

СТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ, ЯКЕ ЗАБЕЗПЕЧУЄ ВІДСУТНІСТЬ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ У НЕОДНОРІДНОМУ ПРЯМОКУТНОМУ БРУСІ

Розглянуто обернену задачу термопружності у неоднорідному довгому прямокутному брусі в умовах сталої осьової деформації і дії стаціонарного температурного поля та конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. Пружні і теплофізичні характеристики матеріалу бруса у поперечному перерізі є довільними функціями координат. Знайдено вирази для розподілів температури на бічній поверхні бруса, коефіцієнтів теплообміну та густини внутрішніх теплових джерел, які забезпечують відсутність термонапружень у брусі. Також визначено аналітичні залежності коефіцієнтів теплопровідності та лінійного теплового розширення від координат, які забезпечують відсутність напружень у брусі без внутрішніх джерел тепла.

Ключові слова: термопружність, обернена задача, неоднорідні матеріали, композити, відсутність термонапружень, температурне поле.

Вступ. Силкові та температурні навантаження конструкції призводять як правило, до зменшення ресурсу служби матеріалів, з яких виготовлені їхні структурні елементи. Це можуть бути цілком немеханічні фактори, наприклад, деградація матеріалів внаслідок пришвидшення хімічних реакцій від дії силових і температурних навантажень [9]. Останнім часом у теплонавантажених конструкціях дедалі ширше використовуються композитні, зокрема, функціонально-градієнтні матеріали [10]. Сучасні технології їх виготовлення дають можливість забезпечувати наперед задані розподіли термомеханічних характеристик у виробах із таких матеріалів [12, 15]. Тому актуальною є задача визначення умов теплового навантаження конструкцій, які забезпечують мінімальні термонапруження або їх відсутність.

Задачі визначення температурних полів, які не викликають напружень чи переміщень в однорідних тілах, розглянуто в працях [5, 6]. Проблеми оптимізації характеристик матеріалів для мінімізації напружень у багатошарових пластинах із використанням генетичного алгоритму вивчено в [7, 8, 11, 17]. У праці [13] з використанням нейронних мереж запропоновано підхід до оптимізації характеристик матеріалу довгого порожнистого циліндра для релаксації максимальних значень теплових напружень. Цю проблему розв'язано як задачу мінімізації максимальних напружень шляхом оптимізації керуючої змінної (показника степеня у степеневій залежності характеристик матеріалу) упродовж часового інтервалу від початкового теплового стану нагрівання до досягнення усталеного режиму. Дослідження числовими методами задач зниження рівня термонапружень за рахунок вибору залежності характеристик композиту від двох координат наведено в роботі [11]. Задачі визначення оптимального за швидкодією нагрівання тіл з обмеженнями на температуру чи напруження, а також ідентифікації термонапруженого стану тіл з неповною інформацією про умови нагрівання розглянуто в [4, 18]. Можливість існування теплових полів у довгому неоднорідному за радіальною координатою циліндрі чи вибір потрібного розподілу фізико-механічних характеристик матеріалу, що забезпечують відсутність напружень, показано в роботах [2, 3].

У цій статті встановлено необхідні умови відсутності напружень у довгому прямокутному брусі з характеристиками матеріалу, залежними від двох координат, при дії зовнішнього поля, а також способи створення цих умов. Виконані числові дослідження вказують на можливість досягнення станів відсутності термонапружень у реальних матеріалах.

[✉] b-kalynyak@litech.net

1. Формулювання задачі. Розглянемо довгий неоднорідний прямокутний брус, віднесений до декартової системи координат $Oxyz$, початок якої розмістимо на перетині діагоналей прямокутника $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, а вісь Oz спрямуємо вздовж осі бруса. Всі характеристики матеріалу вважатимемо функціями від координат x , y . Для такого бруса розглянемо незв'язану стаціонарну задачу термопружності, яка описується [1]

– рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = F_x(x, y), \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = F_y(x, y), \quad (1)$$

– рівняннями сумісності деформацій

$$2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} \quad (2)$$

– зв'язками між деформаціями і напруженнями

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) + \Phi, & e_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})) + \Phi, \\ e_{zz} &= \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) + \Phi, & e_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}, \end{aligned} \quad (3)$$

де σ_{ij} , e_{ij} $i, j = x, y, z$, – компоненти тензорів напружень та деформації, $e_{zz} = \text{const}$, $E = E(x, y)$ – модуль пружності, $\nu = \nu(x, y)$ – коефіцієнт Пуассона, $F_x = F_x(x, y)$, $F_y = F_y(x, y)$ – компоненти вектора масових сил, а адитивний член Φ у виразах для компонент тензора деформації описує вплив температурного поля $T(x, y)$. У випадку, коли коефіцієнт лінійного теплового розширення бруса α залежить від координат і температури (термочутливий матеріал), $\alpha = \alpha(x, y, T(x, y))$, цей адитивний член має вигляд

$$\Phi \equiv \Phi(x, y, T(x, y)) = \int_{T_0}^{T(x, y)} \alpha(x, y, \bar{T}) d\bar{T}.$$

Якщо знехтувати температурною залежністю коефіцієнта лінійного температурного розширення, коли $\alpha = \alpha(x, y)$, тоді маємо $\Phi = \alpha(x, y)(T(x, y) - T_0)$, де T_0 – початкова температура ненапруженого бруса.

– На сторонах розглянутого прямокутного перерізу задаємо умови

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\pm a, y) &= -p_x^\pm(y), & \sigma_{yy}(x, \pm b) &= -p_y^\pm(x), \\ \sigma_{xy}(\pm a, y) &= -q_x^\pm(y), & \sigma_{xy}(x, \pm b) &= -q_y^\pm(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $p_x^\pm(y)$, $p_y^\pm(x)$, $q_x^\pm(y)$, $q_y^\pm(x)$ – сили навантаження на відповідних сторонах прямокутної області.

Стаціонарне температурне поле $T(x, y)$ визначимо як розв'язок задачі теплопровідності, яка відповідає закону теплопровідності Фур'є і описується рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(x, y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) = Q(x, y) \quad (5)$$

та умовами конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем через сторони прямокутного перерізу:

$$\left(\lambda(x, y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \beta_{-a}(T(x, y) - T_{-a}(y)) \right) \Big|_{x=-a} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial x} T(x, y) + \beta_a (T(x, y) - T_a(y)) \right) \Big|_{x=a} = 0, \\
& \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial y} T(x, y) + \beta_{-b} (T(x, y) - T_{-b}(x)) \right) \Big|_{y=-b} = 0, \\
& \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial y} T(x, y) + \beta_b (T(x, y) - T_b(x)) \right) \Big|_{y=b} = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тут $\lambda(x, y)$ – коефіцієнт теплопровідності, β_k , T_k , $k = \pm a, \pm b$, – коефіцієнти теплообміну та значення температури навколишнього середовища.

Потрібно визначити умови, при яких напруження, які є розв'язками задачі (1)–(4), можуть бути відсутні, а також показати, що ці умови можна забезпечити відповідним вибором температурного поля, яке є розв'язком задачі теплопровідності (5), (6).

2. Розв'язання задачі. З використанням фізичних співвідношень (3), де $e_{zz} = \text{const}$, рівнянь рівноваги (1) та умов (4) рівняння сумісності деформацій (2) запишемо у термінах сумарних напружень $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ і σ_{xx} :

$$\begin{aligned}
& \Delta \left((1 + \nu) \Phi - \frac{\nu^2 \sigma}{E} - \nu e_{zz} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{(1 + \nu) \sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu \sigma}{E} \right) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\sigma}{E} - \frac{(1 + \nu) \sigma_{xx}}{E} \right) = 2 \frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \\
& + 2 \left(F_y - \frac{\partial(\sigma - \sigma_{xx})}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) - 2 \frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \\
& + 2 \left(F_x - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) + 2 \left(\int_{-a}^x F_y dx - \right. \\
& \left. - \int_{-a}^x \frac{\partial(\sigma - \sigma_{xx})}{\partial y} dx - p_2^-(y) \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Якщо у рівнянні (7) всі зовнішні силові навантаження $p_x^\pm(y)$, $p_y^\pm(x)$, $q_x^\pm(y)$, $q_y^\pm(x)$ з (4) і напруження σ , σ_{xx} прийняти рівними нулеві, то отримаємо необхідну умову відсутності напружень у вигляді

$$\begin{aligned}
\Delta \Phi(x, y) = & -2 \frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial F_x}{\partial x} + 2 F_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) + 2 F_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) + \\
& + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) \int_{-a}^x F_y dx.
\end{aligned} \tag{8}$$

Оскільки в рамках розглядуваної незв'язаної задачі термопружності масові сили F_x , F_y і температурне поле $T(x, y)$ є незалежними чинниками, то умова відсутності напружень (8) зводиться до двох умов:

$$\frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial F_x}{\partial x} - F_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) - F_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) \int_{-a}^x F_y dx$$

і

$$\Delta \Phi(x, y) = 0. \tag{9}$$

Для випадку неоднорідного нетермочутливого матеріалу адитивний член $\Phi(x, y) = \alpha(x, y)t(x, y)$ у фізичних співвідношеннях (3) повинен бути розв'язком рівняння Лапласа (9), найпростішим з яких є

$$\Phi(x, y) = C. \quad (10)$$

Тут C – довільна стала, $t(x, y) = T(x, y) - T_0$. Як випливає з третьої із формул (3), вираз (10) є необхідною умовою сталої осьової деформації $e_{zz} = \text{const}$ при відсутності напружень у поперечному перерізі бруса.

Як наслідок, температурне поле, яке зумовлює у брусі нульові напруження і одночасно забезпечує сталість поздовжніх деформацій уздовж осі Oz , має вигляд

$$t(x, y) = \frac{C}{\alpha(x, y)}. \quad (11)$$

Температурне поле $t(x, y)$ (11) повинно бути розв'язком задачі теплопровідності (5), (6).

Якщо підставити (11) у рівняння теплопровідності (5), для густини теплових джерел отримаємо вираз

$$Q(x, y) = C \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, y)} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha(x, y)} \right) \right) \right).$$

Умови (6) конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем через сторони прямокутного перерізу потрібно доповнити фізичними умовами погодження зі значеннями температури навколишнього середовища у вершинах прямокутника:

$$\begin{aligned} t_b(-a) &= t_{-a}(b), & t_b(a) &= t_a(b), \\ t_{-b}(-a) &= t_{-a}(-b), & t_{-b}(a) &= t_a(-b). \end{aligned} \quad (12)$$

Тут $t_{\pm a}(y)$, $t_{\pm b}(x)$ – відповідно температури на сторонах $x = \pm a$, $y = \pm b$.

Підставивши (11) в (6), отримаємо співвідношення між значеннями температури зовнішнього середовища на сторонах прямокутного перерізу, характеристиками матеріалу та коефіцієнтами теплообміну матеріалу:

$$\begin{aligned} t_{-a}(y) &= C \left(\frac{\lambda(-a, y)}{\beta_{-a}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, y)} \right) \Big|_{x=-a} + \frac{1}{\alpha(-a, y)} \right), \\ t_a(y) &= C \left(\frac{\lambda(a, y)}{\beta_a} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, y)} \right) \Big|_{x=a} + \frac{1}{\alpha(a, y)} \right), \\ t_{-b}(x) &= C \left(\frac{\lambda(x, -b)}{\beta_{-b}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha(x, y)} \right) \Big|_{y=-b} + \frac{1}{\alpha(x, -b)} \right), \\ t_b(x) &= C \left(\frac{\lambda(x, b)}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha(x, y)} \right) \Big|_{y=b} + \frac{1}{\alpha(x, b)} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

У формулах (13) маємо п'ять сталих: C , $\beta_{\pm a}$, $\beta_{\pm b}$. Тому з використанням чотирьох умов погодження (12) температури навколишнього середовища у вершинах прямокутника стали C можна визначити з будь-якої рівності (13), якщо задати температуру навколишнього середовища в одній з вершин прямокутника, наприклад, у точці $(-a, -b)$, і один з коефіцієнтів теплообміну, наприклад, β_{-a} . Тоді з першої із формул (13) отримаємо

$$C = \frac{t_{-a}(-b)}{\frac{\lambda(-a, -b)}{\beta_{-a}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, -b)} \right) \Big|_{x=-a} + \frac{1}{\alpha(-a, -b)}}. \quad (14)$$

Відповідні вирази для коефіцієнтів теплообміну матимуть такий вигляд:

$$\beta_{-b} = \frac{\beta_{-a} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha(-a, y)} \right) \Big|_{y=-b}}{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, -b)} \right) \Big|_{x=-a}}, \quad \beta_b = \frac{\beta_{-a} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha(-a, y)} \right) \Big|_{y=b}}{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, b)} \right) \Big|_{x=-a}},$$

$$\beta_a = \beta_{-a} \frac{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha(-a, y)} \right) \Big|_{y=-b} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, -b)} \right) \Big|_{x=a}}{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, -b)} \right) \Big|_{x=-a} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha(a, y)} \right) \Big|_{y=-b}}. \quad (15)$$

Отже, отримано вираз (11) для температурного поля $t(x, y)$, який визначає необхідну умову відсутності термонапружень у довгому неоднорідному прямокутному брусі і забезпечує його сталу осьову деформацію. З урахуванням (14) вираз (11) є розв'язком стаціонарної задачі теплопровідності (5), (6), якщо задано, наприклад, значення температури навколишнього середовища в точці $(-a, -b)$ та значення коефіцієнта теплообміну β_{-a} .

3. Результати обчислень та обговорення. Розглянемо прямокутний брус, виготовлений з двокомпонентного матеріалу, характеристики якого описуються моделлю простої суміші [14]:

$$P(x, y) = P_1(1 - V(x, y)) + P_2V(x, y) = (P_2 - P_1)V(x, y) + P_1,$$

де P_1, P_2 – коефіцієнти лінійного теплового розширення і теплопровідності першого та другого матеріалів, $V(x, y) \in [0, 1]$ – концентрація одного матеріалу в іншому. Нехай першим матеріалом є алюміній ($\alpha_1 = 23 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\lambda_1 = 204 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$), а другим – оксид цирконію ($\alpha_2 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\lambda_2 = 2.09 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$) [16]. Концентрацію матеріалу виберемо у вигляді:

$$V(x, y) = \left(\frac{0.5x + a}{2a} \right) \left(\frac{0.6y + b}{2b} \right)^3.$$

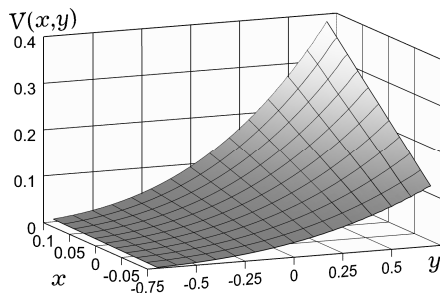


Рис. 1

При $a = 0.1$, $b = 0.7$, $t_{-a} = 300 \text{ K}$, $\beta_{-a} = 300$ на основі (14), (15) обчислено значення: $C = 0.0085$, $\beta_a = 52.9412$, $\beta_{-b} = 82.6531$, $\beta_b = 20.6633$.

Графіки залежностей від координат концентрації одного матеріалу в іншому $V(x, y)$, розподілів температури $T(x, y)$ і потужності теплових джерел $Q(x, y)$ подано на рис. 1–3.

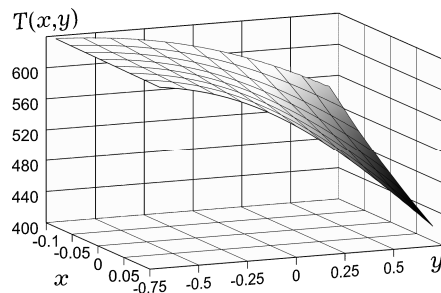


Рис. 2

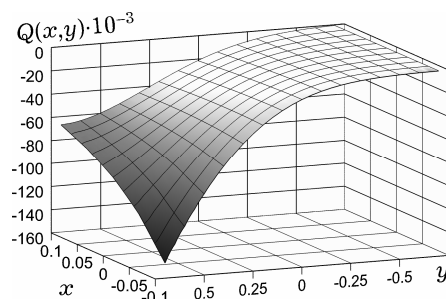


Рис. 3

Оскільки розподіл потужності внутрішніх теплових джерел в об'ємі тіла технологічно важко здійснити, варто розглянути можливість досягнення відповідного температурного поля без наявності теплових джерел. Підставляючи вираз для температури (11) у рівняння теплопровідності (5), отримуємо однорідне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha(x, y)} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\alpha(x, y)} \right) \right) = 0, \quad (16)$$

яке пов'язує коефіцієнти теплопровідності та лінійного теплового розширення. Якщо в рівнянні (16) покласти $\alpha(x, y) = \alpha_1(x)\alpha_2(y)$ або $\frac{1}{\alpha(x, y)} = \frac{1}{\alpha_1(x)} + \frac{1}{\alpha_2(y)}$, то за допомогою відокремлення змінних отримаємо аналітичні вирази, які виражають зв'язки між коефіцієнтами теплопровідності та коефіцієнтом теплового лінійного розширення:

$$\lambda(x, y) = \frac{D \exp \left(c \int_{-a}^x \frac{dx}{\alpha_1(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha_1(x)} \right)} \right)}{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha_1(x)} \right) \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\alpha_2(y)} \right) \exp \left(c \int_{-b}^y \frac{dy}{\alpha_2(y) \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\alpha_2(y)} \right)} \right)}$$

або

$$\lambda(x, y) = D \exp \left(- \int_{-a}^x \frac{\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{\alpha_1(x)} \right) - c}{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha_1(x)} \right)} dx - \int_{-b}^y \frac{\frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{1}{\alpha_2(y)} \right) + c}{\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\alpha_2(y)} \right)} dy \right),$$

де c, D – довільні сталі. Це вказує на можливість забезпечення відсутності напружень у брусі за рахунок вибору залежності коефіцієнтів теплопровідності та лінійного теплового розширення матеріалу від координат.

Висновки. Отримано необхідну умову, яку повинно задовольняти зовнішнє поле, щоб не спричинювати напружень у довгому прямокутному брусі та забезпечити сталу поздовжню деформацію, коли характеристики матеріалу залежать від двох координат у поперечному перерізі, а деформації, викликані зовнішнім полем, описуються доданком у зв'язках між компонентами тензорів деформації і напружень.

Ці результати застосовано для визначення температурного поля, яке не викликає напружень у брусі при конвективному теплообміні з навколишнім середовищем. Вираз для температурного поля, отриманий з умови відсутності напружень, містить одну довільну сталу і повинен бути розв'язком рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами та задовольняти умови на межі. Тому ці умови та теплові джерела повинні бути узгоджені.

Показано, що при додаткових зв'язках між коефіцієнтами теплопровідності та лінійного теплового розширення можна досягнути відсутності напружень у прямокутному неоднорідному брусі без наявності теплових джерел. Вираз, який пов'язує ці коефіцієнти, можна записати точно у випадку, коли коефіцієнт лінійного теплового розширення подано добутком функцій окремих змінних або обернену до цього коефіцієнта величину – сумою обернених величин від функцій кожної зі змінних.

Обчислені коефіцієнти теплопровідності, температури навколишнього середовища як функції координат, розподіли температури та об'ємних теплових джерел вказують на можливість забезпечення нульових напружень у реальних матеріалах з перепадом температур у декілька сотень градусів.

1. Амензаде Ю. А. Теория упругости. – Москва: Высш. шк., 1976. – 272 с.
2. Калиняк Б. М. Забезпечення нульових радіальних напружень у довгому порожнистому циліндрі неоднорідністю матеріалу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 2. – С. 104–110.
Te same: Kalynyak B. M. Guaranteeing the absence of radial stresses in a long hollow cylinder by the inhomogeneity of material // Mater. Sci. – 2016. – **52**, No. 2. – P. 261–268. – <https://doi.org/10.1007/s11003-016-9953-x>.
3. Калиняк Б. М. Забезпечення нульових радіальних напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі стаціонарним температурним полем // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 1. – С. 91–97.
Te same: Kalynyak B. M. Attainment of zero radial stresses in inhomogeneous long hollow cylinders by stationary temperature fields // Mater. Sci. – 2016. – **52**, No. 1. – P. 99–107. – <https://doi.org/10.1007/s11003-016-9931-3>.
4. Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В. Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: Сполом, 2011. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 5.
5. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – Москва: Физматгиз, 1958. – 167 с.
Te same: Melan H., Parkus H. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. – Wien: Springer-Verlag, 1953. – 114 S.
6. Підстригач Я. С. Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
7. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Appl. Mech. Rev. – 2007. – **60**, No. 5. – P. 195–216. – <https://doi.org/10.1115/1.2777164>.
8. Ding S., Wu C.-P. Optimization of material composition to minimize the thermal stresses induced in FGM plates with temperature-dependent material properties // Int. J. Mech. Mater. Des. – 2018. – **14**, No. 4. – P. 527–549. – <https://doi.org/10.1007/s10999-017-9388-z>.
9. Handbook of environmental degradation of materials / Myer Kutz (ed.). – Norwich: William Andrew, 2005. – 614 p.
10. Mahmood R. M., Akinlabi E. T. Functionally graded materials. – Cham: Springer, 2017. – 118 p. – Topics in mining, metallurgy and materials engineering / C. P. Bergmann (ed.).
11. Mahmoud Nemat-Alla. Reduction of thermal stresses by composition optimization of two-dimensional functionally graded materials // Acta Mech. – 2009. – **208**, No. 3–4. – P. 147–161. – <https://doi.org/10.1007/s00707-008-0136-1>.
12. Naebe M., Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Appl. Materials Today. – 2016. – **5**. – P. 223–245. – <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2016.10.001>.
13. Ootao Y., Kawamura R., Tanigawa Y., Imamura R. Optimization of material composition of nonhomogeneous hollow circular cylinder for thermal stress relaxation making use of neural network // J. Therm. Stresses. – **1999**. – **22**, No. 1. – P. 1–22. – <https://doi.org/10.1080/014957399281020>.
14. Reddy J. N., Chin C. D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. // J. Therm. Stresses. – 1998. – **21**, No. 6. – P. 593–626. – <https://doi.org/10.1080/01495739808956165>.
15. Saiyathibrahim A., Mohamed Nazirudeen S. S., Dhanapal P. Processing techniques of functionally graded materials – A Review // In: Proc. Int. Conf. on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology – ICSSCET-2015, 10–11 August 2015, Coimbatore, India / Ramachandran T., Kokula Krishna Hari K., Thiruvengadam B., Daniel James (Eds.). – Vol. 1. – P. 98–105.
16. Uysal M. U. Investigation of thermal and mechanical loading on functional graded material plates // Int. J. Aerospace Mech. Eng. – 2013. – **7**, No. 11. – P. 2283–2289. – <https://doi.org/10.5281/zenodo.1089161>.
17. Wetherhold R. C., Seelman S., Wang J. The use of functionally graded materials to eliminate or control thermal deformation // Compos. Sci. Technol. – 1996. – **56**, No. 9. – P. 1099–1104. – [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(96\)00075-9](https://doi.org/10.1016/0266-3538(96)00075-9).
18. Yasinsky A. Determination and optimization of stress state of bodies on the basis of inverse thermoelasticity problems // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 916–924. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_607.

СТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕЕ ОТСУТСТВИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ В НЕОДНОРОДНОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ БРУСЕ

Рассмотрена обратная задача термоупругости в неоднородном длинном прямоугольном брусе в условиях постоянной осевой деформации под действием стационарного температурного поля и конвективного теплообмена с внешней средой. Упругие и теплофизические характеристики материала бруса в поперечном сечении являются произвольными функциями координат. Найдены выражения для распределений температуры на боковых поверхностях, коэффициентов теплообмена и плотности внутренних тепловых источников, обеспечивающих отсутствие термонапряжений в брусе. Также определены аналитические зависимости коэффициентов теплопроводности и линейного теплового расширения от координат, которые обеспечивают отсутствие напряжений в брусе без внутренних источников тепла.

Ключевые слова: термоупругость, обратная задача, неоднородные материалы, композиты, отсутствие термонапряжений, температурное поле.

STATIONARY TEMPERATURE FIELD ENSURING THE ABSENCE OF THERMAL STRESSES IN AN INHOMOGENEOUS RECTANGULAR BEAM

The inverse problem of thermoelasticity in a inhomogeneous long rectangular beam under the conditions of constant axial strain which is subjected to the stationary temperature field and conditions of convective heat exchange with the external environment is considered. The elastic and thermophysical characteristics of the material of beam in the cross-section are arbitrary functions of coordinates. Expressions for temperature distributions on the lateral surfaces of the beam, heat transfer coefficients and density of internal heat sources, which ensure the absence of thermal stresses in the beam are found. Also, the analytical dependences of thermal conductivity and linear thermal expansion coefficients on coordinates, ensuring the absence of stresses in the beam without internal heat sources are determined.

Key words: thermoelasticity, inverse problem, inhomogeneous materials, composites, absence of thermal stresses, temperature field.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
20.09.19