УДК 517+517.524

Д. І. Боднар[1], І. Б. Біланик[2] ✉

ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ПОТОЧКОВОЇ ТА РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

Досліджено гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду і багатовимірні C - і S -дроби з нерівнозначними змінними. З використанням результатів, встановлених для неперервних дробів, і результатів, що стосуються збіжності та оцінок похибок апроксимації гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду в кутових областях, встановлено нові оцінки швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду, поточкової збіжності багатовимірних C -дробів і рівномірної збіжності на компактах кутових областей багатовимірних S -дробів з нерівнозначними змінними.

Ключові слова: *гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду, гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, поточкова збіжність, рівномірна збіжність, оцінка швидкості збіжності.*

Кутову область збіжності неперервних дробів з частинними чисельниками, рівними одиниці, і комплексними частинними знаменниками досліджували E. B. van Vleck (1901) і J. L. W. V. Jensen (1909) [17–20]. У сформульованих ними теоремах немає оцінок швидкості збіжності неперервних дробів, хоча J. Jensen використовував при доведенні оцінки різниці між підхідними дробами. Пізніше W. B. Gragg і D. D. Warner [16], використовуючи іншу методику, доповнили теорему van Vleck-а, встановивши оцінки похибок апроксимації підхідними дробами, і внесли ці оцінки у формулювання теореми. Наведемо один із результатів, для якого встановимо багатовимірний аналог.

Теорема 1 [**16**]. *Нехай елементи неперервного дробу*

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots$$

задовольняють умови $a_k>0$, $\Re(b_k)>0$, $k=1,2,\ldots$. *Тоді*

$$|f_m-f_{n-1}|\le 2\alpha_1\prod_{k=2}^{n}\frac{\sqrt{1+4\alpha_k}-1}{\sqrt{1+4\alpha_k}+1},\qquad m\ge n>1,$$

де f_k – k*-й підхідний дріб неперервного дробу,* $\alpha_k=\dfrac{a_k}{\Re(b_k)\Re(b_{k-1})}$, $b_0=1$.

Метою пропонованого дослідження є встановлення оцінок швидкості збіжності гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) з нерівнозначними змінними

$$b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i(k)}z_{i_k}}{b_{i(k)}},\tag{1}$$

де $b_0,b_{i(k)},c_{i(k)}\in\mathbb{C}$, $i(k)\in I$, $I=\{i(k)=i_1i_2\ldots i_k:1\le i_k\le i_{k-1}\le\ldots\le i_0,\ k\ge1\}$ – множина мультиіндексів, $i_0=N$, $z_m\in\mathbb{C}$, $m=1,\ldots,N$. Тут N – фіксоване натуральне число, яке визначає вимірність ГЛД (1). При фіксованих значеннях змінних ГЛД (1) можна звести до вигляду

$$b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}},\tag{2}$$

✉ i.bilanyk@ukr.net

де $b_0, b_{i(k)}, a_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in I$. Такі ГЛД вперше зустрічаються у роботі [6], їх називають гіллястими ланцюговими дробами спеціального вигляду.

Підхідним дробом n-го порядку ГЛД (2) називають вираз

$$f_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \qquad n \ge 1, \qquad f_0 = b_0 .$$

ГЛД (2) збігається, якщо існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Число f є значенням цього дробу. Вирази вигляду

$$Q_{i(n)}^{(n)} = b_{i(n)}, \quad n \ge 1,$$

$$Q_{i(p)}^{(n)} = b_{i(p)} + \mathop{\mathrm{D}}_{r=p+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}} \frac{a_{i(r)}}{b_{i(r)}}, \quad n \ge 2, \quad p = 1, \ldots, n-1,$$

де $i(n) \in I$, $i(p) \in I$, називають залишками n-го підхідного дробу ГЛД (2).

Для ГЛД загального вигляду, двовимірних неперервних дробів і ГЛД з нерівнозначними змінними встановлено багато різних ознак збіжності, зокрема, кутових множин збіжності. У своїх дослідженнях використовуємо результати, викладені у роботах [3, 4, 8, 9, 13−15]. При певних додаткових обмеженнях оцінки швидкості збіжності ГЛД отримано в [2, 7, 10−12]. Зокрема, Т. М. Антонова встановила оцінку швидкості збіжності ГЛД (2), яку будемо надалі використовувати.

Теорема 2 [**2**]. *Нехай елементи ГЛД* (2) *задовольняють умови:*

$$0 \le \arg b_{i(2p-1)} \le \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \arg b_{i(2p)} \le 0, \quad a_{i(k)} > 0, \quad i(k), i(2p) \in I, \tag{3}$$

$$\frac{a_{i(k)}}{\left|b_{i(k)} b_{i(k+1)}\right|} \le L, \quad i(k+1) \in I, \quad k \ge 1, \tag{4}$$

де L *− додатна стала. Тоді ГЛД* (2) *збігається і для швидкості збіжності справджується оцінка*

$$\left|f - f_n\right| \le \max_{1 \le i_1 \le N} \frac{\left|a_{i_1}\right|}{\left|b_{i_1}\right|} C_{N+n}^{N-1} \left(\frac{L^2}{L^2+1}\right)^{n/2}.$$

Д о в е д е н н я теореми 2 ґрунтується на використанні нерівності

$$\frac{a_{i(k+1)}}{\left|Q_{i(k)}^{(s)} Q_{i(k+1)}^{(s)}\right|} \le \sqrt{\frac{L^2}{L^2+1}}, \quad s = 2, 3, \ldots, \quad k = 1, \ldots, s-1, \quad i(k+1) \in I. \tag{5}$$

Встановимо оцінку швидкості збіжності ГЛД (2), відмінну від оцінки, отриманої в теоремі 2, при виконанні подібних умов.

Теорема 3. *Нехай елементи ГЛД* (2) *задовольняють умови*

$$\Im(b_{i(2p-1)}) \ge 0, \qquad \Im(b_{i(2p)}) \le 0, \qquad i(2p) \in I, \tag{6}$$

$$\Re(b_{i(k)}) \ge \delta, \qquad i(k) \in I, \tag{7}$$

$$0 < a_{i(k)} \le M, \qquad i(k) \in I, \tag{8}$$

де δ, M *− деякі додатні сталі. Тоді ГЛД* (2) *збігається і для швидкості збіжності справджується оцінка*

$$\left|f_m - f_{Nn}\right| < D_N \left(\frac{\sqrt{\delta^2 + 4M} - \delta}{\sqrt{\delta^2 + 4M} + \delta}\right)^n, \quad m \ge Nn, \quad n \ge 1, \tag{9}$$

де D_N *− додатна стала, що не залежить від* m *і* n, *яка визначається згідно з рекурентним співвідношенням*

$$D_1 = \frac{2M}{\delta}, \qquad D_r = 4\left(D_{r-1}S + \frac{M}{\delta}\right), \qquad r = 2,\ldots,N,$$

$$S = 1 + \frac{M\sqrt{M^2+\delta^4}}{\delta^2(\sqrt{M^2+\delta^4} - M)}. \tag{10}$$

Д о в е д е н н я. Зі співвідношень (6)–(8) випливає, що елементи ГЛД (2) задовольняють умови теореми 2. Отже, ГЛД (2) збігається.

Доведення оцінки (9) проведемо, використовуючи метод математичної індукції за вимірністю N ГЛД спеціального вигляду.

Нехай $N = 1$. Тоді ГЛД (2) вироджується у неперервний дріб

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_{1[2]}}{b_{1[2]}} + \ldots + \frac{a_{1[k]}}{b_{1[k]}} + \ldots,$$

для елементів якого виконуються умови (7) і (8). Тут $1[k] = \underbrace{11\ldots1}_{k}$ – мультиіндекс, $k \ge 1$. Цей неперервний дріб задовольняє умови теореми 1. Отже,

$$|f_m - f_n| \le 2\alpha_1 \prod_{k=2}^{n+1} \frac{\sqrt{1+4\alpha_k} - 1}{\sqrt{1+4\alpha_k} + 1}, \qquad m \ge n.$$

Оскільки $\alpha_k = \dfrac{a_k}{\Re(b_{1[k]})\Re(b_{1[k-1]})} \le \dfrac{M}{\delta^2}$, $k = 2,\ldots,n+1$, $\alpha_1 \le \dfrac{M}{\delta}$, і функція $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+4x} - 1}{\sqrt{1+4x} + 1}$ монотонно зростає при $x > 0$, то

$$\prod_{k=2}^{n+1} \frac{\sqrt{1+4\alpha_k} - 1}{\sqrt{1+4\alpha_k} + 1} \le \left(\frac{\sqrt{\delta^2+4M} - \delta}{\sqrt{\delta^2+4M} + \delta}\right)^n.$$

Таким чином, враховуючи позначення (10), маємо

$$|f_m - f_n| \le D_1\rho^n, \qquad m \ge n,$$

де

$$\rho = \frac{\sqrt{\delta^2+4M} - \delta}{\sqrt{\delta^2+4M} + \delta}. \tag{11}$$

Нехай $N = 2$. Встановимо оцінку (9) для двовимірного ГЛД

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{2} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \tag{12}$$

Використовуючи особливості структури ГЛД (12), запишемо його n-й підхідний дріб у вигляді

$$f_n = b_0^{(1,n)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{a_{2[k]}}{b_{2[k]}^{(1,n-k)}}, \qquad n \ge 1, \tag{13}$$

де

$$b_0^{(1,n)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{\ell=1}^{n} \frac{a_{1[\ell]}}{b_{1[\ell]}}, \qquad b_{2[n]}^{(1,0)} = b_{2[n]}, \qquad b_{2[k]}^{(1,n-k)} = b_{2p[k]} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{n-k} \frac{a_{2[k]1[\ell]}}{b_{2[k]1[\ell]}} \tag{14}$$

– підхідні дроби неперервних дробів, що входять у ГЛД (13), $k = 1,\ldots,n-1$, $s[p] = \underbrace{ss\ldots s}_{p}$ – мультиіндекси, $p \in \mathbb{N}$, $s = 1,2$.

Для підхідних дробів ГЛД (12) запишемо нерівність трикутника:

$$\left|f_m - f_{2n}\right| \le \left|f_m - \hat{f}_n\right| + \left|f_{2n} - \hat{f}_n\right|, \qquad m \ge 2n, \tag{15}$$

де $\hat{f}_n = b_0^{(1)} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{2[k]}}{b_{2[k]}^{(1)}}$ – n-й підхідний дріб неперервного дробу, утвореного внаслідок згортання всіх неперервних дробів, які входять у структуру ГЛД (12), тобто

$$b_0^{(1)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{l=1}^{\infty} \frac{a_{1[\ell]}}{b_{1[\ell]}}, \qquad b_{2[k]}^{(1)} = b_{2[k]} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{l=1}^{\infty} \frac{a_{2[k]1[\ell]}}{b_{2[k]1[\ell]}}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Для того щоб позначення (16) були коректними, неперервні дроби у правій частині повинні бути збіжними. Це гарантують умови теореми.

Оцінимо величини $\left|f_p - \hat{f}_n\right|$, $p \ge 2n$, у правій частині нерівності (15). Розглянемо скінченний неперервний дріб

$$h_{p,n} = b_0^{(1)} + \frac{a_{2[1]}}{b_{2[1]}^{(1)}} + \ldots + \frac{a_{2[n]}}{b_{2[n]}^{(1)}} + \frac{a_{2[n+1]}}{b_{2[n+1]}^{(1,p-n-1)}} + \ldots + \frac{a_{2[p]}}{b_{2[p]}^{(1,0)}}, \tag{17}$$

елементи якого визначаються з урахуванням позначень (14), (16).

Очевидно, що

$$\left|f_p - \hat{f}_n\right| \le \left|f_p - h_{p,n}\right| + \left|h_{p,n} - \hat{f}_n\right|. \tag{18}$$

Встановимо оцінку зверху для кожного з доданків правої частини цієї нерівності. Нехай $Q_{2[s]}^{(p)}$, $\hat{Q}_{2[s]}^{(p)}$, $s = 1, \ldots, p$, – залишки неперервних дробів f_p та $h_{p,n}$, відповідно, тобто

$$Q_{2[s]}^{(p)} = b_{2[s]}^{(1,p-s)} + \frac{a_{2[s+1]}}{Q_{2[s+1]}^{(p)}}, \qquad s = 1, \ldots, p-1, \qquad Q_{2[p]}^{(p)} = b_{2[p]}^{(1,0)},$$

$$\hat{Q}_{2[s]}^{(p)} = \begin{cases} b_{2[s]}^{(1)} + \dfrac{a_{2[s+1]}}{\hat{Q}_{2[s+1]}^{(p)}}, & s = 1, \ldots, n, \\ Q_{2[s]}^{(p)}, & s = n+1, \ldots, p. \end{cases}$$

Враховуючи, що $f_p - h_{p,n} = b_0^{(1,p)} - b_0^{(1)} + \dfrac{a_{2[1]}}{Q_{2[1]}^{(p)}} - \dfrac{a_{2[1]}}{\hat{Q}_{2[1]}^{(p)}}$, після елементарних перетворень з використанням рекурентних співвідношень для залишків неперервних дробів f_p і $h_{p,n}$ та методики доведення формул для різниці підхідних дробів [5, 9] можемо довести, що

$$\left|f_p - h_{p,n}\right| \le \left|b_0^{(1)} - b_0^{(1,p)}\right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|b_{2[k]}^{(1)} - b_{2[k]}^{(1,p-k)}\right|}{\prod\limits_{s=1}^{k} \left|\hat{Q}_{2[s]}^{(p)} Q_{2[s]}^{(p)}\right|} \cdot a_{2[1]} a_{2[2]} \ldots a_{2[k]}. \tag{19}$$

Оцінимо величини $\left|b_{2[k]}^{(1)} - b_{2[k]}^{(1,p-k)}\right|$, $1 \le k \le n$, як модуль різниці між значеннями нескінченного неперервного дробу і його $(p-k)$-м підхідним дробом, $p - k \ge n$. Враховуючи, що елементи цього дробу задовольняють умови теореми 3, а також відповідну оцінку для випадку $N = 1$, маємо

$$\left|b_{2[k]}^{(1)} - b_{2[k]}^{(1,p-k)}\right| \le 2D_1 \rho^n, \qquad k = 1, \ldots, n, \qquad p \ge 2n. \tag{20}$$

Аналогічна оцінка справджується і для першого доданка правої частини нерівності (19):

$$\left|b_0^{(1)} - b_0^{(1,p)}\right| \le 2D_1\rho^n, \qquad p \ge 2n. \tag{21}$$

Розглянемо добутки $\prod_{s=1}^{k} \frac{a_{2[s]}}{\left|Q_{2[s]}^{(p)}\hat{Q}_{2[s]}^{(p)}\right|}$ у нерівності (19).

Якщо $k = 1$, то, враховуючи, що $\Re\left(Q_2^{(p)}\right) > \delta$, $\Re\left(\hat{Q}_2^{(p)}\right) > \delta$, маємо $\frac{a_2}{\left|Q_2^{(p)}\hat{Q}_2^{(p)}\right|} < \frac{M}{\delta^2}$.

Якщо $k = 2\ell + 1$, $\ell \ge 1$, тоді маємо

$$\prod_{s=1}^{2\ell+1} \frac{a_{2[s]}}{\left|Q_{2[s]}^{(p)}\hat{Q}_{2[s]}^{(p)}\right|} = \frac{a_2}{\left|\hat{Q}_2^{(p)}Q_{2[2\ell+1]}^{(p)}\right|} \prod_{s=1}^{\ell} \frac{a_{2[2s+1]}}{\left|\hat{Q}_{2[2s]}^{(p)}\hat{Q}_{2[2s+1]}^{(p)}\right|} \prod_{s=1}^{\ell} \frac{a_{2[2s]}}{\left|Q_{2[2s+1]}^{(p)}Q_{2[2s]}^{(p)}\right|}.$$

Із виконання для елементів ГЛД (2) умов (6)–(8) випливає, що для елементів (14) і (16) неперервних дробів (13) і (17) умови (3), (4) виконуються при $L = M/\delta^2$. Тому для дробів $h_{p,n}$ і f_n справджується оцінка (5), де $L/\sqrt{L^2+1} = M/\sqrt{M^2+\delta^4}$. Тоді

$$\frac{a_{2[2s+1]}}{\left|\hat{Q}_{2[2s]}^{(p)}\hat{Q}_{2[2s+1]}^{(p)}\right|} \le \tau, \qquad \frac{a_{2[2s]}}{\left|Q_{2[2s+1]}^{(p)}Q_{2[2s]}^{(p)}\right|} \le \tau, \quad s = 1,\dots,\ell, \quad \tau = \frac{M}{\sqrt{M^2+\delta^4}}. \tag{22}$$

Тому $\prod_{s=1}^{2\ell+1} \frac{a_{2[s]}}{\left|Q_{2[s]}^{(p)}\hat{Q}_{2[s]}^{(p)}\right|} \le \frac{M}{\delta^2}\tau^{2\ell}$.

Якщо $k = 2\ell$, то, враховуючи (22), отримуємо

$$\prod_{s=1}^{2\ell} \frac{a_{2[s]}}{\left|Q_{2[s]}^{(p)}\hat{Q}_{2[s]}^{(p)}\right|} = \frac{a_2}{\left|\hat{Q}_2^{(p)}Q_{2[2\ell]}^{(p)}\right|} \prod_{s=1}^{\ell-1} \frac{a_{2[2s+1]}}{\left|\hat{Q}_{2[2s]}^{(p)}\hat{Q}_{2[2s+1]}^{(p)}\right|} \prod_{s=1}^{\ell} \frac{a_{2[2s]}}{\left|Q_{2[2s+1]}^{(p)}Q_{2[2s]}^{(p)}\right|} \le \frac{M}{\delta^2}\tau^{2\ell-1}.$$

Отже,

$$\prod_{s=1}^{k} \frac{a_{2[s]}}{\left|Q_{2[s]}^{(p)}\hat{Q}_{2[s]}^{(p)}\right|} < \frac{M}{\delta^2}\tau^{k-1}. \tag{23}$$

Із нерівності (19) з урахуванням оцінок (20), (21) та (23) маємо

$$\left|f_p - h_{p,n}\right| \le 2D_1\rho^n \left(1 + \frac{M}{\delta^2} + \frac{M}{\delta^2}\tau + \ldots + \frac{M}{\delta^2}\tau^{n-1}\right) < 2D_1 S\rho^n,$$

де S визначено в (10).

Оцінимо другий доданок у правій частині нерівності (18), що є модулем різниці між n-м і $(n+1)$-м підхідними дробами деякого неперервного дробу, елементи якого задовольняють умови теореми 1. Тому маємо $\left|h_{p,n} - \hat{f}_n\right| \le \frac{2M}{\delta}\rho^n$, $p \ge 2n$, де ρ визначається згідно із позначенням (11).

З урахуванням оцінок доданків правої частини нерівності (18) отримуємо

$$\left|f_p - \hat{f}_n\right| < 2\left(D_1 S + \frac{M}{\delta}\right)\rho^n, \qquad p \ge 2n.$$

Покладемо в цій нерівності $p = m$, $p = 2n$. Оскільки за умовою $m \ge 2n$, то

$$\left|f_m - f_{2n}\right| \le \left|f_m - \hat{f}_n\right| + \left|f_{2n} - \hat{f}_n\right| < D_2\rho^n, \quad m \ge 2n, \qquad D_2 = 4\left(D_1 S + \frac{M}{\delta}\right).$$

Припустимо, що оцінка (9) виконується для довільних $(r-1)$-вимірних ГЛД (2), $r > 3$, елементи яких задовольняють умови (6)–(8):

$$\left|f_m - f_{(r-1)n}\right| < D_{r-1}\rho^n, \qquad m \ge (r-1)n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Доведемо, що оцінка (9) виконується при $N = r$, тобто для ГЛД

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{r} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \tag{24}$$

Підхідний дріб n-го порядку ГЛД (24) можемо записати у вигляді

$$f_n = b_0^{(r-1,n)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{a_{r[k]}}{b_{r[k]}^{(r-1,n-k)}}, \qquad n \ge 1, \tag{25}$$

де

$$b_0^{(r-1,n)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{\ell=1}^{n} \sum_{i_\ell=1}^{i_{\ell-1}} \frac{a_{i(\ell)}}{b_{i(\ell)}}, \qquad b_{r[n]}^{(r-1,0)} = b_{r[n]},$$

$$b_{r[k]}^{(r-1,n-k)} = b_{r[k]} + \mathop{\mathrm{D}}_{\ell=1}^{n-k} \sum_{i_\ell=1}^{i_{\ell-1}} \frac{a_{r[k]i(\ell)}}{b_{r[k]i(\ell)}}, \qquad i_0 = r-1, \quad k = 1,\ldots,n-1. \tag{26}$$

– підхідні дроби $(r-1)$-вимірних ГЛД, що входять у структуру ГЛД (25).

Запишемо нерівність трикутника для підхідних дробів ГЛД (24):

$$\left|f_m - f_{rn}\right| \le \left|f_m - \tilde{f}_n\right| + \left|f_{rn} - \tilde{f}_n\right|, \qquad m \ge rn, \tag{27}$$

де $\tilde{f}_n = b_0^{(r-1)} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{r[k]}}{b_{r[k]}^{(r-1)}}$ – n-й підхідний дріб неперервного дробу, утвореного після згортання $(r-1)$-вимірних ГЛД у дробі (24), тобто

$$b_0^{(r-1)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i_\ell=1}^{i_{\ell-1}} \frac{a_{i(\ell)}}{b_{i(\ell)}}, \qquad b_{r[k]}^{(r-1)} = b_{r[k]} + \mathop{\mathrm{D}}_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i_\ell=1}^{i_{\ell-1}} \frac{a_{r[k]i(\ell)}}{b_{r[k]i(\ell)}},$$

$$i_0 = r-1, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{28}$$

ГЛД (28) є збіжними, оскільки для них виконуються умови теореми 2.

Для оцінки величини $\left|f_p - \tilde{f}_n\right|$, $p \ge rn$, у правій частині нерівності (27) розглянемо скінченний неперервний дріб

$$g_{p,n} = b_0^{(r-1)} + \frac{a_{r[1]}}{b_{r[1]}^{(r-1)}} + \ldots + \frac{a_{r[n]}}{b_{r[n]}^{(r-1)}} + \frac{a_{r[n+1]}}{b_{r[n+1]}^{(r-1,p-n-1)}} + \ldots + \frac{a_{r[p]}}{b_{r[p]}^{(r-1,0)}}, \tag{29}$$

елементи якого визначаються з урахуванням позначень (26), (28).

Очевидно, що

$$\left|f_p - \tilde{f}_n\right| \le \left|f_p - g_{p,n}\right| + \left|g_{p,n} - \tilde{f}_n\right|. \tag{30}$$

Нехай $Q_{r[s]}^{(p)}$, $\tilde{Q}_{r[s]}^{(p)}$, $s = 1,\ldots,p$, – залишки неперервних дробів f_p та $g_{p,n}$, відповідно. У цьому випадку з урахуванням міркувань, використаних при доведенні нерівності (19), коли $N = 2$, отримаємо

$$\left|f_p - g_{p,n}\right| \le \left|b_0^{(r-1)} - b_0^{(r-1,p)}\right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|b_{r[k]}^{(r-1)} - b_{r[k]}^{(r-1,p-k)}\right|}{\prod\limits_{s=1}^{k}\left|\tilde{Q}_{r[s]}^{(p)} Q_{r[s]}^{(p)}\right|} \cdot a_{r[1]} a_{r[2][2]} \ldots a_{r[k]}. \tag{31}$$

Оцінимо величини $\left|b_{r[k]}^{(r-1)} - b_{r[k]}^{(r-1,p-k)}\right|$, $1 \le k \le n$, як модуль різниці між значеннями $(r-1)$-вимірного ГЛД спеціального вигляду і його $(p-k)$-м підхідним дробом, $p-k \geq (r-1)n$. Враховуючи припущення індукції, позначення (11), а також те, що елементи цього ГЛД задовольняють умови теореми 3, отримаємо

$$\left|b_{r[k]}^{(r-1)} - b_{r[k]}^{(r-1,p-k)}\right| < 2D_{r-1}\rho^n, \qquad k = 1,\dots,n, \qquad p \geq rn.$$

Аналогічно для першого доданка правої частини нерівності (31) маємо

$$\left|b_0^{(r-1)} - b_0^{(r-1,p)}\right| < 2D_{r-1}\rho^n, \; p \geq rn.$$

Розглянувши добутки $\prod\limits_{s=1}^{k} \dfrac{a_{r[s]}}{\left|Q_{r[s]}^{(p)}\tilde{Q}_{r[s]}^{(p)}\right|}$ у нерівності (31), з використанням позначень і міркувань, наведених у випадку $N=2$, отримаємо

$$\prod_{s=1}^{k} \frac{a_{r[s]}}{\left|Q_{r[s]}^{(p)}\tilde{Q}_{r[s]}^{(p)}\right|} < \frac{M}{\delta^2}\tau^{k-1}.$$

Із нерівності (31) з урахуванням отриманих оцінок маємо

$$\left|f_p - g_{p,n}\right| \leq 2D_{r-1}\rho^n\left(1 + \frac{M}{\delta^2} + \frac{M}{\delta^2}\tau + \ldots + \frac{M}{\delta^2}\tau^{n-1}\right) < 2D_{r-1}S\rho^n,$$

де S визначено у позначеннях (10).

Оцінимо другий доданок у правій частині нерівності (30), що є модулем різниці між n-м і $(n+1)$-м підхідними дробами деякого неперервного дробу, елементи якого задовольняють умови теореми 1. Тому маємо $\left|g_{p,n} - \tilde{f}_n\right| \leq \leq \dfrac{2M}{\delta}\rho^n$, $p \geq rn$, де ρ визначається згідно із позначенням (11).

Враховуючи оцінки доданків правої частини нерівності (30), отримуємо

$$\left|f_p - \tilde{f}_n\right| < 2\left(D_{r-1}S + \frac{M}{\delta}\right)\rho^n, \qquad p \geq rn.$$

Покладемо в цій нерівності $p = m$, $p = rn$. Оскільки за умовою $m \geq rn$, то

$$\left|f_m - f_{rn}\right| \leq \left|f_m - \tilde{f}_n\right| + \left|f_{rn} - \tilde{f}_n\right| < D_r\rho^n, \qquad m \geq rn.$$

де D_r визначено в (10). ♦

Зауваження 1. Твердження теореми залишається правильним, якщо умову (6) замінити умовою $\Im\left(b_{i(2p-1)}\right) \leq 0$, $\Im\left(b_{i(2p)}\right) \geq 0$, $i(2p) \in I$.

Теорема 4. *ГЛД* (1) *з нерівнозначними змінними збігається у кожній точці* $\mathbf{z}_0 = (z_{10}, z_{20}, \dots, z_{N0}) \in \mathbb{C}^N$, *якщо виконуються умови*

$$\Im\left(b_{i(2p-1)}^*\right) \geq 0, \qquad \Im\left(b_{i(2p)}^*\right) \leq 0, \qquad i(2p) \in I$$

(*або*

$$\Im\left(b_{i(2p-1)}^*\right) \leq 0, \qquad \Im\left(b_{i(2p)}^*\right) \geq 0, \qquad i(2p) \in I\,),$$

$$\Re\left(b_{i(k)}^*\right) \geq \delta, \qquad \delta > 0, \qquad 0 < c_{i(k)} \leq c, \qquad i(k) \in I,$$

де $b_{i(k)}^* = b_{i(k)} \exp\left(i\sum\limits_{p=1}^{k}(-1)^{k+p-1}\arg z_{i_p 0}\right)$.

Оцінка швидкості збіжності дробу (1) *в точці* $\mathbf{z}_0$ *визначається нерівністю* (9), *де* $M = c\max\limits_{1\leq m\leq N}\left|z_{m0}\right|$.

Теорема 4 є наслідком теореми 3, якщо ГЛД (1) звести до вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)} \left| z_{i_k} \right|}{b_{i(k)}(\mathbf{z})},$$

де

$$b_{i(k)}(\mathbf{z}) = b_{i(k)} \exp\left(i \sum_{p=1}^{k} (-1)^{k+p-1} \arg z_{i_p} \right).$$

Зауваження 2. Послідовність $\left\{ \sum_{p=1}^{k} (-1)^{k+p-1} \arg z_{i_p 0} \right\}_{i(k)\in I}$ є скінченною і містить не більше ніж 2^N елементів, де N – вимірність ГЛД. Наприклад, при $N = 2$ це є множина $\{-\arg z_{10}, -\arg z_{20}, \arg z_{20} - \arg z_{10}, 0\}$.

У роботі [2] сформульовано і наведено схему доведення наступної леми. Повне доведення аналогічного твердження для інтегральних ланцюгових дробів подано у дисертації [1].

Лема 1. *Якщо елементи ГЛД* (2) *задовольняють умови* (3) *або умови*

$$-\frac{\pi}{2} \le \arg b_{i(2p-1)} \le 0, \quad 0 \le \arg b_{i(2p)} \le \frac{\pi}{2}, \quad p \ge 1, \quad a_{i(k)} > 0, \quad k \ge 1,$$

$i(k)$, $i(2p) \in I$, *то для його залишків справджується оцінка*

$$\left| Q_{i(k)}^{(n)} \right| \ge \left| b_{i(k)} \right|, \quad i(k) \in I, \quad k = 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Розглянемо багатовимірний S-дріб [10, 14, 15] вигляду

$$d_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \qquad i_0 = N. \tag{32}$$

Теорема 5. *Нехай елементи ГЛД* (32) *задовольняють умову*

$$0 < c_{i(k)} \le c, \qquad i(k) \in I.$$

Тоді ГЛД (32) *рівномірно збігається на кожному компакті* K *області*

$$G = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\} : -\frac{\pi}{2} < \arg z_N \le \arg z_{N-1} \le \ldots \le \arg z_1 < 0 \right\}$$

до голоморфної у цій області функції і для швидкості збіжності справджується оцінка

$$\left| f_m(\mathbf{z}) - f_{Nn}(\mathbf{z}) \right| < D_N \left(\frac{\sqrt{\delta^2 + 4M} - \delta}{\sqrt{\delta^2 + 4M} + \delta} \right)^n, \qquad m \ge Nn, \qquad n \ge 1,$$

де $M = c \max_{\mathbf{z}\in K,\, 1\le m\le N} |z_m|$, $\delta = \cos\left(\max_{\mathbf{z}\in K} |\arg z_N| \right)$, *а стала* D_N *визначається згідно зі співвідношеннями* (10).

Д о в е д е н н я. Здійснивши еквівалентні перетворення, зведемо ГЛД (32) до вигляду

$$d_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)} \left| z_{i_k} \right|}{d_{i(k)}(\mathbf{z})}, \tag{33}$$

де

$$d_{i(k)}(\mathbf{z}) = \exp\left(i \sum_{p=1}^{k} (-1)^{k+p-1} \arg z_{i_p} \right).$$

Використовуючи співвідношення $d_{i(k)}(\mathbf{z}) = \dfrac{1}{d_{i(k-1)}(\mathbf{z}) z_{i_k}}$, $k \ge 2$, $i(k) \in I$, і враховуючи, що $\mathbf{z} \in G$, методом математичної індукції легко довести, що справджуються нерівності

$$0 < \arg d_{i(2s-1)}(\mathbf{z}) < \frac{\pi}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg d_{i(2s)}(\mathbf{z}) \le 0, \qquad i(2s) \in I.$$

Отже, виконуються умови леми 1, тому для залишків $Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})$, $k = 1,\dots,n$, $n \ge 1$, n-го підхідного дробу ГЛД (33) справджуються співвідношення

$$\left|Q_{i(k)}^{(n)}(\mathbf{z})\right| \ge \left|d_{i(k)}(\mathbf{z})\right| = 1, \qquad k = 1,\dots,n, \qquad \mathbf{z} \in G.$$

Враховуючи еквівалентність ГЛД (32) і (33), для n-го підхідного дробу ГЛД (32) у кожній точці $\mathbf{z} \in G$ маємо оцінку

$$|f_n(\mathbf{z})| \le |d_0| + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|c_{i_1}||z_{i_1}|}{\left|Q_{i_1}^{(n)}(\mathbf{z})\right|} \le |d_0| + cN \max_{1 \le m \le N} |z_m|.$$

Отже, $f_n(\mathbf{z})$, $n \ge 1$, − голоморфні функції в області G і послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена на компактах області G.

Нехай $\Delta = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \arg z_r = -\pi/4,\ 0 < |z_r| < 1,\ r = 1,\dots,N\}$. Очевидно, що $\Delta \subset G$. Для довільного $\mathbf{z} \in \Delta$ і довільного $i(2p) \in I$ отримуємо, що $\arg d_{i(2p-1)}(\mathbf{z}) = \pi/4$, $\arg d_{i(2p)}(\mathbf{z}) = 0$, $p \ge 1$. Отже, $\Re\left(d_{i(k)}(\mathbf{z})\right) \ge \sqrt{2}/2$, тобто для елементів $d_{i(k)}(\mathbf{z})$ виконуються умови (6) і (7). Оскільки $0 < c_{i(k)}\left|z_{i_k}\right| \le c$ для довільного $\mathbf{z} \in \Delta$, то для дробу (33) справджується умова (8). Отже, елементи ГЛД (33) задовольняють умови теореми 3. Тому цей дріб і еквівалентний йому ГЛД (32) збігаються на множині Δ. Таким чином, за теоремою 2.17 з [5] функціональний ГЛД (32) рівномірно збігається на кожному компакті області G до голоморфної функції в цій області.

Нехай K − довільний компакт області G. Для кожного $\mathbf{z} \in K$ маємо $0 < c_{i(k)}\left|z_{i_k}\right| \le c \max\limits_{\mathbf{z} \in K, 1 \le m \le N} |z_m|$.

Нехай $\alpha = \max\limits_{\mathbf{z} \in K} |\arg z_N|$. Тоді з використанням методу математичної індукції легко показати, що $\left|\arg d_{i(k)}(\mathbf{z})\right| \le \alpha$. Отже, $\Re\left(d_{i(k)}(\mathbf{z})\right) \ge \cos\alpha$, $i(k) \in I$, і тому для ГЛД (32) виконуються умови теореми 3, якщо $\mathbf{z} \in K$. Із теореми 3 випливає, що

$$|f_m(\mathbf{z}) - f_{Nn}(\mathbf{z})| < D_N \left(\frac{\sqrt{\delta^2 + 4M} - \delta}{\sqrt{\delta^2 + 4M} + \delta}\right)^n, \qquad m \ge Nn, \qquad n \ge 1,$$

де $\mathbf{z} \in K$, $M = c \max\limits_{\mathbf{z} \in K, 1 \le m \le N} |z_m|$, $\delta = \cos\left(\max\limits_{\mathbf{z} \in K} |\arg z_N|\right)$, а стала D_N визначається з урахуванням співвідношень (10). ♦

Зауваження 3. Твердження теореми 5 залишається правильним, якщо область G замінити областю

$$\tilde{G} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\} : 0 < \arg z_1 \le \arg z_2 \le \ldots \le \arg z_N < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Ефект використання оцінки швидкості збіжності ГЛД спеціального вигляду, отриманої у цій статті, порівняно з оцінкою в теоремі 2, проявляється при накладанні додаткових обмежень на δ і M, зокрема, при достатньо великому значенні M/δ^2.

1. *Антонова Т. М.* Достатні ознаки збіжності і стійкості інтегральних ланцюгових дробів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. − Львів, 1996. − 141 с.

2. *Антонова Т. М.* Швидкість збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Волин. мат. вісн. – 1999. – Вип. 6. – С. 5–11.
3. *Антонова Т. М., Боднар Д. І.* Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2000. – **31**. – С. 19–32.
4. *Баран О. Є.* Деякі кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 3. – С. 7–14.
   Те саме: *Baran O. E.* Some circular regions of convergence for branched continued fractions of a special form // J. Math. Sci. – 2015. – **205**, No. 4. – P. 491–500.
5. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
6. *Боднар Д. И.* Исследование сходимости одного класса ветвящихся цепных дробей // Цепные дроби и их применения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 41–44.
7. *Боднар Д. І., Біланик І. Б.* Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у кутових областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 3. – С. 60–69.
   Те саме: *Bodnar D. I., Bilanyk I. B.* On the convergence of branched continued fractions of a special form in angular domains // J. Math. Sci. – 2020. – **246**, No. 2. – P. 188–200. – https://doi.org/10.1007/s10958-020-04728-x.
8. *Боднар Д. І., Дмитришин Р. І.* Багатовимірні приєднані дроби з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 3. – С. 325–349.
   Те саме: *Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I.* Multidimensional associated fractions with independent variables and multiple power series // Ukr. Math. J. – 2019. – **71,** No. 3. – P. 370–386. – https://doi.org/10.1007/s11253-019-01652-5.
9. *Боднар Д. И., Олексив И. Я.* О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 3. – С. 373–377.
   Те саме: *Bodnar D. I., Oleksiv I. Y.* On the convergence of branching continued fractions with nonnegative terms // Ukr. Math. J. – 1976. – **28,** No. 3. – P. 290–293. –
10. *Дмитришин Р. І.* Оцінки похибок наближень для багатовимірного S-дробу з нерівнозначними змінними // Буков. мат. журн. – 2018. – **6**, № 1-2. – С. 56–59.
11. *Сусь О. М.* Про оцінку швидкості збіжності двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 115–123.
12. *Bilanyk I. B.* A truncation error bound for some branched continued fractions of the special form // Мат. студії. – 2019. – **52**, № 2. – С. 115–123.
13. *Bodnar D. I., Bilanyk I. B.* Convergence criterion for branched continued fractions of the special form with positive elements // Карпат. мат. публікації. – 2017. – **9**, № 1. – С. 13–21.
   – http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp.
14. *Bodnar O. S., Dmytryshyn R. I.* On the convergence of multidimensional S-fractions with independent variables // Карпат. мат. публікації. – 2018. – **10**, № 1. – С. 58–64.
   – http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp.
15. *Dmytryshyn R. I.* On some of convergence domains of multidimensional S-fractions with independent variables // Карпат. мат. публікації. – 2019. – **11**, № 1. – С. 54–58.
   – http://www.journals.pnu.edu.ua/index.php/cmp.
16. *Gragg W. B., Warner D. D.* Two constructive results in continued fractions // SIAM J. Numer. Anal. – 1983. – **20,** No. 6. – P. 1187–1197.
   – https://www.jstor.org/stable/2157153.
17. *Jensen J. L. W. V.* Bidrag til Kaedebrekernes Teori // Festskrift til H. G. Zeuthen. – 1909. – P. 78–87.
18. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions. – Vol. 1: Convergence theory. – Amsterdam. – Paris: Atlantis Press/Word Scientific, 2008. – xii+308 p.
19. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. – Band II: Analytisch-funktionentheoretische Kettenbrüche. – Stuttgart: B. G. Teubner, 1957. – vi+316 S.
20. *Van Vleck E. B.* On the convergence of continued fractions with complex elements // Trans. Amer. Math. Soc. – 1901. – **2**, No. 3. – P. 215–233.
   – https://doi.org/10.2307/1986206.

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ ПОТОЧЕЧНОЙ И РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С НЕРАВНОЗНАЧНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Исследованы ветвящиеся цепные дроби с неравнозначными переменными, ветвящиеся цепные дроби специального вида и многомерные C- и S-дроби с неравнозначными переменными. С использованием результатов, установленных для непрерывных дробей, и результатов, касающихся сходимости и оценок погрешностей аппроксимации ветвящихся цепных дробей специального вида в угловых областях, установлены новые оценки скорости сходимости ветвящихся цепных дробей специального вида, поточечной сходимости многомерных C-дробей и равномерной сходимости на компактах угловых областей многомерных S-дробей с неравнозначными переменными.

***Ключевые слова**: ветвящиеся цепные дроби специального вида, ветвящиеся цепные дроби с неравнозначными переменными, поточечная сходимость, равномерная сходимость, оценка скорости сходимости.*

ESTIMATES OF THE RATE OF POINTWISE AND UNIFORM CONVERGENCE FOR BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH NONEQUIVALENT VARIABLES

The branched continued fractions with nonequivalent variables, branched continued fractions of the special form, and multidimensional C- and S-fractions with nonequivalent variables are studied. New estimates for the rate of convergence of branched continued fractions of the special form, pointwise convergence of multidimensional C-fractions as well as the uniform convergence on compacts of angular domains of multidimensional S-fractions with nonequivalent variables are established by using the results determined for continued fractions and the results concerning the convergence and truncation error bounds for the approximation of branched continued fractions of the special form in angular domains.

***Key words**: branched continued fractions of the special form, branched continued fractions with nonequivalent variables, pointwise convergence, uniform convergence, estimate of the rate of convergence.*

[1] Терноп. нац. економ. ун-т, Тернопіль,

[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.12.19