$, характеризується одновимірним стаціонарним температурним полем $t(z)$. Припускаємо також, що за відсутності масових сил торцеві поверхні плити теплоізолювані та завантажені системою сил, головні вектор і момент якої дорівнюють нулеві.

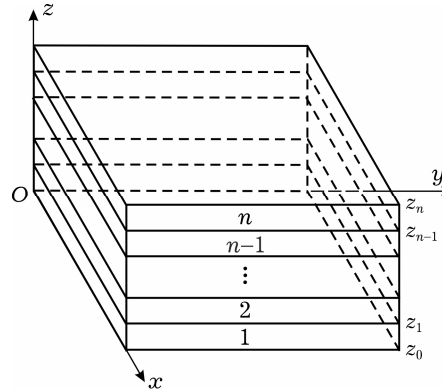


Рис. 1

2. Визначення теплового стану. Згідно з теорією нелінійної теплопровідності неоднорідного тіла [4, 7, 9], математичною моделлю теплової поведінки таких структур є нелінійна крайова задача стаціонарної теплопровідності, яка полягає у визначенні температурного поля $t(z)$ з рівняння теплопровідності

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda_t(t, z) \frac{dt}{dz} \right) = -w_t(z), \quad (1)$$

що задовольняє умови ідеального термоконтракту на поверхнях поділу матеріалів

$$t|_{z_i-0} = t|_{z_i+0}, \quad \left(\lambda_t(t, z) \frac{dt}{dz} \right) \Big|_{z_i-0} = \left(\lambda_t(t, z) \frac{dt}{dz} \right) \Big|_{z_i+0}, \quad (2)$$

за певних граничних умов, якими моделюється зовнішнє термічне навантаження:

$$\left(a_i(t) \frac{dt}{dz} + b_i(t) \right) \Big|_{z_i} = 0, \quad i = 0, n. \quad (3)$$

Тут функції $a_i(t)$, $b_i(t)$ вибираються відповідно до способу нагрівання, $w_t(z)$ – густина потужності внутрішніх джерел (стоків) тепла. Температурно-координатна залежність коефіцієнта теплопровідності $\lambda_t(t, z)$ приймається у вигляді

$$\lambda_t(t, z) = \lambda_t^{(1)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_t^{(i+1)}(t) - \lambda_t^{(i)}(t) \right) S_+(z - z_i), \quad (4)$$

де $\lambda_t^{(i)}(t)$ – залежний від температури коефіцієнт теплопровідності матеріалу i -го шару.

3. Процедура аналітично-числового визначення теплового стану. Аналітично-числове розв'язування крайової задачі (1)–(3) полягає в апроксимації температурних залежностей коефіцієнтів теплопровідності матеріалу шарів $\lambda_t^{(i)}(t)$ кусково-сталими функціями температури вигляду [8]

$$\lambda_t^{(i)}(t) \approx \Lambda^{(i)}(t) = \Lambda_1^{(i)} + \sum_{j=1}^m \left(\Lambda_{j+1}^{(i)} - \Lambda_j^{(i)} \right) S_+(t - t_j),$$

$$t_p = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = t_k, \quad (5)$$

та введенні у розгляд аналога функції Кірхгофа [14]

$$\mathfrak{G}(t, z) = \int_0^t \sum_{i=1}^n \Lambda^{(i)}(\xi) N_i(z) d\xi, \quad (6)$$

де $N_i(z) = S_+(z - z_{i-1}) - S_+(z - z_i)$, $i = 0, \dots, n$; $S_+(z - z_0) = 1$; $[t_p, t_k]$ – спільний інтервал визначення $\lambda_t^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, n$; t_j – вузли апроксимації; $\Lambda_j^{(i)}$ – коефіцієнти апроксимації, числове значення яких із заданою точністю відповідає значенню $\lambda_t^{(i)}(t)$ в інтервалах температур $t_{j-1} < t < t_j$; z_0, z_n – координати обмежувальних граничних поверхонь; z_i , $i = 1, \dots, n-1$, – координати поверхонь спряження (контакту) i -го та $(i+1)$ -го шарів; $S_+(\zeta - \zeta_i) = \begin{cases} 1, & \zeta > \zeta_i, \\ 0, & \zeta \leq \zeta_i. \end{cases}$

У результаті задача визначення стаціонарного теплового стану багатошарової плити зводиться до знаходження температурного поля $t(z)$ зі співвідношення

$$\mathfrak{G}(z) = t \sum_{i=1}^n \Lambda^{(i)}(t) N_i(z) - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m \left(\Lambda_{j+1}^{(i)} - \Lambda_j^{(i)} \right) t_j S_+(t - t_j) \right] N_i(z) \quad (7)$$

за розв'язком частково виродженого диференціального рівняння

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{d\mathfrak{G}}{dz} - \sum_{i=1}^{n-1} \left(K_i \mathfrak{G}|_{z_i} + Q_i \right) \delta_+(z - z_i) \right] = -w_t(z), \quad (8)$$

отриманого з рівняння теплопровідності (1) за допомогою узагальнених функцій шляхом постановки відповідної узагальненої задачі спряження [1, 9, 11, 12]. Тут d/dz – узагальнена похідна,

$$K_\ell = \left(\frac{\Lambda^{(\ell+1)}(\mathfrak{G})}{\Lambda^{(\ell)}(\mathfrak{G})} - 1 \right) \Big|_{z_\ell}, \quad Q_\ell = \left(\frac{\Lambda^{(\ell+1)}(\mathfrak{G})}{\Lambda^{(\ell)}(\mathfrak{G})} F_\ell(\mathfrak{G}) - F_{\ell+1}(\mathfrak{G}) \right) \Big|_{z_\ell}.$$

Між \mathfrak{G} та t при $z_k < \alpha < z_{k+1}$, $k = 0, \dots, n$, відповідно до співвідношення (6) існує взаємно однозначна відповідність, тому

$$S_+(t - t_i) = S_+(\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_i), \quad (9)$$

і, як наслідок, $\Lambda^{(i)}(t) = \Lambda^{(i)}(\mathfrak{G})$, а співвідношення (7) набуває вигляду

$$\mathfrak{G}(z) = t \sum_{i=1}^n \Lambda^{(i)}(\mathfrak{G}) N_i(z) - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m \left(\Lambda_{j+1}^{(i)} - \Lambda_j^{(i)} \right) t_j S_+(\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_j) \right] N_i(z).$$

Звідси отримуємо, що

$$t = \frac{\mathfrak{G} + \sum_{i=1}^n F_i(\mathfrak{G}) N_i(z)}{\sum_{i=1}^n \Lambda^{(i)}(\mathfrak{G}) N_i(z)}, \quad (10)$$

де

$$F_i(\mathfrak{G}) = \sum_{j=1}^m \left(\Lambda_{j+1}^{(i)} - \Lambda_j^{(i)} \right) t_j S_+(\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_j),$$

$$\vartheta_\ell = \vartheta_\ell(z) = \sum_{i=1}^n \left[t_\ell \Lambda^{(i)}(t_\ell) - \sum_{j=1}^m \left(\Lambda_{j+1}^{(i)} - \Lambda_j^{(i)} \right) t_j S_+(t_\ell - t_j) \right] N_i(z).$$

У підсумку розв'язок $\vartheta \equiv \vartheta(z)$ рівняння (8) запишемо у вигляді

$$\vartheta = C_1 z + C_2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(K_i \vartheta|_{z_i} + Q_i \right) S_+(z - z_i) - W_t(z), \quad (11)$$

де $W_t(z) = \int_0^z \int_0^\eta w_t(\zeta) d\zeta d\eta$.

Подаючи $\vartheta|_{z_i}$ у вигляді $\vartheta|_{z_i} = \tilde{K}_1^{(i)} C_1 + \tilde{K}_2^{(i)} C_2 + \tilde{K}_3^{(i)}$, з (11) отримуємо рекурентні співвідношення для визначення $\tilde{K}_j^{(i)}$, $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1^{(i)} &= z_i + \sum_{j=1}^{i-1} K_j \tilde{K}_1^{(j)}, \\ \tilde{K}_2^{(i)} &= 1 + \sum_{j=1}^{i-1} K_j \tilde{K}_2^{(j)}, \\ \tilde{K}_3^{(i)} &= \sum_{j=1}^{i-1} \left(K_j \tilde{K}_3^{(j)} + Q_j \right) - W(z_i). \end{aligned} \quad (12)$$

З огляду на (12) вираз (11) для ϑ набуде вигляду

$$\begin{aligned} \vartheta = C_1 \left[z + \sum_{j=1}^{n-1} K_j \tilde{K}_1^{(j)} S_+(z - z_j) \right] + C_2 \left[1 + \sum_{j=1}^{n-1} K_j \tilde{K}_2^{(j)} S_+(z - z_j) \right] - \\ - \left[W_t(z) - \sum_{j=1}^{n-1} \left(K_j \tilde{K}_3^{(j)} + Q_j \right) S_+(z - z_j) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

У загальному випадку значення констант інтегрування C_1 , C_2 визначаються з системи двох нелінійних алгебричних рівнянь, що отримуються шляхом підстановки виразу (10) з урахуванням (13), у граничні умови (3). Зауважимо, що у випадку задання на одній із обмежувальних поверхонь $z = z_i$, $i = 0, n$, теплообміну 1-го або 2-го роду знаходження C_1 , C_2 зводиться до розв'язання одного нелінійного алгебричного рівняння. Розв'язки цих нелінійних алгебричних рівнянь зручно шукати методом простої ітерації (послідовних наближень), природно взявши за початкове наближення їхні значення при сталих коефіцієнтах теплопровідності.

При заданні на поверхні $z = z_0$ умов теплообміну 1-го роду, а на поверхні $z = z_n$ - умов 2-го роду отримуємо замкнутий аналітичний розв'язок.

4. Визначення термонапруженого стану. Термонапружений стан такої структури за прийнятого термосилового навантаження описується співвідношеннями [4, 10]

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_0(z), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xy} = 0.$$

При цьому рівняння рівноваги задовольняються тотожно, а рівняння сумісності деформацій у напруженнях - за умови

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1 - \nu(t, z)}{E(t, z)} \sigma_0 + \Phi(t, z) \right] = 0, \quad (14)$$

де $\{\nu(t, z), E(t, z), \alpha_t(t, z), \Phi(t, z)\} \sim F(t, z) = \sum_{i=1}^n F_i(t) N_i(z)$ і $\{\nu_i(t), E_i(t), \alpha_{ti}(t)\} \sim F_i(t)$, а $\nu_i(t)$, $E_i(t)$, $\alpha_{ti}(t)$ - залежні від температури коефіцієнт Пуассона, модуль пружності та температурний коефіцієнт лінійного розширення

i -го шару, відповідно, $\Phi_i(t) = \int_0^t \alpha_{ti}(\zeta) d\zeta$ – чисто тепла деформація.

Загальний інтеграл рівняння (14) має вигляд

$$\sigma_0 = \frac{E(t, z)}{1 - \nu(t, z)} \left[A_1 + zA_2 - \Phi(t, z) \right]. \quad (15)$$

Сталі інтегрування A_1 , A_2 за умови, що головний вектор і головний момент напружень σ_{xx} , σ_{yy} дорівнюють нулеві:

$$\int_0^{z_n} \sigma_{xx} dz = \int_0^{z_n} \sigma_{yy} dz = 0, \quad \int_0^{z_n} z\sigma_{xx} dz = \int_0^{z_n} z\sigma_{yy} dz = 0,$$

визначаємо за формулами

$$A_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad A_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2},$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{E_i(t)}{1 - \nu_i(t)} dz, & a_{12} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{zE_i(t)}{1 - \nu_i(t)} dz, \\ a_{22} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{z^2 E_i(t)}{1 - \nu_i(t)} dz, \\ b_1 &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{E_i(t)\Phi_i(t)}{1 - \nu_i(t)} dz, & b_2 &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{zE_i(t)\Phi_i(t)}{1 - \nu_i(t)} dz. \end{aligned} \quad (16)$$

Якщо скористатись апроксимацією температурних залежностей ФМХ матеріалу складових кусково-сталими функціями від температури вигляду (5), враховуючи при цьому (4) та взаємно однозначну відповідність між ϑ та t (9), температурно-координатну залежність ФМХ пакету шарів як єдиного цілого можемо подати у вигляді

$$\begin{aligned} \{\lambda_t, E, \nu, \alpha_t\} &\sim p(t, z) \approx \\ &\approx \tilde{p}(\vartheta, z) = \sum_{i=1}^n \left[\tilde{p}_{i1} + \sum_{j=1}^m (\tilde{p}_{ij+1} - \tilde{p}_{ij}) S_+(\vartheta - \vartheta_{ij}) \right] N_i(z), \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\vartheta_{ij} = \int_0^{t_j} \lambda_{ti}(\zeta) d\zeta \approx \sum_{i=1}^n \left[t_j \tilde{\lambda}_{ti}(t_j) - \sum_{\ell=1}^{m-1} \left(\tilde{\lambda}_{ti}^{(\ell+1)} - \tilde{\lambda}_{ti}^{(\ell)} \right) t_j S_+(t_j - t_\ell) \right] N_i(z),$$

$t_p = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = t_k$ – спільні вузли апроксимації, \tilde{p}_{ij} – значення коефіцієнтів апроксимації температурної залежності $p_i(t)$ відповідної ФМХ i -го шару, які з заданою точністю відповідають їхнім значенням в інтервалах температур $t_{j-1} < t < t_j$. У такому разі їх алгебричні комбінації згідно з [9] мають такий самий вигляд (17), і співвідношення (15), (16) подаємо як

$$\sigma_0 = \tilde{L}(\vartheta, z) \left[A_1 + zA_2 - \tilde{\Phi}(\vartheta, z) \right], \quad (18)$$

$$a_{11} = \int_0^{z_n} \tilde{L}(\vartheta, z) dz, \quad a_{12} = \int_0^{z_n} z\tilde{L}(\vartheta, z) dz, \quad a_{22} = \int_0^{z_n} z^2 \tilde{L}(\vartheta, z) dz,$$

$$b_1 = \int_0^{z_n} \tilde{L}(\vartheta, z) \tilde{\Phi}(\vartheta, z) dz, \quad b_2 = \int_0^{z_n} z \tilde{L}(\vartheta, z) \tilde{\Phi}(\vartheta, z) dz. \quad (19)$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\vartheta, z) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\tilde{E}_{i1}}{1 - \tilde{\nu}_{i1}} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\tilde{E}_{ij+1}}{1 - \tilde{\nu}_{ij+1}} - \frac{\tilde{E}_{ij}}{1 - \tilde{\nu}_{ij}} \right) S_+(\vartheta - \vartheta_{ij}) \right] N_i(z), \\ \tilde{\Phi}(\vartheta, z) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\tilde{\alpha}_{ti}^{(1)}}{\tilde{\lambda}_{ti}^{(1)}} \vartheta + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\tilde{\alpha}_{ti}^{(j1)}}{\tilde{\lambda}_{ti}^{(j+1)}} - \frac{\tilde{\alpha}_{ti}^{(j)}}{\tilde{\lambda}_{ti}^{(j)}} \right) (\vartheta - \vartheta_{ij}) S_+(\vartheta - \vartheta_{ij}) \right] N_i(z). \end{aligned}$$

Співвідношення (18), (19) надають змогу досліджувати термопружну поведінку плоского шаруватого пакету безпосередньо за розв'язком відповідної крайової задачі для рівняння (8) на визначення функції типу функції Кірхгофа (6) та уникнути при цьому необхідності з'ясування єдиності розв'язку відповідної нелінійної задачі теплопровідності.

5. Результати числової апробації. Апробацію запропонованого аналітично-числового підходу виконували на прикладі числового дослідження стаціонарного теплового стану та спричиненого ним статичного термопружного стану тришарової пластини, гранична поверхня $z_0 = 0$ якої знаходиться під дією сталої температури t_0 , а гранична поверхня $z_3 = h_3$ - теплового потоку q .

Температурне поле такої тришарової структури згідно зі співвідношеннями (10), (13) визначається за формулою

$$t = \frac{\vartheta + F_1(\vartheta) S_-(h_1 - z) + F_2(\vartheta) N_2(z) + F_3(\vartheta) S_+(z - h_2)}{\Lambda^{(1)}(\vartheta) S_-(h_1 - z) + \Lambda^{(2)}(\vartheta) N_2(z) + \Lambda^{(3)}(\vartheta) S_+(z - h_2)}. \quad (20)$$

Тут

$$\begin{aligned} \vartheta &= C_1 [z + K_1 h_1 S_+(z - h_1) + (h_2 + h_1 K_1) K_2 S_+(z - h_2)] + \\ &\quad + C_2 [1 + K_1 S_+(z - h_1) + (1 + K_1) K_2 S_+(z - h_2)] + \\ &\quad + Q_1 S_+(z - h_1) + (Q_1 K_2 + Q_2) S_+(z - h_2), \\ K_k &= \left(\frac{\Lambda^{(k+1)}(\vartheta)}{\Lambda^{(k)}(\vartheta)} - 1 \right) \Big|_{h_k}, \quad Q_k = \left(\frac{\Lambda^{(k+1)}(\vartheta)}{\Lambda^{(k)}(\vartheta)} F_k - F_{k+1}(\vartheta) \right) \Big|_{h_k}, \quad k = 1, 2, \\ S_-(h_1 - z) &= 1 - S_+(z - h_1), \\ F_k(\vartheta) &= \sum_{j=1}^m \left(\Lambda_{j+1}^{(k)} - \Lambda_j^{(k)} \right) t_j S_+(\vartheta - \vartheta_j), \\ \vartheta_\ell = \vartheta_\ell(z) &= \sum_{i=1}^3 \left[t_\ell \Lambda^{(i)}(t_\ell) - \sum_{j=1}^m \left(\Lambda_{j+1}^{(i)} - \Lambda_j^{(i)} \right) t_j S_+(t_\ell - t_j) \right] N_i(z). \end{aligned}$$

Сталі інтегрування C_1 , C_2 визначаємо з граничних умов за співвідношеннями

$$C_1 = q, \quad C_2 = \vartheta(t_0, z_0) = \int_0^{t_0} \lambda_{t1}(\xi) d\xi.$$

Якщо прийняти ФМХ матеріалів конкретних суміжних шарів однаковими, то співвідношення (15), (18), (20) будуть описувати термопружний стан однорідної або двошарової термочутливої плити.

З метою верифікації результатів статичний термопружний стан, спричинений температурним полем (20), обчислювали як за співвідношенням (15), так і за співвідношенням (18).

Числові дослідження проведемо для плит, виготовлених з Aluminum oxide (технічної кераміки) і титанового сплаву Ti-6Al-4V. Температурні залежності ФМХ в інтервалі температур $[t_p = 273\text{K}, t_k = 873\text{K}]$ їх визначення приймали у вигляді

– для Aluminum oxide (технічної кераміки) [4, 16]:

$$\begin{aligned}\lambda_t(t) &= (1.5828 \cdot 10^4 t^{-1} - 14.087 + 8.772 \cdot 10^{-2} t) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})], \\ E(t) &= (3.4955 \cdot 10^{11} - 1.3468 \cdot 10^8 t + 1.4076 \cdot 10^5 t^2) [\text{Па}], \\ \alpha_t(t) &= (6.8269 \cdot 10^{-6} + 1.2548 \cdot 10^{-9} t) [\text{К}^{-1}], \\ v(t) &= 236.283 \cdot 10^{-3} - 31.7412 \cdot 10^{-6} t + 71.2602 \cdot 10^{-9} t^2;\end{aligned}\quad (21)$$

– для титанового сплаву Ti-6Al-4V [16]:

$$\begin{aligned}\lambda_t(t) &= (1 + 1.704 \cdot 10^{-2} t) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})], \\ E(t) &= (122.56 \cdot 10^9 - 56.206 \cdot 10^9 t) [\text{Па}], \\ \alpha_t(t) &= (7.5788 \cdot 10^{-6} + 5.03081 \cdot 10^{-9} t - 23.8505 \cdot 10^{-12} t^2) [\text{К}^{-1}], \\ v(t) &= 288.4 \cdot 10^{-3} + 32.3296 \cdot 10^{-6} t.\end{aligned}\quad (22)$$

Температурні залежності ФМХ матеріалів на температурному інтервалі їх визначення апроксимували виразом вигляду (17), у якому коефіцієнти апроксимації \tilde{p}_{ij} та вузли апроксимації t_j задавали так:

$$\tilde{p}_{ij} = p_i(t_j^*), \quad t_j = t_p + j \frac{t_k - t_p}{m + 1}, \quad t_j^* = t_j - \frac{t_k - t_p}{2(m + 1)}, \quad (23)$$

де m – кількість вузлів апроксимації.

Характерні результати числових досліджень у графічному вигляді подано на рис. 2–рис. 7.

Розподіл значень температури $t(\tilde{z})$ і напружень $\sigma(\tilde{z})$ по товщині $\tilde{z} = z/h_3$ для різної кількості вузлів апроксимації у двошаровій плиті кераміка – сплав Ti-6Al-4V при $h_1/h_3 < h_2/h_3 = 0.8$, $t_0 = 273\text{K}$, $q = 20\text{кВт}/\text{м}^2$ проілюстровано на рис. 2–рис. 4, а в тришаровій плиті з технічної кераміки, армованій шаром зі сплаву Ti-6Al-4V, при $h_1/h_3 = 0$, $h_2/h_3 = 0.6$, $t_0 = 273\text{K}$, $q = 20\text{кВт}/\text{м}^2$ подано на рис. 5–рис. 7.

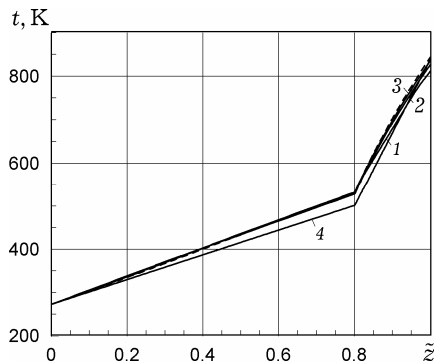


Рис. 2

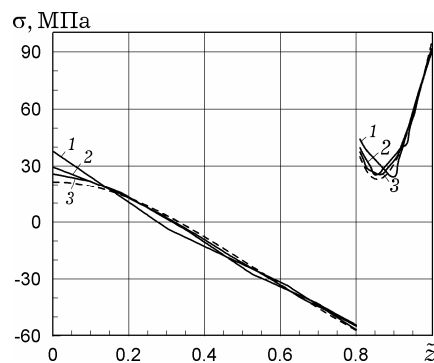


Рис. 3

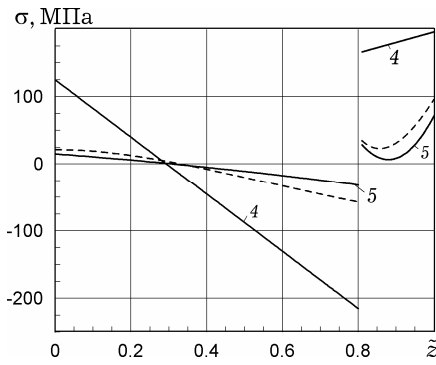


Рис. 4

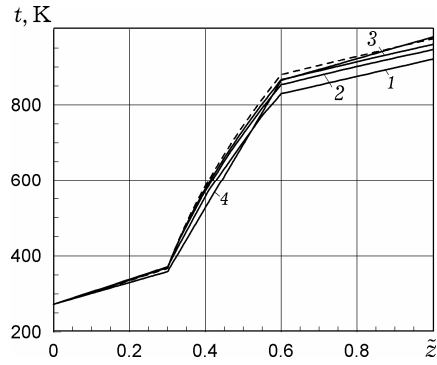


Рис. 5

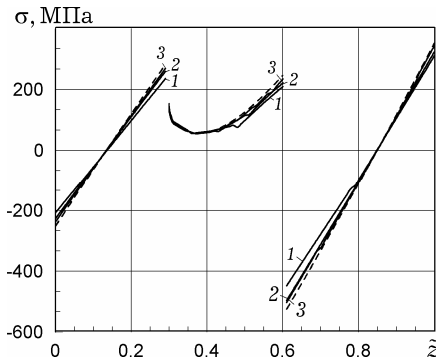


Рис. 6

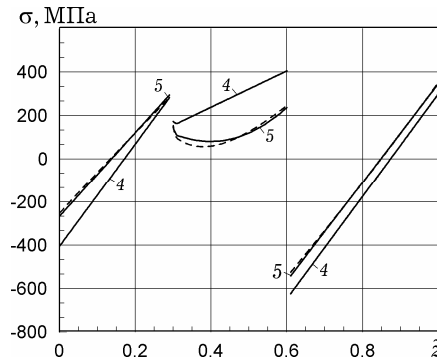


Рис. 7

Криві на рис. 2–рис. 7 ілюструють розподіл значень температури $t(\tilde{z})$ і напружень $\sigma(\tilde{z})$, розрахованих за апроксимації: усіх температурних залежностей ФМХ матеріалів згідно зі співвідношеннями (23) при $m = 3, 6, 12$ (криві 1–3 відповідно) та середньоінтегральними значеннями

$$p_{ij}^* = \frac{1}{t_k - t_p} \int_{t_p}^{t_k} p_{ij}(t) dt$$

на інтервалі їх визначення (крива 4); лише за середньоінтегральним значенням коефіцієнта теплопровідності (крива 5). Штрихові криві відповідають значенням температури $t(\tilde{z})$ і напружень $\sigma(\tilde{z})$, обчислених за прийнятих температурних залежностях ФМХ (21), (22).

Табл. 1 ілюструє максимальні значення відносної похибки $\varepsilon_F = \left| \frac{F - F^*}{\Delta F} \right|$

залежно від кількості вузлів апроксимації (F, F^* – точне та наближене значення функції, відповідно, $\Delta F = F_{\max} - F_{\min}$).

Таблиця 1

Кількість вузлів апроксимації	Двошарова плита		Тришарова плита		
	$\varepsilon_t, \%$ $\overline{\Delta t} = 800 \text{ К}$	$\varepsilon_\sigma, \%$ $\overline{\Delta \sigma} = 1.53 \cdot 10^8 \text{ Па}$	$\varepsilon_t, \%$ $\overline{\Delta t} = 800 \text{ К}$	$\varepsilon_\sigma, \%$ $\overline{\Delta \sigma} = 1.53 \cdot 10^8 \text{ Па}$	
3	3.8	10.7	6.8	3.8	
6	2.1	5.3	3.6	1.6	
12	1.0	2.8	1.8	1.2	
24	0.5	1.5	1.2	0.8	
За середньоінтегральних значень	усіх ФМХ	4.7	103.6	7.4	9.7
	лише $\lambda_t(t)$	4.7	18.3	7.4	1.3

Наведені у роботі результати свідчать, що:

– запропонована процедура забезпечує швидку збіжність процесу числового визначення теплового та зумовленого ним термонапруженого стану: збільшення вдвічі числа вузлів апроксимації приводило у досліджуваних випадках до зменшення максимального значення приведеної відносної похибки приблизно в півтора-два рази;

– неврахування характеру температурозалежності $\lambda_i(t)$ матеріалів шарів зазвичай призводить до значних похибок в оцінці теплового та термопружного станів системи як у кількісному, так і в якісному сенсі (у досліджуваних випадках, залежно від структури плити, відносна похибка досягала 11.9% для температури та 32.8% – для напружень);

– формальне використання при попередніх розрахунках апроксимації температурних залежностей ФМХ сталими величинами, рівними їхнім середньоінтегральним значенням, найімовірніше, призведе до неадекватної оцінки термопружного стану об'єкта.

Висновок. Запропонований аналітично-числовий підхід до розв'язання одновимірних задач стаціонарної теплопровідності та статичних задач термопружності плоских шаруватих структур із термочутливих матеріалів дає змогу досліджувати тепловий та напружений стани для різного характеру температурних залежностей ФМХ їхніх складових.

1. Коляно Ю. М., Кулик О. М., Кушнір Р. М. Про постановку узагальненої задачі спряження для рівнянь термопружності кусково-однорідних тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 2. – С. 43–47.
2. Кушнір Р. М., Попович В. С. Напружений стан термочутливої пластини в центральній симетричному температурному полі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 2. – С. 5–12.
Te same: Kushnir R. M., Popovych V. S. Stressed state of a thermosensitive plate in a central-symmetric temperature field // Mater. Sci. – 2006. – 42, No. 2. – P. 145–154. – <https://doi.org/10.1007/s11003-006-0067-8>.
3. Кушнір Р. М., Попович В. С. Про визначення усталеного термопружного стану багат шарових структур за високотемпературного нагрівання // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 42–47.
4. Кушнір Р. М., Попович В. С. Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
5. Кушнір Р. М., Попович В. С., Процюк Б. В. Про розвиток досліджень термомеханічної поведінки термочутливих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 3. – С. 7–27.
Te same: Kushnir R. M., Popovych V. S., Protsyuk B. V. On the development of investigations of the thermomechanical behavior of thermally sensitive bodies // J. Math. Sci. – 2019. – 236, No. 1. – P. 1–20. – <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4094-4>.
6. Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б. Термопружний стан шаруватих термочутливих тіл обертання за квадратичної залежності коефіцієнта теплопровідності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – 46, № 1. – С. 7–18.
Te same: Kushnir R. M., Protsyuk Yu. B. Thermoelastic state of layered thermosensitive bodies of revolution for the quadratic dependence of the heat-conduction coefficients // Mater. Sci. – 2010. – 46, No. 1. – P. 1–15. – <https://doi.org/10.1007/s11003-010-9258-4>.
7. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. – Москва: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1976. – 368 с.
8. Махоркін І. М., Мастикаш Л. В. Про один аналітично-числовий спосіб розв'язування одновимірної квазістатичної задачі термопружності для термочутливого тіла простої геометрії // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 4. – С. 99–106.
Te same: Makhorkin I. M., Mastykash L. V. On one numerical-analytic method for the solution of one-dimensional quasistatic problems of thermoelasticity for thermosensitive bodies of simple geometry // J. Math. Sci. – 2018. – 228, No. 2. – P. 122–132. – <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3610-2>.

9. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
10. Процюк Ю. Б. Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 4. – С. 151–161.
Te same: Protsyuk Yu. B. Static thermoelasticity problems for layered thermosensitive plates with cubic dependence of the coefficients of heat conductivity on temperature // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 4. – P. 481–496.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0700-z>.
11. Kushnir R. M. Generalized conjugation problems in mechanics of piecewise-homogeneous elements of constructions // Z. Angew. Math. Mech. – 1996. – **76**, S5 (Suppl. 5). – P. 283–284.
12. Kushnir R., Popovych V. Application of the generalized functions method for analysis of thermal stresses in piecewise-homogeneous solids // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 1. – P. 224–230. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_602.
13. Kushnir R., Protsyuk B. Determination of the thermal fields and stresses in multilayer solids by means of the constructed Green functions // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_608.
14. Makhorkin M., Makhorkin I., Makhorkina T. Determination of the stationary thermal state of simple geometry layered structures with temperature dependent heat conductivity factors // Econtechmod (PAN, Lublin, Polish). – 2018. – **7**. No. 3. – P. 23–28. – <http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/45134>.
15. Popovych V. Methods for determination of the thermo-stressed state of thermosensitive solids under complex heat exchange conditions // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 6. – P. 2997–3008. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_617.
16. Shen H.-S. Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 280 p.

АНАЛИТИЧЕСКИ-ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКОГО ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР

Предложена аналитически-численная методика определения одномерного статического термоупругого состояния плоских многослойных структур при произвольном характере температурной зависимости физико-механических характеристик материала составляющих. Методика базируется на использовании аппарата обобщенных функций, аппроксимации зависимостей физико-механических характеристик от температуры кусочно-постоянными функциями и введении в рассмотрение аналога функции Кирхгофа. Методика апробирована при исследовании статического термоупругого состояния двух- и трёхслойной плит.

Ключевые слова: многослойная плита, температурозависимые характеристики, аналитически-численное решение, термоупругое состояние

AN ANALYTIC-NUMERICAL DETERMINATION OF STATIC THERMOELASTIC STATE FOR PLANE MULTILAYERED THERMOSENSITIVE STRUCTURES

An analytic-numerical method for the determination of one-dimensional static thermoelastic state of plane multilayer structures with arbitrary type of temperature dependence of the physical and mechanical characteristics of materials of their components is proposed. The technique is based on the use of the apparatus of the theory of generalized functions, approximation of temperature dependences of materials' physical and mechanical characteristics by piecewise-constant functions and introduction into consideration the analog of Kirchhoff function. The method is approbated in the study of the static thermoelastic state of two- and three-layer plates.

Key words: multilayer plate, temperature-dependent characteristics, analytic-numerical solution, thermoelastic state.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.10.19