

КОЛИВАННЯ СПРЯЖЕНИХ ОБОЛОНКОВИХ СИСТЕМ У ПОЛІ КОМБІНОВАНИХ СТАТИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Запропоновано математичну модель коливань пружних систем зі спряжених оболонок обертання різної геометрії, що знаходяться в полі комбінованих статичних осесиметричних навантажень. Модель базується на положеннях геометрично нелінійної теорії середнього згину в межах класичної теорії Кірхгофа – Лява і реалізована з використанням сучасних методів прикладної математики та чисельного аналізу. Побудовано спектральний портрет оболонок конструкції з елементами додатної, нульової і від’ємної гауссової кривини, який дозволяє відстежити резонансні ситуації при динамічних навантаженнях і визначити небезпечні комбінації статичних навантажень при оцінці стійкості її рівноважних станів.

Ключові слова: спряжені оболонкові системи, комбіновані статичні навантаження, коливання, математична модель, чисельно-аналітична методика, аналіз.

Дослідження спектральних характеристик оболонок конструкцій у полі статичних навантажень, як один з важливих аспектів оцінки їхньої міцності та надійності, інтенсивно розвиваються з другої половини минулого століття, що частково відображено в ряді оглядових публікацій [8, 20, 24, 25, 34] і бібліографічних джерел статей, що цитуються.

У переважній більшості робіт з цього напрямку розглядається дія статичних навантажень тільки одного виду, причому на оболонки простих геометричних форм: пластин, циліндрів, конусів, сферичних сегментів, пологих панелей тощо. Розширення області досліджень для таких об’єктів пов’язано з необхідністю урахування цілого ряду ускладнюючих факторів: властивостей матеріалу (ортотропія, анізотропія з низьким порядком симетрії пружних характеристик), структури за товщиною (неперервна та дискретна неоднорідність), граничних умов, наявності підкріплюючих елементів (ребра жорсткості, накладки, бандажі), пружної основи і т. п. Наприклад, при аналізі динамічних характеристик таких оболонок досліджено вплив таких навантажень:

– нормального тиску (зовнішнього, внутрішнього) для ізотропних [13] і ортотропних циліндричних оболонок із функціонально-градієнтних матеріалів [29], циліндрів, що транспортують рідину [33], ребристих панелей при шарнірному опиранні контуру [19];

– осевих стискуючих (розтягуючих) зусиль у циліндричних оболонках різної товщини [32] і зсувних початкових напружень у площині прямокутних ортотропних графенових пластин [14];

– центробіжних і коріолісових сил при обертанні шаруватих конічних оболонок [15, 17, 28] і тонкостінних циліндрів з ребрами жорсткості для різних варіантів закріплення торців [30];

– сейсмічних навантажень для великих покрівель у вигляді незамкнених циліндричних оболонок та оболонок двоякої кривини [12], вертикальних циліндричних резервуарів для зберігання рідини [23];

– електричних полів для систем із подвійних п’єзоелектричних нанопластин з різними граничними умовами [9], температурних напружень для ортотропних циліндричних оболонок [8].

На сьогодні акцент досліджень зміщується на спряжені оболонкові системи складної конфігурації і врахування сумісної дії різних навантажень, що значною мірою зумовлюється потребами розрахункової практики. Так,

✉nataliya.petrivna@ukr.net

зокрема, пружними системами, складеними з оболонок обертання різної геометрії і структури, моделюється багато конструкцій сучасної техніки: агрегати ракетно-космічної галузі, апарати підводного занурення, захисні покриття ядерних реакторів тощо. Експлуатаційні навантаження на ці об'єкти у вигляді статичних полів різного типу вносять свої корективи в зміну їхнього частотного спектра, нехтування якими може згубно позначитись на функціональній придатності кожної конкретної конструкції в умовах динамічних навантажень.

У сучасній науковій літературі ця тематика представлена роботами з коливань спряжених оболонок обертання без урахування статичних навантажень (вільні коливання [2, 10, 18, 26, 32]), з урахуванням тільки одного виду навантаження [1, 11], а у випадку комбінації різних фізико-механічних полів такі дослідження проведено переважно для оболонок простої форми [16, 17, 22, 27, 33]. Натомість роботи про вплив комбінованих навантажень на коливання складних пружних систем практично відсутні.

Для опису розглядуваних стаціонарних процесів залучено ряд теорій деформування різної строгості, огляд яких для шаруватих пластин і циліндрів наведено в [20]. У цитованих тут роботах використовувалися, зокрема, класична модель, оболонкові зсувні моделі першого і вищих порядків [3, 13, 16, 22, 27–31, 33], уточнена модель з урахуванням поперечних зсувів та обтиснення [11], просторова постановка теорії пружності [18, 19].

Математичний апарат для розв'язування відповідних нелінійних крайових задач і задач на власні значення базується на застосуванні сучасних розробок прикладної математики та чисельного аналізу. Більшість досліджень проведено на основі різних модифікацій методу скінченних елементів [16, 19, 27, 32, 33], традиційних методів Гальоркіна і Рітца [28, 18, 30], методу диференціальних квадратур (звичайного і узагальненого) [9, 17, 22], спектрального методу Фур'є [31]. Подальшого розвитку набули чисельно-аналітичні підходи, орієнтовані на раціональне поєднання аналітичних перетворень для декомпозиції вихідної задачі на більш прості і їх чисельне розв'язання (див., наприклад, [4–6]).

Ця стаття є продовженням і розширенням досліджень [1] і присвячена аналізу впливу комбінованих статичних навантажень на нижчі частоти коливань спряжених пружних систем із оболонок обертання різної геометрії і структури. Дослідження проводяться на основі чисельно-аналітичного підходу, розробленого в [2–4] і адаптованого на випадок сумісної дії різних навантажень.

1. Постановка задачі і коротка характеристика методик її розв'язання. В статті [1] було проведено дослідження впливу статичних навантажень одного виду на коливання спряжених оболонкових систем. У цій роботі аналізується ефект сумісної дії різних видів навантаження на частотний спектр для такого самого класу геометричних об'єктів. Розглядаються, зокрема, пружні системи з оболонок обертання різної кривини і структури, вихідна поверхня відліку яких за товщиною утворена обертанням деякої плоскої однозначної кусково-гладкої кривої навколо горизонтальної осі Oz і віднесена до ортогональної криволінійної системи координат α , θ , де α – координата, що змінюється за твірною-меридіаном, а θ – центральний кут у площині поперечного перерізу $z = \text{const}$. При цьому твірна окремої j -ї оболонки може бути описана в локальній системі координат $\alpha_j \in [\alpha_{0j}, \alpha_{1j}]$, $j = 1, \dots, J$, де J – кількість елементів оболонкової системи (див., наприклад, рис. 2). Лінії $\alpha = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ є лініями головних кривин вихідної поверхні, а гауссові кривини $K_j = k_{\alpha_j} k_{\theta_j}$ складових оболонкової системи можуть бути додатними, від'ємними або знакозмінними (тут k_{α_j} , k_{θ_j} – головні кривини j -ї оболонки або j -го елемента спряженої системи).

Жорсткісні характеристики оболонок змінюються за товщиною за змінною γ , що відраховується по нормалі до вихідної поверхні. Відносно цієї змінної вони можуть бути сталими (однорідні оболонки), неперервно змінними (функціонально-градієнтні матеріали) або дискретно змінними (багатошарові структури). На торцях пружної системи $\alpha = \alpha_{01}$ і $\alpha = \alpha_{1J}$ допускаються будь-які фізично несуперечливі граничні умови.

Описана оболонкова система може перебувати під дією таких консервативних статичних осесиметричних полів: температурне нагрівання, розподілені навантаження, зусилля-моменти, зосереджені на лініях спряження оболонок і/або на торцевих контурах системи. На відміну від [1], де дослідження проводилось при навантаженнях одного виду, тут увагу сконцентруємо на взаємодії декількох різних видів навантажень.

Дослідження коливань спряжених оболонкових систем при комбінації різних статичних полів проводимо, як і в [1], при таких вихідних припущеннях:

- за основний приймаємо напружено-деформований стан (НДС) оболонкової системи, зумовлений дією декількох різних осесиметричних статичних навантажень, кожне з яких відповідає докритичній стадії деформування, аж до її граничних значень;
- коливання системи розглядаємо як малі незгасальні збурення її основного стану;
- при всіх видах і величинах діючих навантажень матеріал оболонок є ортотропним (ізотропним), лінійно-пружним і відповідає узагальненому закону Гука;
- на лініях спряження сусідніх оболонок приймаємо умови рівності кінематичних характеристик і умови рівноваги статичних характеристик НДС у спільній системі координат rOz ;
- у випадку багатошарових оболонок (дискретна неоднорідність за товщиною) приймаємо, що контакт між шарами здійснюється без відриву та проковзування;
- математичну модель дослідження будуємо на основі геометрично нелінійної теорії середнього згину в межах припущень класичної теорії Кірхгофа – Лява для всього пакету шарів в цілому і з урахуванням температурних навантажень за гіпотезою Дюгамеля – Неймана та інерційних сил за принципом Д'Аламбера.

На основі прийнятих припущень загальну структуру вихідної нелінійної двовимірної задачі про коливання оболонкових систем при статичних навантаженнях можна подати в такому матрично-векторному вигляді [1, 4]:

– система нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними, яка включає лінійну $L\bar{N}$ і нелінійну \bar{G} частини, розподілені силові (температурні) навантаження \bar{q}^0 та інерційні сили $C \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial t^2}$:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \alpha} = L\bar{N} + \bar{G} + \bar{q}^0 + C \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial t^2}, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\},$$

$$j = 1, \dots, J, \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad (1)$$

– умови спряження на лініях контакту, що включають матриці переходу S_{1j} , S_{0j+1} до змінених геометричних і жорсткісних характеристик оболонок і задані зосереджені зусилля-моменти \bar{F}_j^0 :

$$S_{1j}\bar{N} = S_{0j+1}\bar{N} + \bar{F}_j^0, \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1}, \quad j = 1, \dots, J - 1; \quad (2)$$

– граничні умови (однорідні ($\bar{b}_{01}^0 = 0$, $\bar{b}_{1J}^0 = 0$), неоднорідні ($\bar{b}_{01}^0 \neq 0$, $\bar{b}_{1J}^0 \neq 0$)), що відображають зв'язок статичних і кінематичних факторів НДС і їх комбінацій на торцях оболонкової системи:

$$B_{01}\bar{N} = \bar{b}_{01}^0, \quad \alpha = \alpha_{01}, \quad (3)$$

$$B_{1J}\bar{N} = \bar{b}_{1J}^0, \quad \alpha = \alpha_{1J}; \quad (4)$$

– умови періодичності в коловому напрямку:

$$\bar{N}(\alpha, \theta + 2\pi, t) = \bar{N}(\alpha, \theta, t). \quad (5)$$

Задачу формулюємо відносно вектор-функції $\bar{N} = \{N_n(\alpha, \theta, t), n = 1, \dots, 8\}$ з такими характеристиками НДС:

$$\bar{N} = \{N_n(\alpha, \theta, t)\} = \{N_\alpha, \hat{S}_\alpha, \hat{Q}_\alpha, M_\alpha, u, v, w, \vartheta_\alpha\},$$

де N_α , $\hat{S}_\alpha = N_{\alpha\theta} + k_\theta H$, $\hat{Q}_\alpha = Q_\alpha + \frac{\partial H}{r\partial\theta}$ – відповідно тангенціальне, зведені зсувне та перерізує зусилля; M_α і ϑ_α – згинний момент і кут повороту нормального елемента в перерізі $\alpha = \text{const}$; u , v , w – переміщення точок координатної поверхні за напрямками α , θ , γ відповідно; $N_{\alpha\theta}$, Q_α , H – зсувне і перерізує зусилля і крутний момент у цьому ж перерізі; $r = r(\alpha)$ – відстань поточної точки координатної поверхні до осі обертання Oz .

В (1)–(5) прийнято такі позначення: $L = \sum_{s=0}^4 R_s \frac{\partial^s \bar{N}}{\partial \theta^s}$ – матричний диференціальний оператор четвертого порядку за змінною θ , побудований за основними співвідношеннями прийнятої моделі деформування; A – коефіцієнт Ляме за координатою α ; компонентами вектора $\bar{G} = \{g_n(\alpha)\}$ є квадратичні функції від компонент вектора \bar{N} , що відповідають геометрично нелінійній теорії оболонок середнього згину; C – матриця, яка характеризує інерційні властивості системи; $B_{01} = \{b_{ni}^{01}\}$, $B_{1J} = \{b_{ni}^{1J}\}$ – відповідно матриці граничних умов на контурах $\alpha = \alpha_{01}$ і $\alpha = \alpha_{1J}$. Вирази для елементів матриць $R_s = \{r_{ni}^s(\alpha)\}$ і компонент вектора $\bar{G} = \{g_n(\alpha)\}$ наведено в [4].

Загальну схему розв'язування задачі (1)–(5) подамо як послідовність виконання таких процедур.

1°. Декомпозиція шуканого стану оболонок (вектор \bar{N}) на основний статичний (вектор \bar{N}^0) і динамічний (вектор \bar{N}^d) стани з огляду на припущення про малість розглядуваних коливань:

$$\bar{N} \approx \bar{N}^0 + \bar{N}^d, \quad \bar{N}^d \ll \bar{N}^0. \quad (6)$$

2°. Відповідно до подання (6), декомпозиція нелінійної задачі (1)–(5) на дві взаємозв'язані задачі:

- (i) задача про основний попередньо напружений стан при заданих статичних осесиметричних навантаженнях, яка є одновимірною нелінійною задачею і формулюється відносно вектор-функції $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha)\}$:

$$\frac{d\bar{N}^0}{d\alpha} = L^0 \bar{N}^0 + \bar{G}(\alpha, \bar{N}^0, \dots) + \bar{q}^0, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (7)$$

$$S_{1j} \bar{N}^0 = S_{0j+1} \bar{N}^0 + \bar{F}_j^0, \quad \alpha = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, J-1, \quad (8)$$

$$B_{01} \bar{N}^0 = \bar{b}_{01}^0, \quad \alpha = \alpha_{01}, \quad (9)$$

$$B_{1J} \bar{N}^0 = \bar{b}_{1J}^0, \quad \alpha = \alpha_{1J}. \quad (10)$$

(Тут L^0 – матричний диференціальний оператор нульового порядку);

(ii) задача про малі гармонічні коливання оболонки відносно основного стану, одержана в результаті лінеаризації вихідної задачі (1)–(5) відносно вектор-функції $\bar{N}^d = \{N_n^d(\alpha, \theta, t)\}$ і є двовимірною лінійною однорідною крайовою задачею:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \bar{N}^d}{\partial \alpha} = \tilde{L} \bar{N}^d + C \frac{\partial^2 \bar{N}^d}{\partial t^2}, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\},$$

$$j = 1, \dots, J, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (11)$$

$$S_{1j} \bar{N}^d = S_{0j+1} \bar{N}^d, \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1}, \quad j = 1, \dots, J-1, \quad (12)$$

$$B_{01} \bar{N}^d = 0, \quad \alpha = \alpha_{01}, \quad (13)$$

$$B_{1J} \bar{N}^d = 0, \quad \alpha = \alpha_{1J}, \quad (14)$$

$$\bar{N}^d(\alpha, \theta + 2\pi, t) = \bar{N}^d(\alpha, \theta, t). \quad (15)$$

(Тут $\tilde{L} = L + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{N}^0}$ – диференціальний матричний оператор, що містить як

параметричні члени компоненти НДС основного стану $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha)\}$).

3°. Розв’язання одновимірної нелінійної крайової задачі (7)–(10) із застосуванням процедури лінеаризації у формі Ньютона – Канторовича – Рафсона (метод квазілінеаризації) у поєднанні з методом ортогональної прогонки (див. [3, 4]).

4°. Зведення двовимірної крайової задачі (11)–(15) після відокремлення часового множника $e^{i\omega t}$ в компонентах вектора \bar{N}^d і подання їх у вигляді тригонометричних рядів Фур’є за коловою координатою θ :

$$\bar{N}^d = \left\{ N_n^d(\alpha, \theta, t) = \sum_{k=0,1,2,\dots} N_{nk}^d(\alpha) \right\} \begin{bmatrix} \sin k\theta \\ \cos k\theta \end{bmatrix} e^{i\omega t}, \quad n = 1, \dots, 8, \quad (16)$$

до послідовності однопараметричних однорідних крайових задач відносно функціональних коефіцієнтів $\bar{N}_k^d = \{N_{nk}^d(\alpha)\}$ в (16):

$$\frac{d\bar{N}_k^d}{Ad\alpha} = \tilde{L}_k \bar{N}_k^d, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (17)$$

$$S_{1j} \bar{N}_k^d = S_{0j+1} \bar{N}_k^d, \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1}, \quad j = 1, \dots, J-1, \quad (18)$$

$$B_{01} \bar{N}_k^d = 0, \quad \alpha = \alpha_{01}, \quad (19)$$

$$B_{1J} \bar{N}_k^d = 0, \quad \alpha = \alpha_{1J}, \quad (20)$$

де $\tilde{L}_k = \{\tilde{L}_{ij}^k(\alpha, k, \bar{N}^0, \omega_k)\}$ – матричний алгебраїчний оператор, одержаний з диференціального оператора \tilde{L} в (11) з урахуванням подання (16).

Оператори цих задач містять невідомий числовий параметр $\lambda_k = \omega_k^2$, де ω_k , N_k^d – шукані власні частоти та форми коливань оболонкової системи, параметр k характеризує форму хвилеутворення в коловому напрямку.

5°. Знаходження числового параметра $\lambda_k = \omega_k^2$ для кожного значення гармоніки k в (16) з умови існування нетривіального розв’язку $\bar{N}_k^d = \{N_{nk}^d(\alpha)\}$

однорідної задачі (17)–(20) із застосуванням методу послідовних наближень у варіанті оберненої ітерації і процедури покрокового пошуку [2, 4].

Таким чином, дослідження динамічних характеристик спряжених оболонкових систем при комбінованих статичних навантаженнях складається з двох головних етапів:

- визначення основного НДС при заданих комбінаціях статичних навантажень;
- розрахунок частотного спектра системи з урахуванням основного НДС.

Цей підхід, який містить повну інформацію як про геометричні і структурні особливості конструкції, так і про вплив діючих полів у їх заданій комбінації, дозволяє побудувати спектральний портрет конструкції в цілому.

Щодо обґрунтування підходу, то окремі його елементи було протестовано в ряді робіт авторів і показали високу точність результатів [1–3]. Тут додатково на прикладі, запозиченому з роботи [27], наведемо порівняння з експериментально одержаними значеннями власних частот і розрахунок нижчої ділянки спектра коливань при внутрішньому/зовнішньому тиску.

Розглянемо кругову циліндричну ізотропну оболонку радіуса $R = 77.25$ мм, довжини $L = 231$ мм, товщини $h = 1.5$ мм з густиною матеріалу $\rho = 7800$ кг/м³, модулем пружності $E = 200$ ГПа, коефіцієнтом Пуассона $\mu = 0.3$. Один торець оболонки жорстко закріплений, а другий торець вільний.

У табл. 1 для різних форм хвилеутворення у коловому напрямку $k = 3, 4, 5$ і однієї півхвилі за твірною $m = 1$ наведено значення безрозмірної власної частоти $f = \omega R(1 - \mu^2)\sqrt{\rho/E}$ [Гц], обчислені з використанням гібридного методу скінченних елементів (ГМСК) в [27], методу скінченних елементів (МСЕ) в [21], запропонованої методики, та експериментально отримані в [21], із зазначенням розбіжності ε , %, з експериментальними даними.

Таблиця 1

k	m	ГМСЕ, [27]		МСЕ, [21]		Запропонована методика		[21]
		$f \cdot 10^{-2}$, Гц	ε , %	$f \cdot 10^{-2}$, Гц	ε , %	$f \cdot 10^{-2}$, Гц	ε , %	$f \cdot 10^{-2}$, Гц
3	1	5.724	2.9	5.721	2.8	5.684	2.2	5.563
4	1	8.560	0.32	8.554	0.25	8.501	-0.38	8.533
5	1	13.373	0.09	13.374	0.10	13.390	0.22	13.361

У розрахунках за всіма методиками, що порівнюються, включно з розробленою, розбіжність з експериментальними результатами зменшується зі збільшенням частоти і для найнижчої з них не перевищує 3%.

Характер частотної залежності $f = f(k)$ [Гц] для цієї ж оболонки з шарнірним опиранням торців наведено на рис. 1 для різних значень нормального внутрішнього і зовнішнього тиску q :

крива 1: $q = 0$; крива 2: $q = 9 \cdot 10^5$ Па;

крива 3: $q = -9 \cdot 10^5$ Па; крива 4: $q = 9 \cdot 10^6$ Па;

крива 5: $q = 18 \cdot 10^6$ Па; крива 6: $q = -3.6 \cdot 10^6$ Па.

Як і очікувалось, збільшення внутрішнього тиску (криві 2, 4, 5) сприяє підвищенню значень власних частот, а збільшення зовнішнього тиску (криві 3, 6) – їх зниженню аж до нуля. Для перших чотирьох кривих точками нанесено значення частот із роботи [27]. Як бачимо на рисунку, вони співпадають з результатами, обчисленими за запропонованою методикою, з точністю до роздільної здатності графіків.

У випадку, коли на торцях оболонки діє осьове стискуjące зусилля $N_z < 0$, нульове значення власної частоти досягається відповідно при

$N_z = -1.68 \cdot 10^6$ Н за результатами роботи [27] і $N_z = -1.67 \cdot 10^6$ Н за розробленою методикою. Згідно з відомим динамічним критерієм стійкості ці значення зусилля приймаємо за критичні.

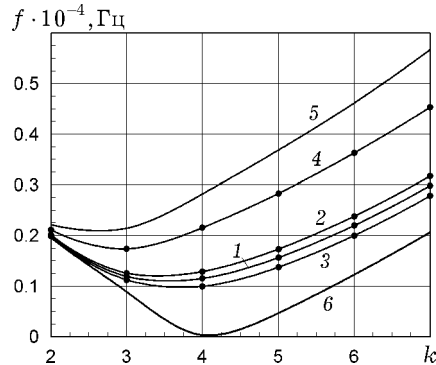


Рис. 1

Наведені дані аналізу коливань оболонок при наявності статичних навантажень разом з результатами робіт [1–3] свідчать про високий ступінь достовірності розробленого підходу.

2. Аналіз частотних характеристик оболонкових систем при комбінованих статичних навантаженнях. Проведемо дослідження залежності нижчих частот коливань спряжених оболонок від їхньої геометричної форми і основного НДС, зумовленого як окремими навантаженнями, так і їхньою сумісною дією.

Результати дослідження наведемо для пружної системи з чотирьох спряжених оболонок обертання: двох циліндрів *cyl1*, *cyl2* з радіусами R_1 , R_2 , довжинами L_1 , L_2 і двох торосферичних оболонок *ts1*, *ts2* з однаковими радіусами r_s , однаковими довжинами $\ell_s = \frac{\pi}{2} r_s$ і однаковими відстанями центрів їхніх кіл r_0 до осі обертання Oz (рис. 2, штриховими нанесено лінії спряження окремих оболонок). Геометрію пружної системи в координатах r , z задаємо в такому параметричному вигляді:

$$\text{cyl1: } \alpha = z, \quad r(z) = R_1, \quad z = z, \quad z \in [0, L_1],$$

$$\text{ts1: } \alpha = \varphi, \quad r(\varphi) = r_0 - r_s \cos(\varphi), \quad z(\varphi) = r_s \sin(\varphi), \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

φ – поточний центральний кут кола в торосфері *ts1*, що змінюється проти годинникової стрілки;

$$\text{ts2: } \alpha = \psi, \quad r(\psi) = r_0 + r_s \sin(\psi), \quad z(\psi) = r_s \cos(\psi), \quad \psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

ψ – поточний центральний кут кола в торосфері *ts2*, що змінюється за годинниковою стрілкою;

$$\text{cyl2: } \alpha = z, \quad r(z) = R_2, \quad z = z, \quad z \in [0, L_2].$$

Отже, в цілому описана система складається з оболонок з різними гауссовими кривина

$$K_j = k_{\alpha_j} k_{\theta_j}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

– нульової (*cyl1*, *cyl2*), від'ємної (*ts1*) і додатної (*ts2*).

Усі складові оболонки мають сталу товщину h та виконані з ізотропного матеріалу майлара з модулем пружності $E = 50285$ Н/см², коефіцієнтом Пуассона $\mu = 0.33$ і густиною ρ_0 . Приймаємо, що обидва торці $z = 0$, $z = L_2$ системи жорстко закріплені.

– для окремого циліндра:

$$1^\circ: \{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0.78, 0.32\},$$

$$2^\circ: \{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0.40, 0.40\},$$

$$3^\circ: \{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0.05, 0.36\},$$

$$4^\circ: \{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0.45, 0.45\}$$

$$(N_z^* = -6.56 \cdot 10^{-3}, \{k, m\} = \{9, 4\}, M_s^* = -1.547 \cdot 10^{-2}, \{k, m\} = \{8, 3\}).$$

Згідно з розробленим підходом, спочатку визначимо основний НДС для наведених варіантів дослідження і випадків комбінованого навантаження.

Для варіанта навантаження III у випадку 1° , коли $\{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, \alpha M_s\} = \{0.96, 0.23\}$, картина НДС у вигляді розподілів прогину і напружень у точках твірної оболонкової системи s представлена на рис. 3 і рис. 4 відповідно. Максимальні значення як прогину, так і напружень зосереджені, природно, в околі прикладених навантажень N_z і M_s , тобто в перерізі $z = z^* = 0.8$ м.

Розподіл прогину w наведено окремо у випадках осьового зусилля N_z , згинного моменту M_s і їхньої сумісної дії $N_z + M_s$ (рис. 3). Як видно на графіках, осьове зусилля N_z і згинний момент M_s по-різному впливають на деформування дотичних елементів ts_2 , $су_2$. При комбінації цих навантажень $N_z + M_s$ домінуюча роль моменту M_s проявляється в безпосередній близькості лінії з'єднання оболонок, а на решті частин домінуючий вплив має осьове зусилля N_z .

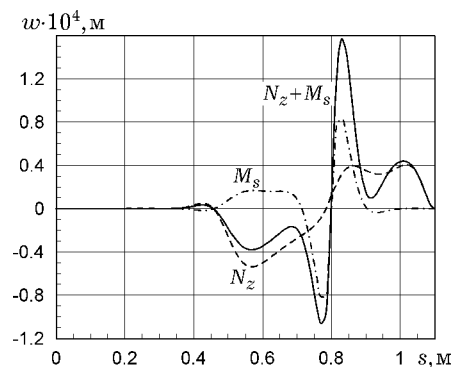


Рис. 3

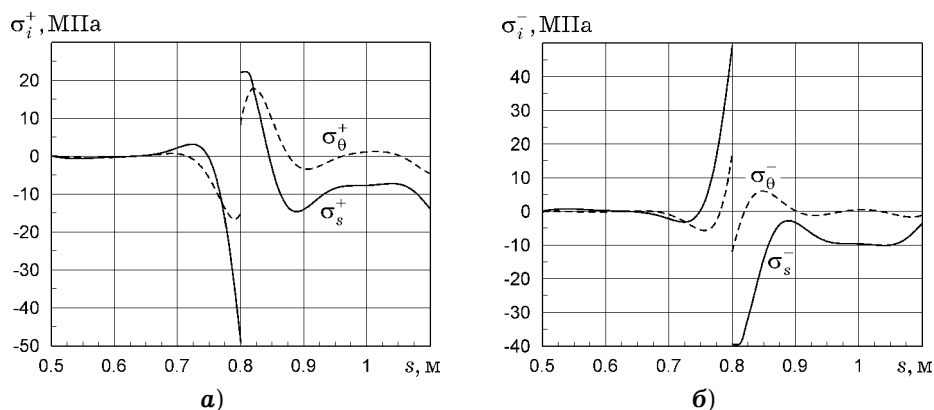


Рис. 4

Картина напруженого стану зображена у вигляді меридіональних і колових напружень σ_s^+ , σ_θ^+ на зовнішній (рис. 4а) і внутрішній σ_s^- , σ_θ^- (рис. 4б) поверхнях елементів ts2 і cy12 ($s \in [0.5, 1.1]$ [м]) при комбінації навантажень $N_z + M_s$, вплив яких позначається тільки на прилеглих елементах системи. Природний стрибок напружень обумовлений прикладеними навантаженнями і більшою мірою проявляється для меридіональних напружень на обох поверхнях оболонки.

Таким чином, основний напружено-деформований стан спряженої системи оболонки за сумісної дії осьового зусилля і згинного моменту, які зосереджені на лінії контакту елементів системи ts2 і cy12, характеризується суттєво нерівномірним розподілом по меридіану-твірній.

Коливання оболонкової системи будемо аналізувати, порівнюючи з коливаннями окремого циліндра, за залежністю $\hat{f} = \hat{f}(k)$, яка представлена у вигляді умовної згладженої кривої дискретного аргументу k . Ця залежність характеризує зміну мінімальної власної частоти ω від параметра хвилеутворення k в коловому напрямку і є традиційною для оболонки обертання. Графіки $\hat{f} = \hat{f}(k)$ для варіантів навантаження I, II, III для спряженої системи представлено на рис. 5а, рис. 5в, рис. 5д (лівий стовпчик рисунків, $\hat{f} = \frac{10^{-4}}{2\pi} \omega \sqrt{\rho_0}$ [Гц]), а для окремого циліндра – на рис. 5б, рис. 5г, рис. 5е (правий стовпчик рисунків, $\hat{f} = \frac{10^{-3}}{2\pi} \omega \sqrt{\rho_{00}/E_0}$ [Гц]).

Особливо наочно вплив власне геометричної форми спряженої системи оболонки на її частотні характеристики проявляється при вільних коливаннях (варіант навантаження I) у порівнянні з відповідними результатами для циліндра (рис. 5а і рис. 5б). У випадку циліндра крива $\hat{f} = \hat{f}(k)$ має звичайний вигляд (рис. 5б) з одним мінімумом $\{k, m\} = \{4, 1\}$, а для оболонкової системи (рис. 5а) ця крива має якісно інший характер і може мати декілька локальних мінімумів, у розглядуваному випадку – два: $\{k, m\} = \{3, 4\}$ і $\{k, m\} = \{11, 5\}$ (k, m – число вузлових діаметрів форми коливань за коловою координатою і число півхвиль за твірною). Ця особливість нижчих частот оболонкових систем різних конфігурацій детально обговорювалась в [10].

Фактор врахування основного НДС оболонки надає залежності $\hat{f} = \hat{f}(k)$ важливу інформаційну роль як у плані можливості відстеження резонансних частот в реальних умовах динамічних навантажень, так і в плані оцінки стійкості їхніх рівноважних станів при заданих значеннях статичних навантажень. Так, якщо для конкретного значення навантаження залежність $\hat{f} = \hat{f}(k)$ при деякому k знаходиться в малому околі нуля, то згідно з динамічним критерієм стійкості ця величина близька до його критичного значення. Така ситуація показана на рис. 5в (оболонкова система) і рис. 5г (окремих циліндр) при дії осьового зусилля $\{N_z, M_s\} = \{\alpha N_z, 0\} = \{1, 0\}$ і згинного моменту $\{N_z, M_s\} = \{0, \alpha M_s\} = \{0, 1\}$. Форма випинання $\{k, m\}$ відповідає при цьому таким параметрам

– при зусиллі N_z :

$$\{k, m\} = \{16, 9\} \text{ (оболонкова система)} \text{ і } \{k, m\} = \{9, 4\} \text{ (циліндр);}$$

– при моменті M_s :

$$\{k, m\} = \{23, 11\} \text{ (оболонкова система)} \text{ і } \{k, m\} = \{8, 4\} \text{ (циліндр).}$$

За характером кривої $\hat{f} = \hat{f}(k)$ можна передбачати стійкість оболонок при сумісній дії навантажень залежно від їхніх конкретних значень. Ці результати для випадків $1^\circ-4^\circ$ комбінації зусилля N_z і моменту M_s наведено на рис. 5д для оболонкової системи і на рис. 5е – для окремого циліндра відповідно. Комбінації навантажень у випадках $1^\circ, 2^\circ$ для системи оболонок і $2^\circ, 3^\circ$ для циліндра не є загрозливими щодо втрати стійкості оболонок (частоти $\hat{f} = \hat{f}(k)$ в усьому діапазоні зміни k є додатними).

Номери кривих 1-4 на рис. 5д і рис. 5е відповідають випадкам $1^\circ-4^\circ$ комбінацій зусиль і моментів.

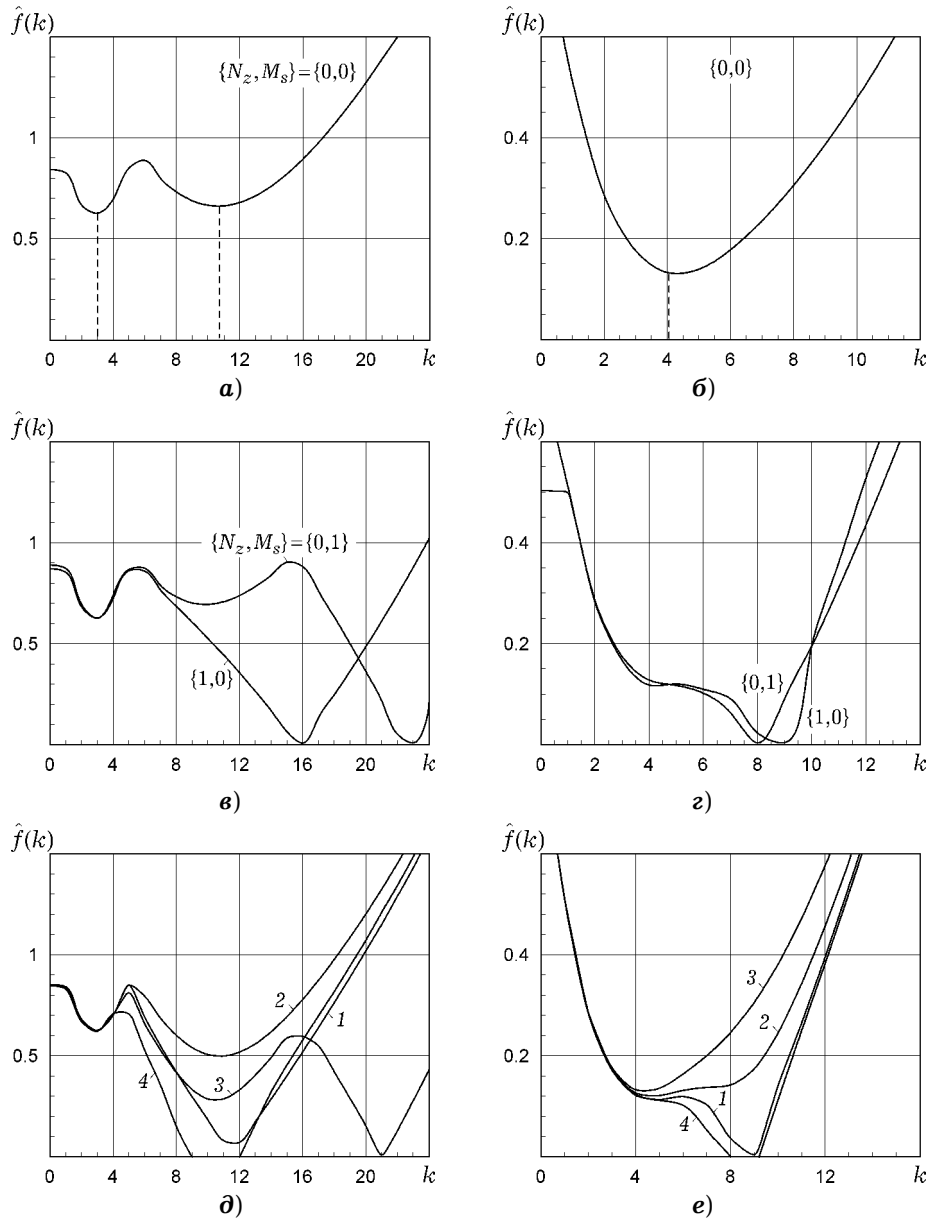


Рис. 5

Взаємодія навантажень у випадку 3° для системи оболонок і 1° для циліндра свідчать про те, що оболонки перебувають на межі між областями

стійкості і нестійкості з формами випинання $\{k, m\} = \{21, 11\}$ (оболонкова система) і $\{k, m\} = \{9, 4\}$ (циліндр). У випадку навантажень 4° рівноважний стан і оболонкової системи, і окремого циліндра є нестійким (існує діапазон значень k , для якого частоти $\hat{f} = \hat{f}(k)$ є від'ємними).

Таким чином, проведений аналіз ілюструє вплив геометрії оболонок, наявності окремих статичних навантажень і ряду їх комбінацій на низько-частотні коливання спряжених оболонкових систем і можливі випадки статичної стійкості їхніх рівноважних станів.

1. Беспалова Е. И., Борейко Н. П. О колебаниях составных оболочечных систем при докритических нагрузках // Прикл. механика. – 2020. – **56**, № 4. – С. 27–37.
Te same: *Bespalova E. I., Boreiko N. P. Vibrations of composed shell systems under subcritical loads // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, No. 4. – P. 415–423. – <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01025-7>.*
2. Беспалова Е. И., Борейко Н. П. Собственные частоты составных анизотропных оболочечных систем на основе разных моделей деформирования // Прикл. механика. – 2019. – **55**, № 1. – С. 44–59.
Te same: *Bespalova E. I., Boreiko N. P. Determination of the natural frequencies of compound anisotropic shell systems using various deformation models // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, No. 1. – P. 41–54. – <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00932-8>.*
3. Беспалова О. И., Яремченко Н. П. Визначення напружено-деформованого стану спряжених гнучких оболонок обертання при докритичних навантаженнях // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2017. – Вип. 4. – С. 29–36.
4. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
5. Григоренко Я. М., Беспалова О. И., Борейко Н. П. Стійкість систем, складених із оболонок обертання змінної гауссової кривини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 1. – С. 127–142.
6. Григоренко Я. М., Григоренко А. Я., Захарийченко Л. И. Анализ влияния геометрических параметров эллиптических цилиндрических оболочек переменной толщины на их напряженно-деформированное состояние // Прикл. механика. – 2018. – **54**, № 2. – С. 42–50.
Te same: *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Zakhariichenko L. I. Analysis of influence of the geometrical parameters of elliptic cylindrical shells with variable thickness on their stress-strain state // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, No. 2. – P. 155–162. – <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0867-1>.*
7. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Аналіз напруженого стану порожнистих циліндрів з угнутих гофрованим поперечним перерізом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 4. – С. 70–77.
Te same: *Grigorenko Y. M., Rozhok L. S. Analysis of the stress state of hollow cylinders with concave corrugated cross sections // J. Math. Sci. – 2018. – 228, No. 1. – P. 80–89. – <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3607-x>.*
8. Карнаушов В. Г., Киричок И. Ф. Вынужденные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов (Обзор) // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 2. – С. 39–63.
Te same: *Karnaukhov V. G., Kirichok I. F. Forced harmonic vibrations and dissipative heating-up of viscoelastic thin-walled elements (Review) // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, No. 2. – P. 174–195. – <https://doi.org/10.1007/BF02681993>.*
9. Asemi S. R., Farajpour A., Asemi H. R., Mohammadi M. Influence of initial stress on the vibration of double-piezoelectric-nanoplate systems with various boundary conditions using DQM // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. – 2014. – **63**. – P. 169–179. – <https://doi.org/10.1016/j.physe.2014.05.009>.
10. *Bespalova E., Urusova G. Vibrations of compound shells of revolution with elliptical toroidal members // Thin-Walled Struct. – 2018. – 123. – P. 185–194. – <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.11.024>.*
11. *Bespalova E., Urusova G. Vibrations of highly inhomogeneous shells of revolution under static loading // J. Mech. Mater. Struct. – 2008. – 3, No. 7. – P. 1299–1313.*

- <https://doi.org/10.2140/jomms.2008.3.1299>.
12. *Dailamani S. O., Croll J. G. A.* Relative importance of horizontal and vertical components of earthquake motion on the responses of barrel vault cylindrical roof shells // Proc. 16th World Conf. on Earthquake Eng. (16WCEE 2017), January 9–13, 2017, Santiago, Chile. – Paper No. 874.
 13. *Fung Y. C., Sechler E. E., Kaplan A.* On the vibration of thin cylindrical shells under internal pressure // J. Aeron. Sci. – 1957. – **24**, No. 9. – P. 650–660. – <https://doi.org/10.2514/8.3934>.
 14. *Goodarzi M., Mohammadi M., Farajpour A., Khooran M.* Investigation of the effect of pre-stressed on vibration frequency of rectangular nanoplate based on a visco-Pasternak foundation // J. Solid Mech. – 2014. – **6**, No. 1. – P. 98–121.
 15. *Han Q., Chu F.* Effect of rotation on frequency characteristics of a truncated circular conical shell // Arch. Appl. Mech. – 2013. – **83**, No. 12. – P. 1789–1800. – <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0778-x>.
 16. *Harbaoui I., Casimir J. B., Khadimallah M. A., Chafra M.* A new prestressed dynamic stiffness element for vibration analysis of thick circular cylindrical shells // Int. J. Mech. Sci. – 2018. – **140**. – P. 37–50. – <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.02.046>.
 17. *Hua L., Lam K. Y.* The generalized differential quadrature method for frequency analysis of a rotating conical shell with initial pressure // Int. J. Num. Methods Eng. – 2000. – **48**, No. 12. – P. 1703–1722.
 18. *Kang J.-H.* Free vibrations of combined hemispherical-cylindrical shells of revolution with a top opening // Int. J. Struct. Stab. Dyn. – 2014. – **14**, No. 1. – Art. 1350023. – <https://doi.org/10.1142/S0219455413500235>.
 19. *Krivenko O. P.* Effect of static loads on the natural vibrations of ribbed shells // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2018. – **101**. – P. 38–44. – <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2018.101.38-44>.
 20. *Kumar P., Srinivasa C. V.* On buckling and free vibration studies of sandwich plates and cylindrical shells: A review // J. Thermoplast. Compos. Mater. – 2020. – **33**, No. 5. – P. 673–724. – <https://doi.org/10.1177/0892705718809810>.
 21. *Mazúch T., Horacek J., Trnka J., Veselý J.* Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement // J. Sound Vib. – 1996. – **193**, No. 3. – P. 669–690. – <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0307>.
 22. *Mohammadimehr M., Moradi M., Loghman A.* Influence of the elastic foundation on the free vibration and buckling of thin-walled piezoelectric-based FGM cylindrical shells under combined loadings // J. Solid Mech. – 2014. – **6**, No. 4. – P. 347–365.
 23. *Nachtigall I., Gebbeken N., Urrutia-Galicia J. L.* On the analysis of vertical circular cylindrical tanks under earthquake excitation at its base // Eng. Struct. – 2003. – **25**, No. 2. – P. 201–213. – [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(02\)00135-9](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(02)00135-9).
 24. *Qatu M. S.* Recent research advances in the dynamic behavior of shells: 1989–2000, Part 1: Laminated composite shells // Appl. Mech. Rev. – 2002. – **55**, No. 4. – P. 325–350. – <https://doi.org/10.1115/1.1483079>.
 25. *Qatu M. S., Asadi E., Wang W.* Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000–2010 // Open J. Compos. Mater. – 2012. – **2**, No. 3. – P. 61–86. – <https://doi.org/10.4236/ojcm.2012.23009>.
 26. *Qu Y., Wu S., Chen Y., Hua H.* Vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells based on a modified variational approach // Int. J. Mech. Sci. – 2013. – **69**. – P. 72–84. – <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.01.026>.
 27. *Sabri F., Lakis A. A.* Hydroelastic vibration of partially liquid-filled circular cylindrical shells under combined internal pressure and axial compression // Proc. 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conf. 4–7 May 2009, Palm Springs, California. – 19 p. – <https://doi.org/10.2514/6.2009-2646>.
 28. *Shekari A., Ghasemi F. A., Malekzadehfard K.* Free damped vibration of rotating truncated conical sandwich shells using an improved high-order theory // Lat. Am. J. Solids Struct. – 2017. – **14**, No. 12. – P. 2291–2323. – <https://doi.org/10.1590/1679-78253977>.
 29. *Sofiyev A. H., Kuruoglu N.* Buckling and vibration of shear deformable functionally graded orthotropic cylindrical shells under external pressures // Thin-Walled Struct. – 2014. – **78**. – P. 121–130. – <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.01.009>.

30. Sun S., Chu S., Cao D. Q. Vibration characteristics of thin rotating cylindrical shells with various boundary conditions // J. Sound Vib. – 2012. – **331**, No. 18. – P. 4170–4186. – <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.04.018>.
31. Su Z., Jin G. Vibration analysis of coupled conical-cylindrical-spherical shells using a Fourier spectral element method // J. Acoust. Soc. Am. – 2016. – **140**, No. 5. – <https://doi.org/10.1121/1.4967853>.
32. Ustundag B. On the free vibration behavior of cylindrical shell structures: B. S., Mechanical Engineering, Turkish Naval Academy. – 2006. – 106 p.
33. Zhang Y. L., Gorman D. G., Reese J. M. Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid // Thin-Walled Struct. – 2003. – **41**, No. 12. – P. 1103–1127. – [https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(03\)00108-3](https://doi.org/10.1016/S0263-8231(03)00108-3).
34. Zingoni A. Liquid-containment shells of revolution: A review of recent studies on strength, stability and dynamics // Thin-Walled Struct. – 2015. – **87**. – P. 102–114. – <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.10.016>.

VIBRATIONS OF CONJUGATED SHELL SYSTEMS UNDER COMBINED STATIC LOADS

The mathematical model of vibrations of elastic systems composed of conjugated shells of revolution with different geometry acted upon by combined static axisymmetric loads is proposed. This model is based on the geometrically nonlinear mean-bending theory under assumptions of the classical Kirchhoff – Love theory and is realized using modern methods of applied mathematics and numerical analysis. The spectral portrait of a shell structure with elements of positive, zero, and negative Gaussian curvature is constructed. This portrait makes it possible to trace resonance situations under specific dynamical actions and determine undangerous combinations of given static loads in analyzing stability of equilibrium states of the structure.

Key words: conjugated shell systems, combined static loads, vibrations, mathematical model, numerical-analytical technique, analysis.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
13.08.20