

НЕСТАЦІОНАРНІ ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ У КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СМУГАХ ЗА ВРАХУВАННЯ ФРИКЦІЙНОГО ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ

Наведено підхід для визначення нестационарних температурних полів у кусково-однорідних смугах за конвективного теплообміну з середовищем та теплоутворень від дії сил тертя. Алгоритм розв'язування задачі ґрунтується на використанні інтегрального перетворення Лапласа та його обернення за допомогою адаптованої до задач теплопровідності формули обернення Пруднікова. З використанням розробленого алгоритму досліджено нестационарні температурні поля, які виникають при терті кусково-однорідних смуг.

Ключові слова: кусково-однорідні смуги, конвективний теплообмін, фрикційне тепловиділення, нестационарні температурні поля, інтегральне перетворення Лапласа.

У сучасних дослідженнях термопружних станів контактуючих тіл значне місце займають моделі, що враховують фрикційний нагрів і вплив тертя на зносостійкість матеріалів конструкцій. Розвиток новітніх технологій виготовлення стійких до зношування матеріалів і складність врахування взаємопов'язаних процесів в області контакту ставить нові вимоги до розрахунків термопружного стану конструкцій за таких умов, що, в свою чергу, вимагає розвитку нових підходів до розв'язування такого класу задач. Про актуальність таких досліджень свідчать публікації у вітчизняних і зарубіжних наукових виданнях. Серед праць з цієї тематики є такі, що ґрунтуються на класичних механічних моделях фрикційного ковзаючого контакту [12, 20], на незв'язаних квазістатичних задачах термопружності [8], на врахуванні зв'язаності температурних і деформаційних полів [1]. Багато праць присвячено практичним дослідженням впливу фрикційного теплоутворення у конкретних контактних системах, зокрема [17, 18], для певних термочутливих [6] чи композитних [9, 19, 22] матеріалів.

Метою роботи є апробація аналітично-числового підходу, що ґрунтується на використанні модифікованої формули обернення Пруднікова до задач теплопровідності кусково-однорідних смуг за фрикційного нагріву. Розглянуто незв'язану задачу нестационарної теплопровідності для кусково-однорідної структури, що нагрівається шляхом конвективного теплообміну з оточуючим середовищем змінної в часі температури та тепловиділення, зумовлених тертям внаслідок ковзання між системами смуг. Розв'язування задачі, в якій враховано неідеальний тепловий контакт на стику смуг, проведено з використанням перетворення Лапласа, матричного методу Карслоу та адаптованої до задач теплопровідності формули обернення Пруднікова для безпосереднього обчислення оригіналу через трансформанту Лапласа. Розв'язок цієї задачі без тепловиділення в зображеннях має відносно простий вигляд. Зокрема, в праці [7] цей розв'язок записано у матричному вигляді за рекурентними формулами, а також вказано, що побудова оригіналів в аналітичному вигляді пов'язана зі складністю знаходження коренів знаменника у зображенні розв'язку, що вимагає проведення достатньо складних обчислень при знаходженні температури. Тому в явному вигляді у літературі такі розв'язки отримано тільки для окремих випадків (двох-трьох складових) [2, 7, 14]. Зауважимо, що задачі теплопровідності для півпросторів, плоско-паралельних шару і півпростору за врахування тепловиділення від тертя розглянуто в працях [4, 5]. У цій роботі з використанням запропонованої в [15, 16] методики дослідимо нестационарні температурні поля для випадків двох і трьох складових смуг.

✉ t_solyar@ukr.net

1. Формулювання задачі. Розглянемо систему з двох підсистем кусково-однорідних смуг, які складаються з N і J однорідних смуг товщини $2h$. Для першої підсистеми смуг, $j = 1, \dots, N$, введемо позначення ширини ℓ_j , коефіцієнта температуропровідності b_j , коефіцієнта теплопровідності χ_j і коефіцієнта тепловіддачі α_j^z з плоскої поверхні j -ї смуги. Для другої підсистеми з J однорідних смуг аналогічні величини будемо позначати зірочкою. Приймемо, що смуги перебувають в умовах конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем за законом Ньютона. У початковий момент часу $\tau = 0$ межа J -ї смуги другої підсистеми починає ковзати вздовж N -ї межі першої підсистеми зі швидкістю $v(\tau)$ з коефіцієнтом тертя ρ між цими підсистемами, і на стику двох підсистем смуг виконуються умови неідеального теплового контакту. Вважаємо, що до зовнішніх меж смуг прикладено стискувальні та зсувні рівномірно розподілені зусилля $\sigma = -p$ та $|\sigma_\tau| = \rho p$, які генерують тепло в області контакту підсистем, тобто на межі контакту внаслідок тертя виникають джерела тепла $w(\tau) = \rho |v(\tau)| p$.

Розглянемо *першу підсистему смуг*. Приймемо, що між цими смугами виконуються умови ідеального теплового контакту. Рівняння теплопровідності для однорідної j -ї складової у безрозмірних змінних має вигляд [13]

$$\frac{\partial^2 t_j}{\partial x^2} - \text{Bi}_j t_j - \frac{\partial t_j}{a_j \partial \theta} = 0, \quad x_{j-1} < x < x_j. \quad (1)$$

Тут x – координата, віднесена до деякої характерної довжини H смуги; $x_0 = 0$; $x_j = (\ell_1 + \dots + \ell_j)/H$, $j > 0$; $\text{Bi}_j = \frac{\alpha_j^z H^2}{\chi_j h}$, $\theta = \frac{b_k \tau}{H^2}$; $a_j = b_j/b_k$; b_k – коефіцієнт температуропровідності деякого вибраного матеріалу.

За конвективного теплообміну гранична умова при $x_0 = 0$ буде

$$-\frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\alpha H}{\chi_1} (t_1 - f_1) = 0, \quad (2)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі з границі першої смуги, f_1 – температура зовнішнього до цієї межі середовища.

Умови ідеального теплового контакту на стику однорідних смуг набудуть вигляду [7]

$$\begin{aligned} t_{j-1}(x_j - 0, \theta) &= t_j(x_j + 0, \theta), \\ q_{j-1}(x_j - 0, \theta) &= q_j(x_j + 0, \theta), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3)$$

де $q_j = -\lambda_j \frac{\partial t_j}{\partial x}$; $q_j \chi_k / H$ – потік тепла в додатному напрямку осі Ox ; $\lambda_j = \chi_j / \chi_k$, χ_k – коефіцієнт теплопровідності вибраного матеріалу; $r_j \chi_k / H$ – термоопір при $x = x_j$.

Запишемо умови (3) у матричному вигляді [7]

$$\begin{pmatrix} t_j(x_j + 0) \\ q_j(x_j + 0) \end{pmatrix} = R_j \begin{pmatrix} t_{j-1}(x_j - 0) \\ q_{j-1}(x_j - 0) \end{pmatrix}, \quad R_j = \begin{pmatrix} 1 & -r_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Застосуємо до рівнянь (1) та умов (2)–(4) перетворення Лапласа за змінною θ , приймаючи, що в початковий момент часу температура дорівнює нулеві. Зображення Лапласа для температури запишемо у вигляді

$$\tilde{t}_j = T_{j-1} \operatorname{ch} p_j(x - x_{j-1}) - Q_{j-1} \frac{\operatorname{sh} p_j(x - x_{j-1})}{\lambda_j p_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

де $T_{j-1} = \tilde{t}_j(x_{j-1} + 0)$, $Q_{j-1} = -\lambda_j \left. \frac{\partial \tilde{t}_j}{\partial x} \right|_{x=x_{j-1}+0}$, $p_j = \sqrt{\operatorname{Bi}_j + s/a_j}$, s – параметр

перетворення Лапласа за часовою координатою θ . Тут і далі величина з хвилькою позначатиме трансформанту Лапласа від цієї величини.

Зі співвідношення (5) випливає, що зображення температури і потоку тепла на обох межах смуги пов'язані матричним співвідношенням [7]

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}_j(x_j - 0) \\ \tilde{q}_j(x_j - 0) \end{pmatrix} = Y_j \begin{pmatrix} T_{j-1} \\ Q_{j-1} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

де Y_j – квадратна матриця з елементами

$$m_{11}^{(j)} = m_{22}^{(j)} = \operatorname{ch}(p_j H_j), \quad m_{12}^{(j)} = -\frac{\operatorname{sh}(p_j H_j)}{\lambda_j p_j},$$

$$m_{21}^{(j)} = -\lambda_j p_j \operatorname{sh}(p_j H_j), \quad H_j = \ell_j / H.$$

Враховуючи, що з огляду на умови (4)

$$\begin{pmatrix} T_j \\ Q_j \end{pmatrix} = R_j \begin{pmatrix} \tilde{t}_{j-1}(x_j - 0) \\ \tilde{q}_{j-1}(x_j - 0) \end{pmatrix},$$

отримуємо

$$W_j = M_j W_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (7)$$

де $W_j = \begin{pmatrix} T_j \\ Q_j \end{pmatrix}$, $M_j = R_j Y_j$.

На підставі формули (7) маємо

$$W_j = D_j W_0, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (8)$$

де $D_j = M_j \cdot M_{j-1} \cdot \dots \cdot M_1$, а T_0 і Q_0 – трансформанти Лапласа температури і потоку тепла на межі першої смуги $x_0 = 0$.

На основі граничної умови (2) маємо

$$Q_0 + \operatorname{Bi}_0(T_0 - F_0) = 0,$$

де $\operatorname{Bi}_0 = \alpha H / \chi_k$.

Аналогічно розглядаємо *другу підсистему* з J однорідних смуг. На координатній осі Ox ці однорідні смуги займають область $x_{j-1}^* < x < x_j^*$, $j = 1, 2, \dots, J$, де $x_0^* = 0$ і $x_j^* = (\ell_1^* + \dots + \ell_j^*) / H$, $j > 0$.

Перша смуга, $x_0^* < x < x_1^*$, цієї підсистеми контактує з останньою смугою першої підсистеми, а на межі $x = x_j^*$ останньої смуги температура $t_j^*(x, \theta)$ задовольняє граничну умову конвективного теплообміну

$$\frac{\partial t_j^*}{\partial x} + \frac{\alpha^* H}{\chi_j^*} (t_j^* - f_j^*) = 0,$$

де α^* – коефіцієнт тепловіддачі з границі $x = x_j^*$, а f_j^* – температура зовнішнього до цієї межі середовища.

Для цієї підсистеми смуг також введемо величину, пропорційну до потоку тепла в додатному напрямку осі Ox :

$$q_j^* = -\lambda_j^* \frac{\partial t_j^*}{\partial x}.$$

Аналогічно до (8) отримуємо

$$W_j^* = D_j^* W_0^*, \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \quad (9)$$

де $W_j^* = \begin{pmatrix} T_j^* \\ Q_j^* \end{pmatrix}$, $D_j^* = M_j^* \cdot M_{j-1}^* \cdot \dots \cdot M_1^*$, а T_j^* і Q_j^* – трансформанти Лапласа температури і потоку тепла.

Зазначимо, що з огляду на умову при $x = x_j^*$ маємо

$$-Q_J^* + \text{Bi}_0^*(T_J^* - F_J^*) = 0,$$

де $\text{Bi}_0^* = \alpha^* H / \chi_k$, а F_J^* – трансформанта Лапласа температури зовнішнього до межі $x = x_j^*$ середовища.

Розглянемо умови неідеального контакту між двома підсистемами кусково-однорідних смуг. Запишемо їх у вигляді

$$\begin{aligned} t_0^*(x_0^* + 0, \theta) - t_N(x_N - 0, \theta) &= 0, \\ q_N(x_N - 0, \theta) + p v_0 \rho g(\theta) H / \chi_k &= q_0^*(x_0^* + 0, \theta). \end{aligned} \quad (10)$$

Тут використано такий вираз для функції, що описує тепловиділення:

$$w(\theta) = \rho |v| p = \rho v_0 p g(\theta),$$

де $g(\theta)$ – безрозмірна функція, v_0 – деяке характерне значення швидкості (наприклад, максимальне).

Після перетворення Лапласа умови (10) набудуть вигляду

$$T_0^* - \tilde{t}_N(x_N - 0) = 0, \quad Q_0^* - \tilde{q}_N(x_N - 0) = \Theta G(s),$$

де $\Theta = p v_0 \rho H / \chi_k$, $G(s)$ – зображення Лапласа функції $g(\theta)$.

Далі розглянемо випадок, коли нагрів здійснюється тільки за рахунок тепловиділення внаслідок тертя (температури зовнішніх середовищ приймаємо рівними нулеві).

Тоді для визначення невідомих T_0 , Q_0 , T_0^* , Q_0^* отримуємо систему чотирьох рівнянь, яку запишемо у матричному вигляді

$$\begin{aligned} (\text{Bi}_0, 1) W_0 &= 0, \\ (\text{Bi}_0^*, -1) Y_J^* D_{J-1}^* W_0^* &= 0, \\ W_0^* - Y_N D_{N-1} W_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \Theta G(s) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отримані співвідношення (6)–(8), (11) дають можливість знайти зображення Лапласа температури і потоків тепла на стику всіх смуг. Значення зображень температури у довільній точці смуги визначаємо за формулами (5). Таким чином, задачу зведено до визначення оригіналів температури на основі відомих трансформант Лапласа. Для цього застосуємо аналітично-числовий метод обчислення оригіналу, побудований на основі формули Пруднікова [3].

Приймемо, що для заданої на проміжку $0 < t < \ell$ функції $f(t)$ відомими є значення $f(0)$, $f'(0)$. Вважатимемо також, що відомим є значення ори-

гіналу при великих значеннях змінної t , яке позначимо через $f_\infty = \text{const}$. Тоді маємо [10, 21]

$$f(t) = \frac{1}{\ell} \exp\left(c \frac{t}{\ell}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp\left(2\pi n i \frac{t}{\ell}\right) + (1 + \gamma)[f(0) + f'(0)(t + \gamma\ell)] - \gamma f_\infty - R_2, \quad (12)$$

$$F_n = F(s_n) - \frac{f(0)}{s_n} - \frac{f'(0)}{s_n^2}, \quad R_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-nc)[f(t + n\ell) - f_\infty], \quad \gamma = \frac{1}{\exp(c) - 1},$$

$0 < t < \ell$, $s_n = (c + 2\pi ni)/\ell$. Тут c і ℓ – параметри ($\text{Re}(c) > 0$), вибором яких можна покращити збіжність ряду в (12) і забезпечити малість залишкового члена R_2 .

Питання вибору параметрів c , ℓ детально проаналізовано в працях [11, 15, 16].

Зауваження 1. Вище розглянуто контакт двох підсистем смуг з тепловіддачею з лицьових поверхонь. Поклавши в наведених співвідношеннях коефіцієнти тепловіддачі $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, N$, $\alpha_j^* = 0$, $j = 1, \dots, J$, отримаємо задачу теплопровідності для системи кусково-однорідних шарів.

2. Перевірка достовірності підходу. Розглянемо задачу про визначення температури для смуги, виготовленої з металокераміки ФМК-11 (ширина смуги H , $\chi_1 = 34,31 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $b_1 = 15,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$) та основи із чавуну ЧХМК (ширина смуги $5H$, $\chi_1^* = 51 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $b_1^* = 14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$). Обчислення виконано при нульових значеннях температури на обох зовнішніх межах смуг і сталій швидкості руху ($g(\theta) = 1$). Тепловіддачу з лицьових площин смуг поклали рівною нулеві. При розрахунках за формулою (12) приймали $\ell = 50$, $c = 5$, в ряді (12) утримували до 800 членів, що давало змогу зробити похибку меншою ніж 1%.

Результати обчислень залежності відносної температури T/Θ від часової координати θ для цього випадку наведено на рис. 1. Тут криві 2, 3, 4 відповідають температурам в основі для значень $x = 2, 3, 4$, крива 5 – на межі контакту $x = 5$.

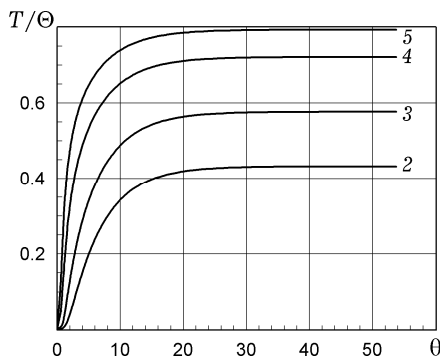


Рис. 1. Залежність відносної температури від часу при сталій швидкості.

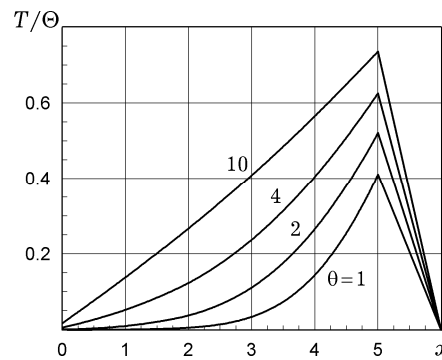


Рис. 2. Залежність відносної температури від координати при сталій швидкості.

Наведені на рис. 1 дані добре узгоджуються із результатами обчислень, які були отримані у роботі [4] для двошарової системи іншим методом.

Для значень $\theta = 1, 2, 4, 10$ на рис. 2 зображено результати обчислень залежності T/Θ від координати x , які також збігаються з даними роботи [4] (зокрема, при $\theta = 1$).

Для цієї двошарової системи виконано також дослідження, коли смуги рухаються у різних напрямках за синусоїдальним законом $v(\theta) = v_0 \sin(k\theta)$ при $g(\theta) = |\sin(k\theta)|$. Зображення Лапласа для функції $g(\theta)$ має вигляд [3]

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + k^2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi i}{2k} s\right). \quad (13)$$

Температуру обчислювали в перерізах x_j , $j = 1, \dots, 9$:

$$x_j = 0, 1.0, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0.$$

На рис. 3 наведено результати обчислень залежності відносної температури T/Θ від часу θ при змінній швидкості $v(\theta)$ і значенні $k = 1$ у формулі (13) в перерізах x_2, x_3, x_4, x_5 (рис. 3а) і x_6, x_7, x_8, x_9 (рис. 3б).

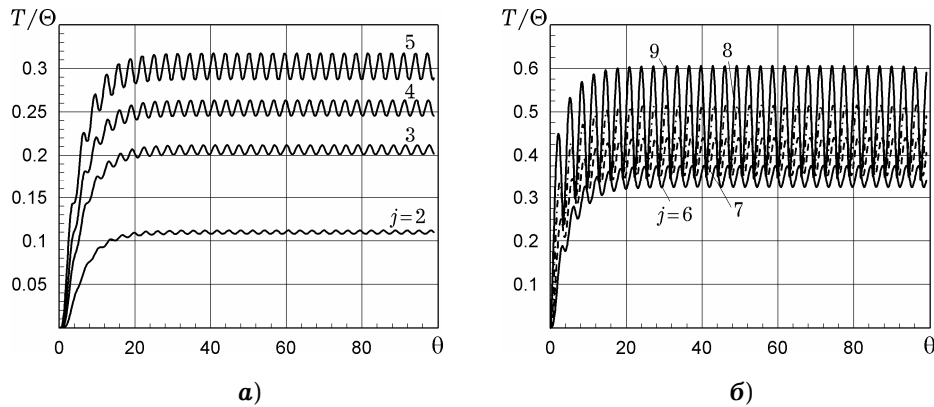


Рис. 3. Залежність відносної температури від часу при змінній швидкості для $k = 1$.

На рис. 4 зображено криві залежності T/Θ від координати x для $\theta = 1, 2, 4, 10$ при змінній швидкості $v(\theta)$ і значенні $k = 1$ у формулі (13).

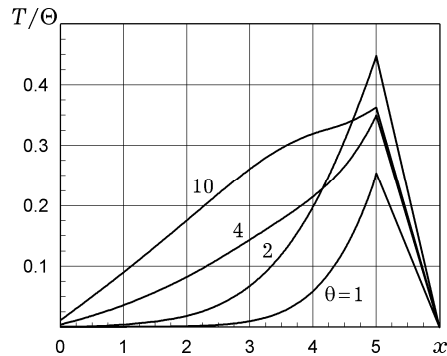


Рис. 4. Залежність відносної температури від координати при змінній швидкості для $k = 1$.

Для цієї двошарової системи смуг виконано обчислення аналогічних до наведених на рис. 3 кривих T/Θ у випадку синусоїдального руху смуг при $k = 0.5$ і $k = 0.25$ у формулі (13). Відповідні графіки залежності T/Θ від часу θ в перерізах x_2, x_3, x_4, x_5 наведено на рис. 5а та рис. 6а і в перерізах x_6, x_7, x_8 – на рис. 5б та рис. 6б.

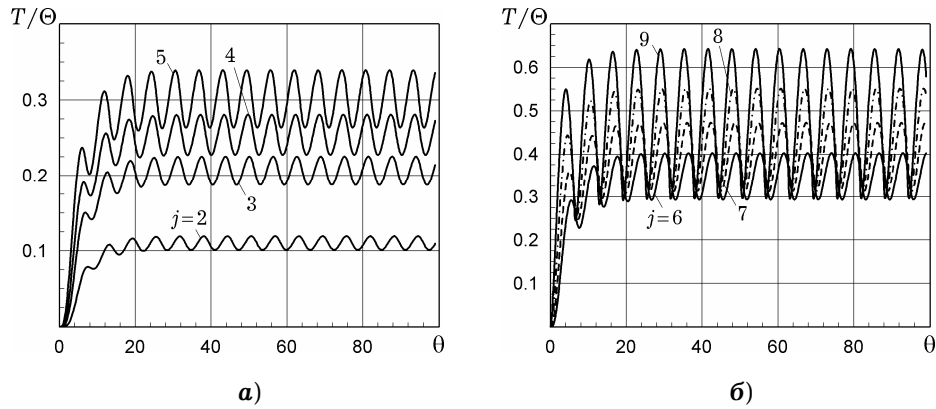


Рис. 5. Залежність відносної температури від часу при синусоїдальній швидкості руху для $k = 0.5$.

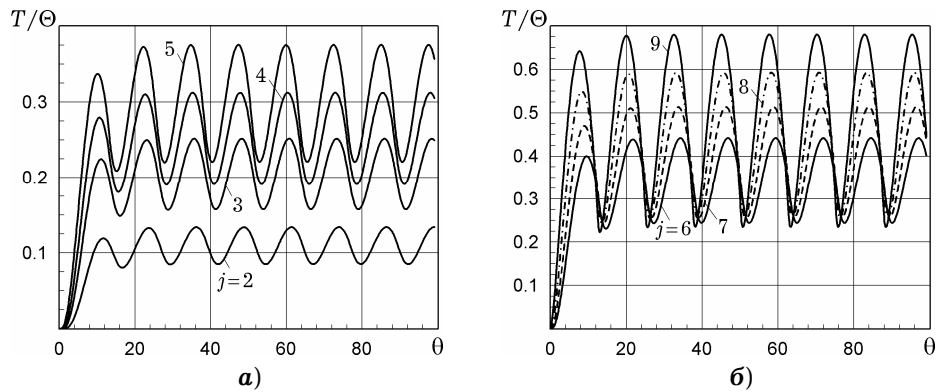


Рис. 6. Залежність відносної температури від часу при синусоїдальній швидкості руху для $k = 0.25$.

Досліджено також випадок тришарової системи. Перша смуга $0 < x < 4H$ є сталеву з характеристиками $\chi_1 = 51 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $b_1 = 14 \text{ м}^2/\text{с}$. Друга і третя смуги ширини H є відповідно чавунною і металокерамічною. Результати обчислень часової залежності температури T/Θ у перерізах x_6, x_7, x_8, x_9 за сталої швидкості руху ($g(\theta) = 1$) наведено на рис. 7.

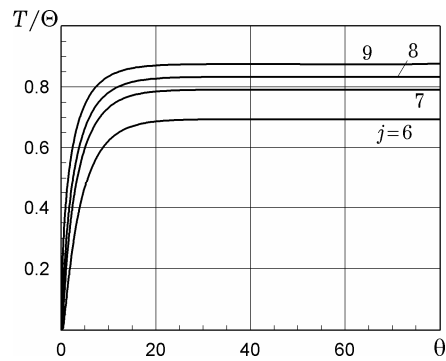


Рис. 7. Температура в перерізах тришарової системи смуг, перша з яких сталеву, при сталій швидкості руху

Подібні обчислення виконано для випадку, коли перша смуга є алюмінієвою з характеристиками $\chi_1 = 236 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $b_1 = 84.2 \text{ м}^2/\text{с}$. Графіки залежності відносної температури від часу наведено на рис. 8.

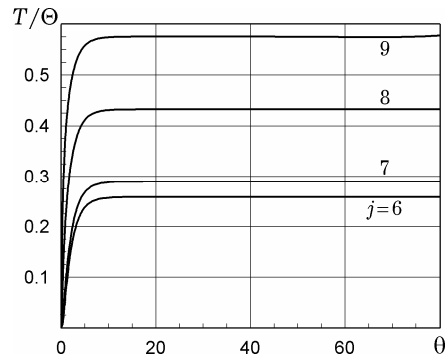


Рис. 7. Температура в перерізах тришарової системи смуг, перша з яких алюмінієва, при сталій швидкості руху

Проведені числові дослідження показали істотну залежність температури від характеристик матеріалу.

Висновки. Розроблено підхід до розрахунку нестационарних температурних полів для кусково-однорідних смуг з довільною кількістю складових за конвективного та фрикційного нагрівів. Підхід ґрунтується на інтегральному перетворенні Лапласа та його числовому оберненні за допомогою модифікованої формули Пруднікова [21]. Високу ефективність цієї формули відмічено в працях [11, 15, 16] та обґрунтовано проведеними числовими дослідженнями. На тестових прикладах показано достатньо високу точність та ефективність запропонованого підходу з використанням розробленого алгоритму досліджено нестационарні температурні поля, які виникають при терті кусково-однорідних смуг. Встановлено істотну залежність температури від теплофізичних характеристик матеріалів і швидкості однопірного або зворотно-поступального руху смуг. Запропонований підхід є ефективним і дає змогу досліджувати складні задачі термомеханіки структурованих тіл.

1. Бутринський І. З. Модель фрикційного ковзання штампа границею термопружної півплощини // Вісн. Нац. ун-ту «Львів. політехніка». Теорія і практика будівництва. – 2006. – № 562. – С. 5–7.
– <http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/36098>.
2. Горечко Н. О., Кушнір Р. М. Розрахунок неусталеного термопружного стану трибосистеми під час гальмування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 5. – С. 81–86.
Te same: Horechko N. O., Kushnir R. M. Analysis of the nonstationary thermoelastic state of a tribosystem in the process of braking // Mater. Sci. – 2006. – 42, No. 5. – P. 665–672. – <https://doi.org/10.1007/s11003-006-0131-4>.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – Москва: Высш. шк., 1965. – 466 с.
4. Євтушенко О. О., Куцей М. Теплопередача під час ковзання плоскопаралельного шару по основі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 2. – С. 147–155.
Te same: Yevtushenko O. O., Kuciej M. Heat transfer in sliding of a plane-parallel layer over a base // J. Math. Sci. – 2011. – 178, No. 5. – P. 545–556.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0568-3>.
5. Євтушенко О., Куцей М., Євтушенко Ол. Моделювання фрикційного нагрівання під час гальмування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – 48, № 5. – С. 27–33.
Te same: Evtushenko O., Kuciej M., Evtushenko O. Modeling of frictional heating in the process of braking // Mater. Sci. – 2013. – 48, No. 5. – P. 582–590.
6. Євтушенко О., Куцей М., Ох Е. Моделювання температурного режиму гальмівної системи з урахуванням термочутливості матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – 50, № 3. – С. 77–83.

- Te same: *Evtushenko O., Kuciej M., Och E.* Modeling of temperature conditions for a braking system with regard for the heat sensitivity of materials // *Mater. Sci.* – 2014. – **50**, No. 3. – P. 397–405.
– <https://doi.org/10.1007/s11003-014-9732-5>.
7. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – Москва: Наука, 1964. – 487 с.
 8. *Краснюк П., Мандзик Ю., Чаповська Р.* Плоска контактна задача взаємодії жорсткого клину та пружного шару за фрикційного теплоутворення // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 2006. – Вип. 65. – С. 144–151.
 9. *Куцей М.* Нестационарне фрикційне теплоутворення за ковзання композиційного шару по поверхні півпростору // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2011. – **47**, № 1. – С. 50–56.
 10. *Кушнір Р. М., Максимович В. М., Соляр Т. Я.* Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2002. – **38**, № 2. – С. 18–26.
Te same: *Kushnir R. M., Maksymovych V. M., Solyar T. Ya.* Determination of nonstationary temperatures with the help of improved formulas of the inverse Laplace transformation // *Mater. Sci.* – 2002. – **38**, No. 2. – P. 172–184.
<https://doi.org/10.1023/A:1020929818010>.
 11. *Кушнір Р. М., Соляр Т. Я.* Квазістатичні температурні напруження у багато-зв'язних пластинах під час їх нагріву // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2006. – **42**, № 6. – С. 27–33.
Te same: *Kushnir R. M., Solyar T. Ya.* Quasistationary temperature stresses in multiply connected plates in the process of heating // *Mater. Sci.* – 2006. – **42**, No. 6. – P. 187–192. – <https://doi.org/10.1007/s11003-006-0141-2>.
 12. *Носко А. Л., Носко А. П.* Решение контактной тепловой задачи с учетом теплопередачи между элементами трибосопряжения // *Трение и износ.* – 2006. – **27**, № 3. – С. 279–284.
 13. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
 14. *Процюк Б., Синюта В.* Квазістатичний термопружний стан двох багатопарових циліндрів при фрикційному нагріванні // *Машинознавство.* – 2003. – № 1. – С. 21–26.
 15. *Соляр Т. Я.* Визначення нестационарних температурних полів і напружень у кусково-однорідних кільцевих пластинках на основі чисельно-аналітичної формули обернення перетворення Лапласа // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2009. – **52**, № 3. – С. 201–208.
Te same: *Solyar T. Ya.* Determination of nonstationary temperature fields and stresses in piecewise homogeneous circular plates on the basis of a numerical-analytic Laplace inversion formula // *J. Math. Sci.* – 2010. – **171**, No. 5. – P. 673–681. – <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0166-9>.
 16. *Соляр Т. Я.* Про ефективний підхід до визначення динамічних напружень у шаруватих кільцевих пластинках на основі формули Пруднікова для обернення перетворення Лапласа // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 1. – С. 86–96.
Te same: *Solyar T. Ya.* Efficient approach to the evaluation of dynamic stresses in layered circular plates based on the Prudnikov formula for the inverse Laplace transformation // *J. Math. Sci.* – 2016. – **212**, No. 2. – P. 107–120.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2652-6>.
 17. *Abdullah O. I., Schlattmann J., Majeed M. H., Sabri L. A.* The distribution of frictional heat generated between the contacting surfaces of the friction clutch system // *Int. J. Interact. Des. Manuf.* – 2019. – **13**, No. 2. – P. 487–498.
– <https://doi.org/10.1007/s12008-018-0480-x>.
 18. *Fortunato G., Ciaravola V., Furno A., Lorenz B., Persson B. N. J.* General theory of frictional heating with application to rubber friction // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 2015. – **27**, No. 17. – Article 175008.
– <https://doi.org/10.1088/0953-8984/27/17/175008>.
 19. *Gurunathan C., Gnanamoorthy R., Jayavel S.* Frictional heat generation in selective ceramic reinforced polymer composites – Effect of particle size // In: 5th International & 26th All India Manufacturing Technology, Design and Research Conference (AIMTDR 2014), 12–14 December, 2014, IIT Guwahati, Assam, India. – P. 256-1–256-5.

20. *Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S. J.* On heat conduction problem in a semi-infinite periodically laminated layer // *Int. Commun. Heat Mass.* – 2005. – **32**, № 1-2. – P. 123–132. – <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2004.08.023>.
21. *Kushnir R., Solyar T.* A numerical-analytical approach to the analysis of non-stationary temperature fields in multiply-connected solids // *Mechanics, Materials Science & Engineering Journal.* – 2016. – **3**. – P. 90–106. – doi 10.13140/RG.2.1.1167.0165.
22. *Yevtushenko A. A., Rożniakowska M., Kuciej M.* Transient temperature processes in composite strip and homogeneous foundation // *Int. Commun. Heat Mass.* – 2007. – **34**, No. 9-10. – P. 1108–1118. – <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2007.05.004>.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПОЛОСАХ ПРИ УЧЕТЕ ФРИКЦИОННОГО ТЕПЛОЫДЕЛЕНИЯ

Приведен подход для определения нестационарных температурных полей в кусочно-однородных полосах при конвективном теплообмене со средой и теплообразования от действия сил трения. Алгоритм решения задачи основывается на использовании интегрального преобразования Лапласа и его обращения с помощью адаптированной к задачам теплопроводности формулы обращения Прудникова. С использованием разработанного алгоритма исследованы нестационарные температурные поля, возникающие при трении кусочно-однородных полос.

Ключевые слова: кусочно-однородные полосы, конвективный теплообмен, фрикционное теплообразование, нестационарные температурные поля, интегральное преобразование Лапласа.

NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELDS IN PIECE-WISE HOMOGENEOUS BANDS TAKING INTO ACCOUNT THE FRICTIONAL HEAT GENERATION

The approach to the determination of non-stationary temperature fields in piecewise homogeneous bands under convective heat exchange with the environment and thermogenesis caused by the action of friction forces is presented. The algorithm for solving the problem is based on the use of the Laplace integral transformation and its inversion using the adapted to heat conduction problems the Prudnikov formula. Using the developed algorithm, the non-stationary temperature fields that arise during the friction of piecewise homogeneous bands are investigated.

Key words: piecewise homogeneous bands, convective heat exchange, frictional heat generation, non-stationary temperature fields, Laplace integral transform.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.10.19