

ПРО РІВНОВАГУ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ІЗ ВМ'ЯТИНОЮ

На основі лінійної тривимірної теорії пружності розглянуто задачу про рівновагу нетонких ізотропних циліндричних оболонок із вм'ятиною за певних граничних умов на торцях. Для опису поперечного перерізу поверхні відліку використовується рівняння раулика Паскаля в полярних координатах. Тривимірну крайову задачу методом відокремлення змінних із використанням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є зведено до одновимірної, яку розв'язано стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Виконано оцінки точності отриманих розв'язків. Результати розв'язання задачі наведено у вигляді графіків і таблиць.

Ключові слова: напружено-деформований стан, нетонкі циліндричні оболонки з вм'ятиною, рівняння раулика Паскаля, дискретні ряди Фур'є, метод дискретної ортогоналізації.

Елементи конструкцій у вигляді циліндричних оболонок різної товщини кругового та некругового поперечного перерізу мають широке застосування у галузях сучасної техніки, зокрема у будівництві споруд, авіабудуванні, машинобудуванні, трубопровідній промисловості, медицині тощо [1, 2, 17]. Щоб забезпечити надійність експлуатації таких конструкцій, необхідно знати їх напружено-деформований стан, для визначення якого розроблені численні підходи, які базуються на застосуванні різноманітних чисельних і аналітичних методів [7–9, 13, 16]. При виготовленні циліндричних оболонок з круговим поперечним перерізом або внаслідок їх експлуатації можуть виникати певні відхилення від кругової форми. У випадку незначних періодичних відхилень від кругової форми вздовж колової координати розрахунки напруженого стану таких оболонок можна здійснити на основі методів теорії збурень [10, 14].

У цій роботі розглянемо у просторовій постановці задачу про напружений стан нетонких ізотропних циліндричних оболонок, що мають вм'ятину в околі одного з діаметрів, при дії зовнішнього навантаження і за певних граничних умов на торцях. Задачу розв'язано з використанням методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [4] і чисельного методу дискретної ортогоналізації [5].

1. Постановка задачі. Розв'язується просторова задача лінійної теорії пружності. В загальному випадку нетонкі циліндричні оболонки віднесено до криволінійної системи координат s, t, γ , яку побудовано таким чином. В ортогональній криволінійній системі координат s, t криволінійну циліндричну поверхню вибрано за поверхню відліку, а координата γ відкладається уздовж нормалі до цієї поверхні [4]. Квадрат довжини лінійного елемента в такій системі координат визначається рівністю

$$dS^2 = ds^2 + H_2^2(t, \gamma) dt^2 + d\gamma^2, \quad (1)$$

де $H_1 = H_3 = 1$, $H_2 = 1 + \gamma/R_t$ – параметри Ляме, R_t – радіус кривини поверхні відліку поперечного перерізу. За поверхню відліку вибираємо серединну поверхню циліндричної оболонки, що рівновіддалена від бічних поверхонь. Нехай довжина оболонки L , а h – її товщина. Тоді $0 \leq s \leq L$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$.

Будемо розглядати нетонкі циліндричні оболонки з круговим поперечним перерізом, які мають вм'ятину в околі одного з діаметрів (рис. 1) під

✉ r.l.s@ua.fm

дією розподіленого зовнішнього навантаження $q_\gamma = q_0 \sin(\pi s/L)$, $q_0 = \text{const}$.

На рис. 1 цифрою 1 позначено поверхню відліку кругової оболонки, цифрою 2 – поверхню оболонки з вм'ятиною.

Для опису поперечного перерізу поверхні відліку використаємо рівняння равлика Паскаля, яке в полярній системі координат має вигляд [11]

$$\rho = a \cos \psi + \ell, \quad (2)$$

де ρ – полярний радіус, ψ – полярний кут у поперечному перерізі $0 \leq \psi \leq 2\pi$, a – радіус вихідного кола, ℓ – відстань, на яку зміщується точка вздовж радіуса-вектора.

Рівність (1) при переході від координати t до координати ψ набуває вигляду

$$dS^2 = ds^2 + H_2^2(\psi, \gamma) \omega(\psi) d\psi^2 + d\gamma^2,$$

де коефіцієнт переходу $\omega(\psi) = [\rho^2 + (\rho')^2]^{1/2}$ і радіус кривини серединної

поверхні в поперечному перерізі $R_\psi = R(\psi) = \frac{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}$.

За вихідні приймаємо основні рівняння лінійної просторової теорії пружності для ізотропного тіла [12]. Граничні умови на обмежуючих поверхнях є такими:

– на торцях оболонок розглядаємо умови, що відповідають наявності діафрагми, абсолютно жорсткої у своїй площині і гнучкої при виході з неї

$$\text{при } s = 0, \quad s = \ell: \quad \sigma_s = u_\psi = u_\gamma = 0; \quad (3)$$

– на бічних поверхнях

$$\text{при } \gamma = -h/2: \quad \sigma_\gamma = 0, \quad \tau_{s\gamma} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma} = 0,$$

$$\text{при } \gamma = h/2: \quad \sigma_\gamma = q_0 \sin(\pi s/L), \quad \tau_{s\gamma} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma} = 0; \quad (4)$$

– уздовж напрямної з огляду на замкненість оболонок граничні умови мають вигляд умов періодичності характеристик напружено-деформованого стану (T – період):

$$\sigma_\gamma(s, \psi, \gamma) = \sigma_\gamma(s, \psi + T, \gamma), \quad \tau_{s\gamma}(s, \psi, \gamma) = \tau_{s\gamma}(s, \psi + T, \gamma), \quad \dots,$$

$$\dots, \quad u_\psi(s, \psi, \gamma) = u_\psi(s, \psi + T, \gamma).$$

2. Метод розв'язування. За розв'язувальні функції виберемо ті, в яких формулюються граничні умови на бічних поверхнях: три компоненти напружень σ_γ , $\tau_{\psi\gamma}$, $\tau_{s\gamma}$, до яких додаємо також три компоненти переміщень u_s , u_ψ , u_γ . Після певних перетворень відносно розв'язувальних функцій з основних рівнянь отримаємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь шостого порядку з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. При побудові розв'язувальної системи рівнянь приймаємо такі припущення [4]:

- напрямна серединної поверхні є довільною неперервною кривою;
- механічні характеристики можуть бути змінними вздовж товщини, залишаючись сталими вздовж твірної;
- закон розподілу прикладених до оболонки поверхневих сил може бути заданий довільним чином.

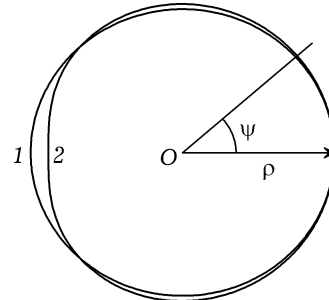


Рис. 1

Наявність граничних умов (3) дає змогу відокремити змінні [5, 6] шляхом подання розв'язувальних функцій і компонент навантаження у вигляді розвинень у скінченні ряди Фур'є уздовж координати s , $0 \leq s \leq \ell$. Після підстановки цих розвинень у розв'язувальну систему диференціальних рівнянь і відокремлення змінних для кожного члена розвинень n , $n = 0, \dots, N$, отримаємо систему диференціальних рівнянь із частинними похідними відносно змінних ψ та γ (індекс n у позначеннях розв'язувальних функцій опускаємо):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \varphi_1^1 - \varphi_4^1 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_1^4 + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varphi_4^3 + \varphi_1^5 \right), \\
\frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n \sigma_\gamma + \frac{E}{1-\nu^2} \lambda_n^2 u_s - \varphi_1^2 - \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_4^2 - \\
&\quad - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_1^3 - \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi_6, \\
\frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \lambda_n^2 u_\psi - 2\varphi_2^1 + \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_3^3 - \\
&\quad - \frac{E}{1-\nu^2} (\varphi_7 + \varphi_5) - \frac{\nu}{1-\nu} \varphi_3^1, \\
\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E} \sigma_\gamma + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\lambda_n u_s - \varphi_4^2 - \varphi_1^3 \right), \\
\frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma} - \lambda_n u_\gamma, \\
\frac{\partial u_\psi}{\partial \gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\psi\gamma} - \varphi_3^2 + \varphi_2^2, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{L}, \tag{5}
\end{aligned}$$

де E – модуль пружності, ν – коефіцієнт Пуассона. При цьому граничні умови (4) після відокремлення змінних набувають вигляду (для кожного n)

$$\begin{aligned}
\text{при } \gamma = -h/2: \quad & \sigma_\gamma = 0, \quad \tau_{s\gamma} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma} = 0, \\
\text{при } \gamma = h/2: \quad & \sigma_\gamma = q_0, \quad q_0 = \text{const}, \quad \tau_{s\gamma} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma} = 0. \tag{6}
\end{aligned}$$

У розв'язувальній системі (5) добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, що залежать від двох змінних ψ , γ і перешкоджають відокремленню змінних уздовж координати ψ , позначено як нові доповняльні функції φ_i^j , $i = 1, \dots, 7$, $j = 1, 2, \dots, 5$. Вони мають вигляд

$$\begin{aligned}
\varphi_1^j &= \frac{1}{(1+\gamma/R_\psi)R_\psi} \left\{ \sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \frac{1}{(1+\gamma/R_\psi)R_\psi} u_\gamma \right\}, \quad j = 1, \dots, 5, \\
\varphi_2^j &= \frac{1}{(1+\gamma/R_\psi)R_\psi} \{ \tau_{\psi\gamma}, u_\psi \}, \quad j = 1, 2, \\
\varphi_3^j &= \frac{1}{\omega(\psi)(1+\gamma/R_\psi)} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \psi}, \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi}, \frac{\partial u_s}{\partial \psi} \right\}, \quad j = 1, 2, 3, \\
\varphi_4^j &= \frac{1}{\omega(\psi)(1+\gamma/R_\psi)} \left\{ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi}, \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi}, \frac{1}{(1+\gamma/R_\psi)R_\psi} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} \right\}, \quad j = 1, 2, 3, \\
\varphi_5 &= \frac{1}{\omega(\psi)(1+\gamma/R_\psi)} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_1^3, \quad \varphi_6 = \frac{1}{\omega(\psi)(1+\gamma/R_\psi)} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_3^3, \\
\varphi_7 &= \frac{1}{\omega(\psi)(1+\gamma/R_\psi)} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_4^2. \tag{7}
\end{aligned}$$

Отримана система диференціальних рівнянь (5) внаслідок введення доповняльних функцій (7) формально є системою диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами, що дозволяють відокремити змінні в напрямку координати ψ . Для цього розв'язувальні функції, компоненти навантаження і доповняльні функції подаємо у вигляді розвинень у ряди Фур'є:

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\psi, \gamma) &= \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos k\psi, & \tilde{Y}(\psi, \gamma) &= \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin k\psi, \\ \tilde{X} &= \{\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6, q_0\}, & \tilde{Y} &= \{\tau_{\psi\gamma}, u_\psi, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7\}.\end{aligned}\quad (8)$$

Підставляючи ряди (8) у розв'язувальну систему (5) і граничні умови (6) і відокремлюючи змінні, отримуємо розв'язувальну систему звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1\right) \varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 - \\ &\quad - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varphi_{4,k}^3 + \varphi_{1,k}^5\right), \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + \frac{E}{1-\nu^2} \lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - \\ &\quad - \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)}\right) \lambda_n \varphi_{4,k}^2 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 - \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi_{6,k}, \\ \frac{d\tau_{\psi\gamma,k}}{d\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \lambda_n^2 u_{\psi,k} - 2\varphi_{2,k}^1 + \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)}\right) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 - \\ &\quad - \frac{E}{1-\nu^2} (\varphi_{7,k} + \varphi_{5,k}) - \frac{\nu}{1-\nu} \varphi_{3,k}^1, \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E} \sigma_{\gamma,k} + \frac{\nu}{1-\nu} (\lambda_n u_{s,k} - \varphi_{4,k}^2 - \varphi_{1,k}^3), \\ \frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ \frac{du_{\psi,k}}{d\gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\psi\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2, \quad k = 0, 1, \dots, K,\end{aligned}\quad (9)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned}\gamma = -h/2: & \quad \sigma_{\gamma,k} = 0, \quad \tau_{s\gamma,k} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0, \\ \gamma = h/2: & \quad \sigma_{\gamma,k} = q_0, \quad \tau_{s\gamma,k} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Для інтегрування отриманої системи диференціальних рівнянь (9) з граничними умовами (10) застосуємо стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації [3] одночасно для всіх гармонік розвинень (8). При цьому, оскільки кількість невідомих перевищує кількість рівнянь (за рахунок введення доповняльних функцій), для замикання розв'язувальної системи рівнянь (9) на кожному кроці застосування чисельного методу амплітудні значення доповняльних функцій обчислюємо за поточним значенням амплітуд розв'язувальних функцій за допомогою апроксимації їх дискретними рядами Фур'є [15]. На кінцях інтервалу $-h/2 \leq \gamma \leq h/2$ амплітудні значення доповняльних функцій визначаємо за значеннями амплітуд розв'язувальних функцій згідно з граничними умовами (10) [5, 6].

3. Деякі оцінки точності отриманих результатів. З метою оцінки достовірності отриманих результатів при описі поверхні відліку рівнянням (2) равлика Паскаля проведемо дослідження напруженого стану оболонок з вм'ятинами за умови, коли параметр a вибрано таким чином, що радіус кривини в зоні максимальної вм'ятини ($\psi = \pi$) наближається до радіуса кругової оболонки. При $a = 0$ маємо кругову оболонку, радіус серединної поверхні якої $r = \ell$.

Задачу розв'язано за таких даних: довжина оболонки $L = 60$, товщина $h = 6, 8$, параметри равлика Паскаля $a = 0.5, 1$, $\ell = 40$, механічні характеристики для ізотропного матеріалу: модуль Юнга $E = E_0$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$. Для вибраних значень параметра a радіус кривини в перерізі $\psi = \pi$ набуває значення $R_\psi = 40.01$ при $a = 0.5$ і $R_\psi = 40.02$ при $a = 1$.

У табл. 1 наведено результати обчислень розв'язків задачі в середньому перерізі довжини оболонки ($s = 30$) для значень нормальних переміщень $u_\gamma E/q_0$ поверхні відліку ($\gamma = 0$), максимальних значень напружень σ_ψ/q_0 на зовнішній поверхні $\gamma = h/2$ і максимальних значень $-\sigma_s/q_0$ на внутрішній поверхні $\gamma = -h/2$ у трьох перерізах напрямної $\psi = 0, \pi/2, \pi$. Як бачимо у табл. 1, при незначному відхиленні форми поперечного перерізу від кругової показники напружено-деформованого стану розглядуваних оболонок знаходяться в межах 2% від відповідних показників кругової оболонки.

Таблиця 1

		$u_\gamma E/q_0$			σ_ψ/q_0			$-\sigma_s/q_0$		
		ψ								
a		0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π
$h = 6$										
0		286.360			7.390			2.612		
0.5		286.475	286.284	286.480	7.391	7.389	7.392	2.612	2.611	2.612
1		286.807	286.053	286.849	7.396	7.386	7.397	2.562	2.561	2.562
$h = 8$										
0		212.051			5.592			2.561		
0.5		212.123	212.007	212.125	5.593	5.591	5.593	2.615	2.610	2.615
1		212.332	211.873	212.352	5.596	5.589	5.596	2.565	2.559	2.565

При застосуванні розглянутої методики похибка розв'язку може виникати за рахунок апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур'є. Для оцінки контролю точності отриманих результатів обчислень дослідимо залежність розв'язку задачі про напружений стан нетонких циліндричних оболонок із вм'ятинами під дією зовнішнього навантаження від кількості точок M , у яких обчислюються табличні значення доповняльних функцій, і кількості членів R відповідних дискретних рядів Фур'є.

Числові розрахунки виконано за таких умов: довжина оболонки $L = 60$, товщина $h = 6$, параметри равлика Паскаля $a = 5, 20$, $\ell = 40$, механічні характеристики для ізотропного матеріалу: модуль Юнга $E = E_0$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

Результати обчислень розв'язку задачі в середньому перерізі довжини оболонки $s = 30$ наведено у табл. 2 для значень нормальних переміщень $u_\gamma E/q_0$ поверхні відліку $\gamma = 0$, максимальних значень напружень σ_ψ/q_0 на

зовнішній поверхні $\gamma = h/2$ і значень σ_s/q_0 на внутрішній поверхні $\gamma = -h/2$ у трьох перерізах напрямної $\psi = 0, \pi/2, \pi$. Як видно з табл. 2, доб-ра збіжність розв'язків спостерігається для випадку $R = 6$ членів дискретного ряду Фур'є при $M = 20$ точок табличних значень доповняльних функцій, коли $a = 5$, а також для випадку $R = 12$ при $M = 60$, коли $a = 20$. Таку розбіжність у значеннях кількості M і R можна пояснити тим, що при $a = 5$ вм'ятина є менш виражена, внаслідок чого поперечний переріз мало відрізняється від кругового.

Таблиця 2

		$u_\gamma E/q_0$			σ_ψ/q_0			$-\sigma_s/q_0$		
		ψ								
M	R	0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π
$a = 5$										
10	3	417.522	177.317	538.081	10.261	4.326	3.364	3.288	1.963	8.109
	6	348.956	143.980	734.667	7.895	5.472	15.329	3.068	1.467	9.043
20	3	281.432	262.052	284.063	7.333	7.049	7.325	2.538	2.419	2.579
	6	279.777	262.141	285.240	7.283	7.056	7.390	2.529	2.417	2.588
	9	279.777	262.141	285.240	7.283	7.056	7.390	2.529	2.417	2.588
30	12	279.777	262.141	285.240	7.283	7.056	7.390	2.529	2.417	2.588
$a = 20$										
10	3	417.522	177.317	538.081	10.261	4.326	3.364	3.288	1.963	8.109
	6	348.956	143.980	734.667	7.895	5.472	15.329	3.068	1.467	9.043
20	3	417.857	176.955	539.081	10.268	4.317	3.360	3.289	1.962	8.123
	6	348.680	143.908	735.201	7.888	5.472	15.348	3.065	1.466	9.059
	9	349.710	144.275	746.267	8.110	5.329	16.580	2.999	1.568	8.873
	12	349.583	144.190	746.604	8.076	5.296	16.729	3.006	1.579	8.834
30	9	349.711	144.275	746.267	8.110	5.329	16.580	2.999	1.568	8.873
	12	349.583	144.190	746.604	8.076	5.296	16.729	3.006	1.579	8.834
60	9	349.710	144.275	746.266	8.110	5.329	16.580	2.999	1.568	8.873
	12	349.582	144.189	746.605	8.076	5.296	16.729	3.006	1.579	8.834
120	17	349.582	144.189	746.605	8.076	5.296	16.729	3.006	1.579	8.834

4. Числові результати та їх аналіз. Проведемо аналіз залежності напруженого стану нетонких циліндричних оболонок із вм'ятиною, що знаходиться під дією зовнішнього навантаження, від величини вм'ятини.

Обчислення розв'язків задачі виконано за таких вихідних даних: довжина оболонки $L = 60$, товщина $h = 6, 8$, параметри равлика Паскаля $\ell = 40$, $a = 5, 10, 15, 20$, механічні характеристики ізотропного матеріалу: модуль Юнга $E = E_0$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

Дослідимо вплив вм'ятини стосовно кругової оболонки однакового периметра поверхні відліку. У табл. 3 наведено відповідні значення радіусів r кругових оболонок і радіусів кривини R_ψ оболонок з вм'ятинами в перерізі $\psi = \pi$, а також відхилення від кругової форми в зоні максимальної величини вм'ятини та відношення товщини до радіуса кривизни.

При $a = 20$ кривина в перерізі $\psi = \pi$ наближається до нуля і при збільшенні параметра a кривина змінює знак на від'ємний. Із табл. 3 випливає, що розглядувані оболонки за вибраних параметрів равлика Паскаля і товщини можна віднести до класу оболонок середньої товщини.

Таблиця 3

a	R_ψ	r	Відхилення, %	h/R_ψ ,	
				$h = 6$	$h = 8$
5	40.8	40.0	2	0.15	0.20
10	45.0	40.6	11	0.15	0.20
15	62.5	41.4	151	0.14	0.19
20	—	42.5	—	0.14	0.19

На рис. 2 – рис. 4 наведено графіки обчислених розподілів переміщень і напружень у середньому перерізі довжини оболонки ($s = 30$) уздовж напрямної ψ оболонки для випадку товщини $h = 6$: переміщень $u_\gamma E_0/q_0$ поверхні відліку (рис. 2), напружень σ_ψ/q_0 на зовнішній поверхні (рис. 3) і напружень σ_s/q_0 на внутрішній поверхні (рис. 4), де вони приймають свої максимальні значення. Результати для випадку $h = 8$ наведено у табл. 4.

З огляду на симетрію задачі для кута ψ розглядаємо інтервал $[0, \pi]$. Як видно з рис. 1, наявність вм'ятини приводить до зменшення кривини поперечного перерізу, внаслідок чого оболонка стає більш податливою, що впливає на розподіл характеристик її напруженого стану. При цьому, якщо для $a = 5$ (рис. 2а) максимальні значення переміщень u_γ збільшуються приблизно на 6% порівняно з переміщеннями кругової оболонки, то відповідно для $a = 10$ – збільшуються в 1.24 рази (рис. 2б); для $a = 15$ – в 1.67 разів (рис. 2в) і для $a = 20$ – у 2.46 разів (рис. 2г).

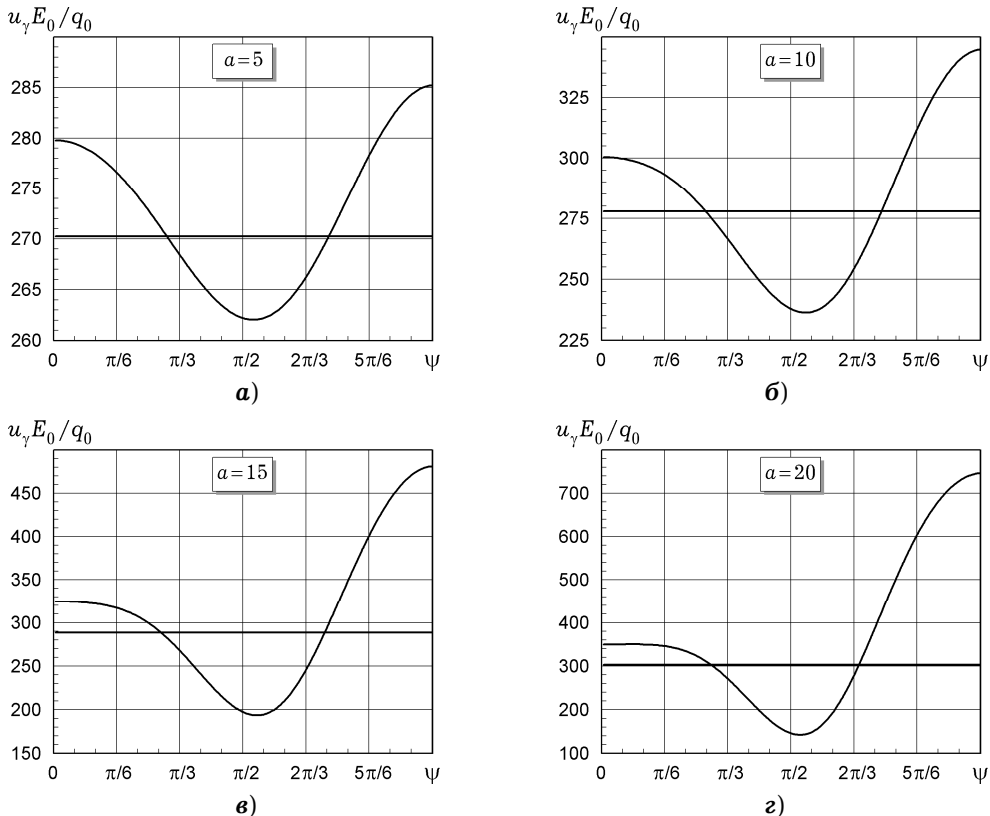


Рис. 2

Аналогічну картину спостерігаємо для розподілу полів напружень. Якщо для параметра $a = 5$ напруження σ_ψ/q_0 (рис. 3а) та σ_s/q_0 (рис. 4а) є близькими до напружень відповідних кругових оболонок, то при збільшенні цього параметра максимальна величина напружень значно зростає.

Так, напруження σ_ψ/q_0 для $a = 10$ збільшуються в 1.16 разів (рис. 3б), для $a = 15$ – в 1.49 разів (рис. 3в) і для $a = 20$ – в 2.46 разів (рис. 3г) порівняно з аналогічними напруженнями в круговій оболонці.

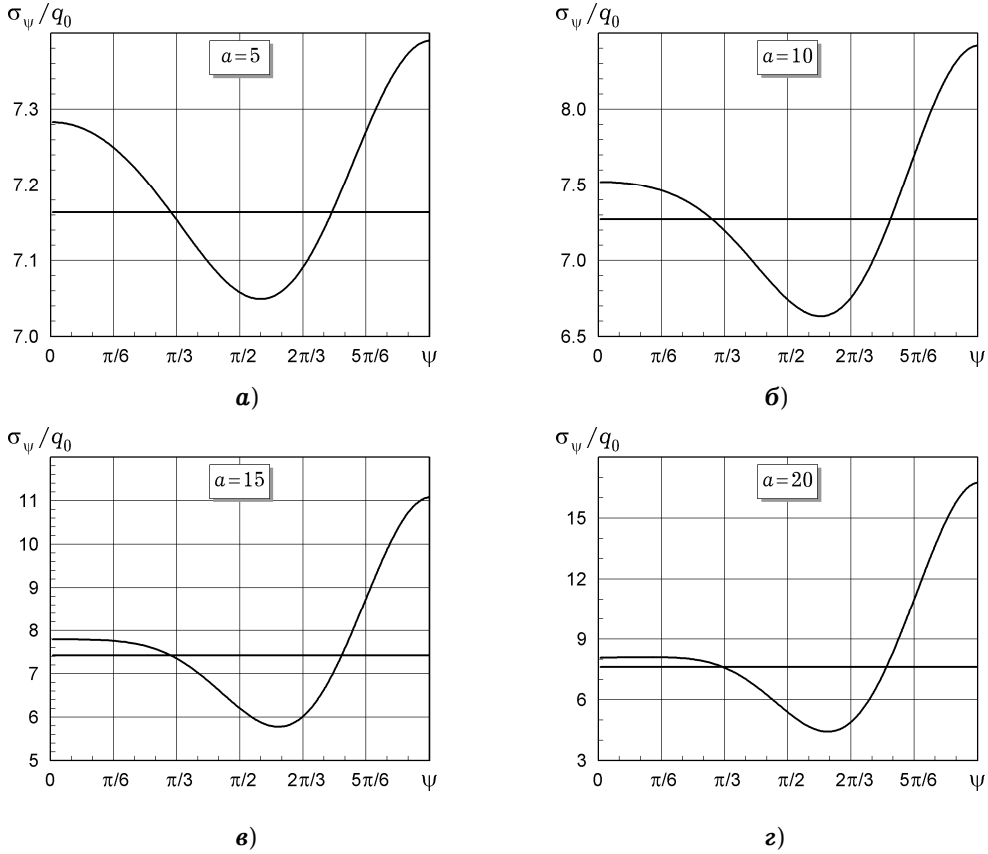
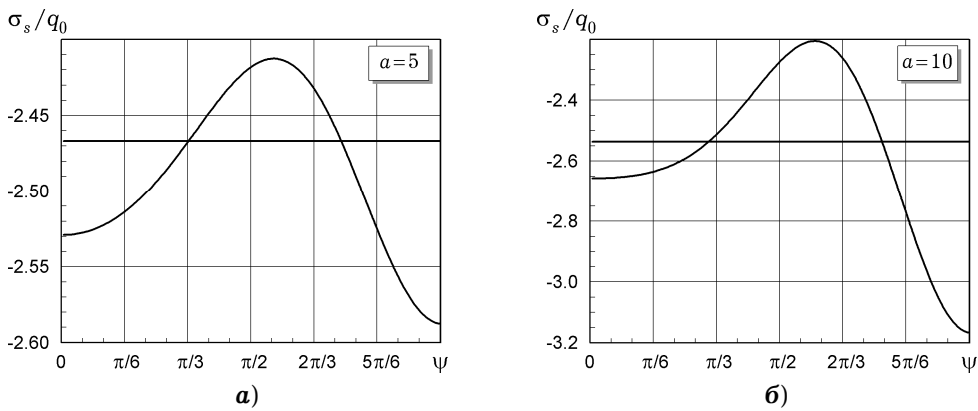


Рис. 3

Для напружень σ_s/q_0 зростання величини максимальних напружень має таку тенденцію: для $a = 10$ – в 1.25 разів (рис. 4б); для $a = 15$ – в 1.8 разів (рис. 4в) і для $a = 20$ – в 3.2 рази (рис. 4г).



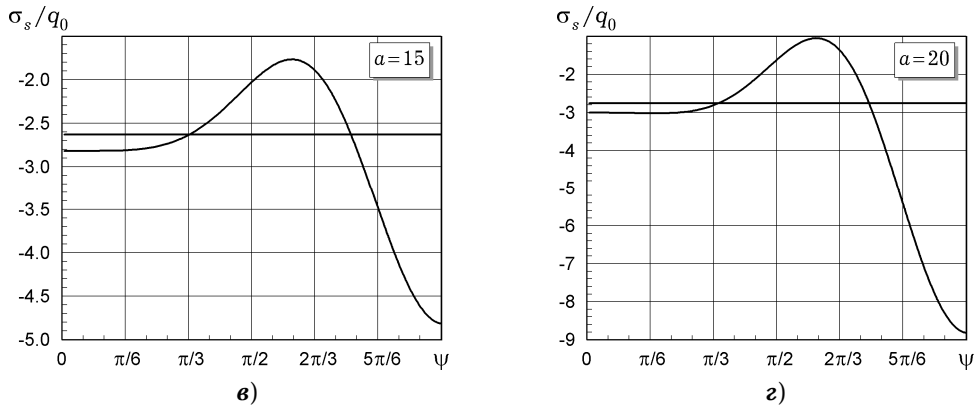


Рис. 4

У табл. 4 наведено значення переміщень і напружень у трьох перерізах напрямної $\psi = 0, \pi/2, \pi$ для випадку товщини оболонки $h = 8$.

Таблиця 4

	$u_r E/q_0$			σ_ψ/q_0			$-\sigma_s/q_0$		
	ψ								
	0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π
$r = 40$	200.496			5.426			2.489		
$a = 5$	206.76	195.91	209.35	5.514	5.353	5.577	2.488	2.378	2.530
$r = 40.6$	206.011			5.506			2.490		
$a = 10$	221.38	182.54	242.34	5.700	5.134	6.219	2.628	2.239	2.983
$r = 41.4$	213.453			5.612			2.578		
$a = 15$	239.73	162.19	312.29	5.920	4.773	7.781	2.805	2.012	4.125
$r = 42.5$	223.850			5.757			2.701		
$a = 20$	259.40	140.23	435.46	6.152	4.280	10.92	3.006	1.702	6.553

При збільшенні товщини оболонки збільшується її жорсткість, при цьому характеристики напруженого стану зменшуються. Так, максимальні значення переміщень $u_r E/q_0$ зменшуються в 1.36 разів для параметра $a = 5$, в 1.42 рази – для $a = 10$, в 1.54 рази – для $a = 15$ і в 1.7 разів – для $a = 20$. Відповідно зменшуються і максимальні значення напружень σ_ψ/q_0 та σ_s/q_0 у межах 1.3–1.5 рази для всіх значень параметра a .

Подібно, як і для товщини $h = 6$ (рис. 2 – рис. 4), у випадку $h = 8$ (табл. 4) при $a = 5$ значення переміщень і напружень є близькими до відповідних величин у кругових оболонках. При збільшенні вм'ятини максимальні значення переміщень і напружень збільшуються порівняно з відповідними переміщеннями і напруженнями у кругових оболонках. Для $a = 10$ переміщення $u_r E/q_0$ і напруження σ_s/q_0 збільшуються в 1.2 рази, напруження σ_ψ/q_0 – на 13%, для $a = 15$ і переміщення, і напруження збільшуються в середньому в 1.5 рази, для $a = 20$ переміщення $u_r E/q_0$ і напруження σ_ψ/q_0 збільшуються в 1.9 разів, напруження σ_s/q_0 – у 2.4 рази.

Таким чином, проведений аналіз показав, що при дослідженні напруженого стану нетонких кругових циліндричних оболонок необхідно враховувати наявність можливих вм'ятин, які впливають на перерозподіл полів як переміщень, так і напружень. Отримані результати можуть бути використані при розрахунках на міцність циліндричних кругових оболонок, що мають вм'ятину в околі одного з діаметрів.

1. Бураго Н. Г., Никитин И. С. Экономичный численно-аналитический метод расчета трехмерных деформаций упругих труб переменного поперечного сечения // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2017. – № 3(40). – С. 59–66.
2. Герасименко, П. В., Ходаковский В. А. Численный алгоритм исследования напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек железнодо-рожных цистерн // *Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия*. – 2019. – **6(64)**. Вып. 2. – Р. 308–317.
– <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.213>.
3. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Успехи мат. наук*. – 1961. – **16**, № 3. – С. 171–174.
4. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Емельянов И. Г., Пелех Б. Л., Максимук А. В. Статика элементов конструкций / Под ред. Я. М. Григоренко. – Киев: А. С. К., 1999. – 384 с. – *Механика композитов: В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя*. – Т. 8.
5. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статки пружних тіл неканонічної форми // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2005. – **48**, № 2. – С. 79–100.
6. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Исследование напряженного состояния полых эллиптических цилиндров при изменении их эксцентриситета и толщины // *Прикл. механика*. – 2002. – **38**, № 8. – С. 69–84.
Te same: Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Stress analysis of hollow elliptic cylinders with variable eccentricity and thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, No. 8. – P. 954–966. – <https://doi.org/10.1023/A:1021271914571>.
7. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с. – *Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя*. – Т. 3.
8. Гузь А. Н., Немши Ю. Н. Статика упругих тел неканонической формы. – Киев: Наук. думка, 1984. – 300 с. – *Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя*. – Т. 2.
9. Луговой П. З., Скосаренко Ю. В., Орленко С. П., Шугайло А. П. Применение метода сплайн-коллокации для решения задач статки и динамики многослойных цилиндрических оболочек с конструктивными и технологическими особенностями // *Прикл. механика*. – 2019. – **55**, № 5. – С. 78–88.
Te same: Lugovoi P. Z., Skosarenko Yu. V., Orlenko S. P., Shugailo A. P. Cylindrical shells with design and manufacturing features // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, No. 5. – P. 524–533. – <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00974-y>.
10. Немши Ю. Н., Блошко Н. М. Напряженное состояние упругих цилиндров с выточками. – Киев: Наук. думка, 1987. – 175 с.
11. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение: *Справ. руководство*. – Москва: Физматгиз, 1960. – 293 с.
12. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
Te same: Timoshenko S. P. Course of the theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1970.
Timoshenko S. P. Theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1934. – 452 p.
13. Чекурин В. Ф., Постолак Л. И. Застосування варіаційного методу однорідних розв'язків для визначення осесиметричних залишкових напружень у скінченному циліндрі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2018. – **61**, № 1. – С. 186–196.
Te same: Chekurin V. F., Postolaki L. I. Application of the variational method of homogeneous solutions for the determination of axisymmetric residual stresses in a finite cylinder // *J. Math. Sci.* – 2020. – **249**, No. 3. – P. 539–552.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04957-0>.
14. Чернопиский Д. И. О напряженно-деформированном состоянии толстостенных цилиндрических оболочек, ограниченных гофрированными поверхностями // *Проблемы прочности*. – 2012. – **44**, № 1. – С. 58–74.
Te same: Chernopiskii D. I. On stress-strain state in thick-walled cylindrical shells bounded by corrugated surfaces // *Strength Mater.* – 2012. – **44**, No. 1. – P. 40–52. – <https://doi.org/10.1007/s11223-012-9347-8>.
15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1949. – Т. 3. – 783 с.
16. Tomczyk B., Goląbczak M. Tolerance and asymptotic modelling of dynamic thermoelasticity problems for thin micro-periodic cylindrical shells // *Meccanica*. – 2020. – **55**, No. 12. – P. 2391–2411. – <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01184-4>.

17. Zhang X., He Y., Li Z., Zhai Z., Yan R., Chen X. Static and dynamic analysis of cylindrical shell by different kinds of B-spline wavelet finite elements on the interval // Engineering with Computers. – 2019. – **36**, No. 4. – P. 1903–1914. – <https://doi.org/10.1007/s00366-019-00804-2>.

О РАВНОВЕСИИ НЕТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ВМЯТИНОЙ

На основе линейной трехмерной теории упругости рассматривается задача о равновесии нетонких изотропных цилиндрических оболочек с вмятиной при определенных граничных условиях на торцах. Для описания поперечного сечения поверхности отсчета используется уравнение улитки Паскаля в полярных координатах. Трехмерная краевая задача методом разделения переменных с использованием аппроксимации функций дискретными рядами Фурье сводится к одномерной, которая решена устойчивым численным методом дискретной ортогонализации. Проведена оценка точности получаемых результатов. Приведены результаты решения задач в виде графиков и таблиц.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, нетонкие цилиндрические оболочки с вмятиной, уравнение улитки Паскаля, дискретные ряды Фурье, метод дискретной ортогонализации.

ON THE EQUILIBRIUM OF NON-THIN CYLINDRICAL SHELLS WITH A DENT

On the basis of the linear three-dimensional theory of elasticity, the problem of equilibrium of non-thin isotropic cylindrical shells with a dent under certain boundary conditions at the ends is considered. To describe the cross section of the reference surface, the limaçon of Pascal equation in polar coordinates is used. By the method of separation of variables using the approximation of functions by discrete Fourier series, the three-dimensional boundary value problem is reduced to a one-dimensional one, which is solved by a stable numerical method of discrete orthogonalization. The accuracy of the results obtained is estimated. The results of solving problems are presented in the form of graphs and tables.

Key words: stress-strain state, non-thin cylindrical shells with a dent, the limaçon of Pascal equation, discrete Fourier series, discrete orthogonalization method.

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ,

² Нац. транспортний ун-т, Київ