

ПЛОСКІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОЇ ОСНОВИ З ДВОМА КОЕФІЦІЄНТАМИ ПОСТЕЛІ

Досліджено контактну взаємодію штампів різної форми з пружною основою, за модель якої використано пружний шар з двома коефіцієнтами постелі. Використання такої моделі дає змогу визначати не лише напружений стан, але і переміщення штампів та пружної основи. Виконано числовий аналіз та порівняння результатів для різних моделей пружної основи та різних форм штампів.

Ключові слова: плоскі контактні задачі, модель пружної основи з двома коефіцієнтами постелі, інтегральні рівняння Фредгольма першого роду, контактний тиск, жорсткий штамп, переміщення штампів.

Вступ. При формулюванні плоских контактних задач пружну основу часто моделюють півплощиною або основою Вінклера [3, 5, 6]. Перша модель адекватно описує напружений стан основи, однак її використання пов'язане з обчислювальними складнощами, зокрема, при реалізації методу розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь, методу Вінера – Гопфа, методу обчислення еліптичних інтегралів третього роду і т. п. [7, 8]. Однак основним недоліком цієї моделі є відсутність можливості розраховувати переміщення у пружній основі. Натомість модель Вінклера є простою у використанні, але недостатньо адекватно описує напружений стан основи, що виявляється у відсутності передачі дії штампів у напрямку, паралельному до межі [4, 9].

У цій роботі для розв'язування плоских контактних задач запропоновано модель пружної основи з двома коефіцієнтами постелі [2]. Така модель дає змогу усунути недоліки обох попередніх підходів. Контактну задачу про гладку взаємодію жорстких штампів з пружною основою зведено до розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду [1]. Знайдено аналітичні розв'язки для штампів з параболічною, клиновидною та плоскою формою основи та виконано числовий аналіз напружено-деформованого стану основи.

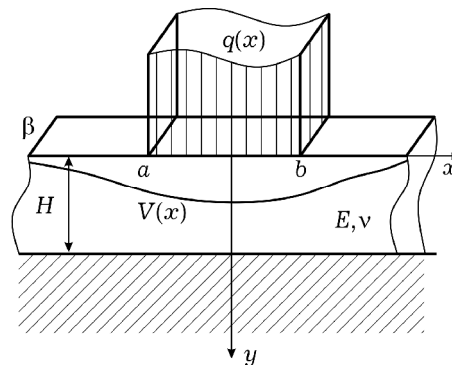


Рис. 1

1. Математична модель пружної основи з двома коефіцієнтами постелі. Розглядаємо плоску задачу про деформацію пружного шару товщини H , що лежить без проковзування на жорсткій основі (рис. 1), яка працює лише у вертикальному напрямку [2]:

$$u(x, y) = 0, \quad v(x, y) = V(x)\psi(y). \quad (1)$$

Тоді нормальні та зсувні деформації мають вигляд

$$\varepsilon_{yy} = V(x)\psi'(y), \quad \varepsilon_{xx} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = V'(x)\psi(y),$$

а відповідні компоненти тензора напружень –

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} V(x)\psi'(y), \quad \sigma_{xx} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} V(x)\psi'(y),$$

✉ sachykyra@gmail.com

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} V'(x) \psi(y).$$

Тут E – модуль Юнга матеріалу шару, ν – його коефіцієнт Пуассона, а штрихом позначено похідну функції однієї змінної.

Підставивши (1) у рівняння рівноваги плоскої задачі теорії пружності [2] для випадку лінійної зміни переміщень за товщиною основи

$$\psi(y) = \frac{H-y}{H}$$

та виконавши їх усереднення, отримуємо диференціальне рівняння для визначення складової переміщень $V(x)$:

$$2tV''(x) - kV(x) + q(x) = 0, \quad (2)$$

де $t = E\beta H / (12(1+\nu))$, $k = E\beta / (H(1-\nu^2))$, а доданок $2tV''(x)$ на відміну від моделі Вінклера враховує дотичні напруження у пружній основі. Таким чином, вибрана модель враховує розподіл навантаження по всій основі.

Розв'язок рівняння (2) знаходимо за граничних умов для зусиль $T(x) = 0$ (рис. 1) та перерізуючої сили

$$S(x) = \int_F \tau_{xy} \psi(y) dF = 2tV'(x),$$

де $dF = \beta dy$.

Щоб використати розв'язок рівняння (2) для контактних задач, визначимо функцію Гріна для цього рівняння за дії на пружну основу зосередженої сили $P\delta(x)$. Тоді розв'язок рівняння (2) при $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0$ та

$S(0) = -P/2$ має вигляд

$$V(x) = CPe^{-\alpha x}, \quad (3)$$

де $\alpha = \sqrt{k/(2t)} = \sqrt{6/(1-\nu)} / H$, $C = \sqrt{3(1+\nu)(1-\nu^2)}/2 / (E\beta)$.

З використанням (3) запишемо розв'язок для довільного навантаження $q(\xi)$, де ξ – відстань від початку координат (рис. 1) [3]:

$$V(x) = C \int_a^b q(\xi) \begin{cases} e^{\alpha(x-\xi)}, & x \notin [a, b], \\ e^{-\alpha|x-\xi|}, & x \in [a, b]; \end{cases} d\xi. \quad (4)$$

2. Розв'язки контактних задач. Розв'язок (4) дозволяє записати інтегральне рівняння контактної задачі для довільної форми основи штампа. Розглянемо деякі важливі випадки.

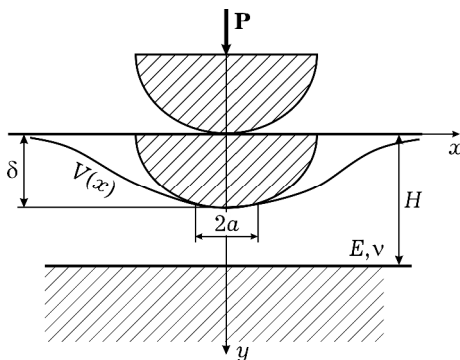


Рис. 2

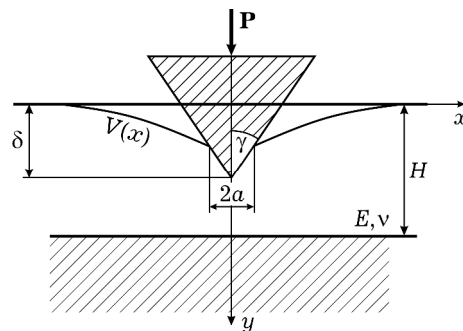


Рис. 3

2.1. Штамп з параболічною формою основи. Нехай у пружний шар з двома коефіцієнтами постелі, який лежить на пружній основі без проковзування, силою P втискується жорсткий штамп параболічної форми

(рис. 2). Нехай $2a$ – ширина зони прогину в області контакту. Тоді з (4) отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду для визначення контактної тиску $p(x)$ [3, 5]:

$$\delta - f(x) = V(x) = C \int_{-a}^a p(\xi) e^{-\alpha|x-\xi|} d\xi, \quad x \in [-a, a]. \quad (5)$$

Тут δ – невідома осадка штампа як жорсткого тіла, $f(x)$ – форма профілю штампа, яка для розглянутого випадку має вигляд $f(x) = x^2/(2R)$, де R – радіус кривини штампа в точці $x = 0$.

Для визначення області контакту використаємо умову рівноваги

$$P = \int_{-a}^a p(x) dx, \quad (6)$$

а розв'язок інтегрального рівняння (5) шукаємо у вигляді:

$$p(x) = A + B \frac{x^2}{2}. \quad (7)$$

Підставивши (7) у (5), отримаємо рівність

$$\delta - \frac{x^2}{2R} = C \left(\frac{A}{\alpha} (2 - \psi(x, a)) + \frac{B}{\alpha} \left(x^2 + \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) \psi(x, a) \right) \right), \quad (8)$$

де $\psi(x, a) = e^{-\alpha(a+x)} + e^{-\alpha(a-x)}$.

Прирівнявши коефіцієнти в (8), отримаємо систему трьох рівнянь для визначення A , B і δ , а з умови (6) – формулу для визначення області контакту:

$$P = \frac{\alpha}{RC} \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{\alpha} + \frac{a}{\alpha^2} \right). \quad (9)$$

Остаточно визначимо контактний тиск (7) у вигляді

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\alpha}{2RC} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{x^2}{2} \right) = \\ &= \frac{P}{2a} \left(1 - \frac{x^2}{2 \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right)} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Прогин поверхні пружного шару при $y = 0$ згідно з (4) визначається формулою

$$V(x) = \frac{a}{\alpha R} \begin{cases} e^{\alpha(x+a)}, & x < -a, \\ \frac{a^2 - x^2}{2a} \alpha + 1, & x \in [-a, a], \\ e^{-\alpha(x-a)}, & x > a, \end{cases} \quad (11)$$

а осадка штампа –

$$\delta = \frac{a}{R} \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{\alpha} \right). \quad (12)$$

Формули (9)–(12) повністю описують розв'язок задачі про втискання штампа з параболічною основою у пружну підкладку.

2.2. Штамп із плоскою основою ширини $2a$. У цьому простому випадку слід покласти $f(x) = 0$ в рівнянні (5), яке тоді набуде вигляду

$$\delta = C \int_{-a}^a p(\xi) e^{-\alpha|x-\xi|} d\xi.$$

Контактний тиск розрахуємо за формулою

$$p(x) = \frac{P\alpha}{2(a\alpha + 1)} \left(1 + \frac{1}{\alpha} (\delta^*(x+a) + \delta^*(x-a)) \right),$$

де $\delta^*(x)$ – дельта-функція Дірака, осадка штампа визначається як

$$\delta = \frac{CP}{1 + a\alpha},$$

а прогин поверхні основи має вигляд

$$V(x) = \frac{CP}{1 + 2a\alpha} \begin{cases} e^{\alpha(x+a)}, & x < -a, \\ 1, & x \in [-a, a], \\ e^{-\alpha(x-a)}, & x > a. \end{cases}$$

2.3. Штамп із клиновидною основою. На рис. 3 наведено схему контактної взаємодії для штампа з основою у вигляді клина. У цьому випадку інтегральне рівняння (5) має вигляд

$$\delta - |x| \operatorname{ctg} \gamma = C \int_{-a}^a p(\xi) e^{-\alpha|x-\xi|} d\xi,$$

розв'язок якого будемо у формі

$$p(x) = A + B|x| + D\delta^*(x).$$

Використавши значення інтеграла

$$\int_{-a}^a p(\xi) e^{-\alpha|x-\xi|} d\xi = \frac{2A}{\alpha} (1 - e^{-\alpha a} \operatorname{ch} \alpha x) + \frac{2B}{\alpha^2} (\alpha|x| + e^{-\alpha(|x|+a)} \operatorname{ch} \alpha x)$$

і порівнявши вільні члени та коефіцієнти при $|x|$, $e^{-\alpha a} \operatorname{ch} \alpha x$, $e^{-\alpha|x|}$, отримуємо значення параметрів A , B , D та осадки штампа δ . Для визначення ширини зони контакту використаємо умову (6), яка для цього випадку набуває вигляду

$$P = \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{2C} \left(2a - a^2\alpha + \frac{2}{\alpha} \right).$$

Таким чином, знаходимо контактний тиск

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{2C} \left(1 - \alpha|x| + \frac{2}{\alpha} \delta^*(x) \right) = \\ &= \frac{P}{2a - a^2\alpha + \frac{2}{\alpha}} \left(1 - \alpha|x| + \frac{2}{\alpha} \delta^*(x) \right), \end{aligned}$$

осадку штампа як жорсткого тіла

$$P = \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{2C} \left(2a - a^2\alpha + \frac{2}{\alpha} \right)$$

та переміщення поверхні пружного шару

$$V(x) = \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\alpha} \begin{cases} e^{\alpha(x+a)}, & x < -a, \\ \alpha(a - |x|) + 1, & |x| < a, \\ e^{-\alpha(x-a)}, & x > a. \end{cases}$$

3. Числові розрахунки. Надалі використаємо безрозмірні величини $\bar{a} = a/R$, $\bar{x} = x/R$, $\bar{H} = H/R$, $\bar{p}(x) = p(x)/E$, $\bar{P} = P/(ER)$ та опустимо риски для простоти запису. Використаємо наступні значення: $\nu = 0.3$, $\beta = 1$.

На рис. 4 наведено розподіли контактних тисків для штампів з параболічною та клиновидною основами при фіксованій області контакту $a = 0.2$, а на рис. 5 – залежності ширини області контакту від прикладеної до штамп сили. Тут криві 1 відповідають штампу параболічної форми для основи, що є пружним півпростором, при $P = 0.0314$, криві 2 – штампу тієї ж форми для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі при $H = 0.42$, $P = 0.0655$; криві 3 відповідають штампу клиновидної форми для пружної основи з двома коефіцієнтами при $H = 1$, $\gamma = 60^\circ$, $P = 0.0684$; криві 4 – штампу параболічної форми для пружної основи з двома коефіцієнтами при $H = 0.63$, $P = 0.0716$.

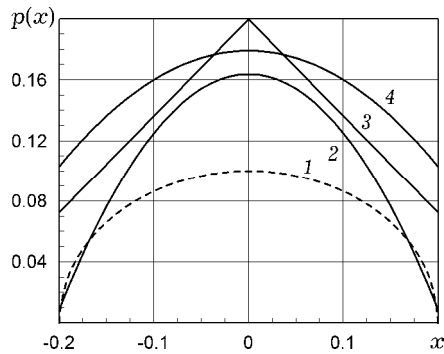


Рис. 4

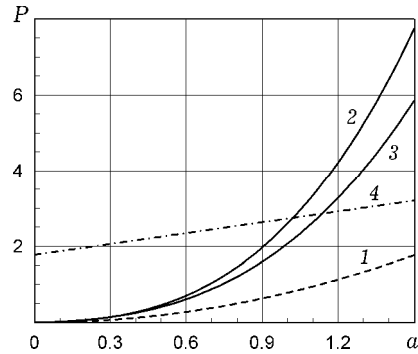


Рис. 5

На рис. 6 наведено розподіли осадки штамп з параболічною формою основи при контактній взаємодії з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі, а на рис. 7 – прогин поверхні пружного шару для цього випадку при $y = 0$, $a = 0.2$, де криві 1 відповідають випадку $H_1 = 0.42$, криві 2 – $H_2 = 0.63$, криві 3 – $H_3 = 0.84$.

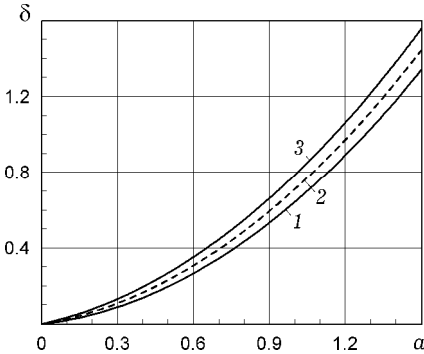


Рис. 6

На рис. 8 наведено графіки залежності прогину поверхні пружного шару при $y = 0$ за контактної взаємодії штамп клиновидної форми з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі при $a = 0.2$, $H = 1.3$. Тут крива 1 відповідає значенню $\gamma = 30^\circ$, крива 2 – $\gamma = 45^\circ$, а крива 3 – $\gamma = 60^\circ$.

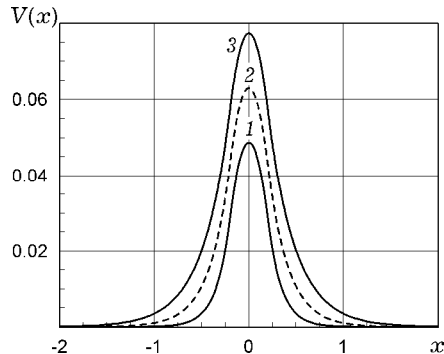


Рис. 7

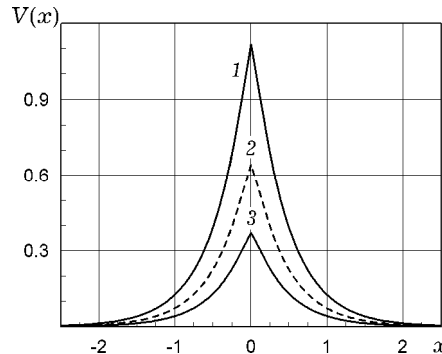


Рис. 8

4. Висновки. Математична модель пружної основи з двома коефіцієнтами постелі дає змогу звести контактні задачі до розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, особливості яких дозволяють отримати аналітичний розв'язок для штампів параболічної, клиновидної та плоскої форм. Проведено порівняльний аналіз результатів для запропонованої основи та для пружної півплощини (рис. 4, рис. 5). Варто відзначити, наведені на рис. 6, рис. 7 результати розрахунків переміщення штампів і поверхні основи, яких неможливо досягти за використання моделі пружної півплощини.

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544с.
2. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – Москва: Физматгиз, 1960. – 491 с.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
Te same: Johnson K. L. Contact mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – xii+452 p.
4. Курбацкий Е. Н., Минь М. Д. Расчет фундаментов зданий и сооружений с двумя упругими характеристиками основания с использованием свойств изображений Фурье финитных функций // Вестник МГСУ. – 2014. – № 1. – С. 41–51.
5. Максимук О. В., Махніцький Р. М., Щербина Н. М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2005. – 396 с.
6. Острик В. І. Контактна механіка. – Київ: Київ. ун-т, 2015. – 560 с.
7. Сачук Ю. В., Максимук О. В. Аналіз напружено-деформованого стану у тілі під дією різних за формою жорстких штампів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 4. – С. 162–167.
Te same: Sachuk Yu. V., Maksymuk O. V. Analysis of the stress-strain state of a body under the action of rigid punches of different shapes // J. Math. Sci. – 2017. – 220, No. 2. – P. 204–212. – <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3177-3>.
8. Сачук Ю., Максимук О. Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – Вип. 20. – С. 180–187.
9. Balabušić M., Folić B., Ćorić S. Bending the foundation beam on elastic base by two reaction coefficient of Winkler's subgrade // Open J. Civil Eng. – 2019. – 9, No. 2. – P. 123-134. – <https://doi.org/10.4236/ojce.2019.92009>.

PLANE CONTACT PROBLEMS FOR AN ELASTIC FOUNDATION WITH TWO BEDDING COEFFICIENTS

The contact interaction between the punches of different shapes with an elastic foundation is analyzed for the case when the foundation is modeled as an elastic layer with two bedding coefficients. The use of this model allows for the determination of the stress state and displacements of both the punch and the elastic foundation. The numeric analysis is performed and the results for different models of elastic foundations and shapes of the punches are compared.

Keywords: plane contact problems, model of elastic foundation with two bedding coefficients, Fredholm integral equations of the first kind, contact pressure, rigid punch, punch settlement of indenter.

¹ Львівський нац. ун-т. ім. І. Франка, Львів

² Волинський нац. ун-т. ім. Л. Українки, Луцьк