УДК 512.546

Н. М. Пирч[✉]

ПРО ГРАФИ ТА M-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ

Наведено ізоморфну класифікацію вільних топологічних груп над просторами, що є геометричними реалізаціями скінченних графів.

Ключові слова: *вільна топологічна група, M-еквівалентність, граф, дерево.*

Вступ. Для топологічного простору X через $F(X)$ позначимо вільну топологічну групу простору X, через $A(X)$ – вільну абелеву топологічну групу простору, через $L(X)$ – вільний локально опуклий простір.

Тихоновські простори X та Y називають M-еквівалентними, якщо вільні топологічні групи $F(X)$ і $F(Y)$ є топологічно ізоморфними (позначення $X \overset{M}{\sim} Y$), і A-еквівалентними, якщо вільні абелеві топологічні групи $A(X)$ та $A(Y)$ є топологічно ізоморфними (позначення $X \overset{A}{\sim} Y$).

Означення 1. *Однорідним простором* називають трійку (Y,G,h), де Y – топологічний простір, G – топологічна група, яка ефективно і транзитивно діє на просторі Y за допомогою неперервного відображення $h : G \times Y \to Y$.

Морфізмом однорідних просторів $p : (Y_1, G_1, h_1) \to (Y_2, G_2, h_2)$ називають таку пару $p = (f, \psi)$, де $f : Y_1 \to Y_2$ – неперервне відображення і $\psi : G_1 \to G_2$ – неперервний гомоморфізм такі, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times Y_1 & \xrightarrow{h_1} & Y_1 \\ \psi \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G_2 \times Y_2 & \xrightarrow{h_2} & Y_2 \end{array}$$

є комутативною.

Морфізм p називають *ізоморфізмом*, якщо існує такий морфізм $p_1 : (Y_2, G_2, h_2) \to (Y_1, G_1, h_1)$, що морфізми $p \circ p_1$ і $p_1 \circ p$ є тотожними. Нехай (Y,G,h) – однорідний простір. Підмножина $Y_0 \subseteq Y$ породжує (Y,G,h), якщо кожен морфізм $p = (f,\psi) : (Y,G,h) \to (Y,G,h)$, для якого $f(Y_0) = Y_0$ і індуковане відображення $f_0 : Y_0 \to f(Y_0) = Y_0$ є тотожним, задовольняє умову $p(z) = z$ для всіх $z \in Y$. Для кожного топологічного простору X існує і є єдиним з точністю до ізоморфізму вільний однорідний простір $H(X)$ (див. [3]). Як встановив М. Г. Меґрелішвілі (див. [3]), існують негомеоморфні топологічні простори з ізоморфними вільними однорідними просторами. Топологічні простори X і Y називають B-еквівалентними, якщо вільні однорідні простори $H(X)$ і $H(Y)$ є ізоморфними (позначення $X \overset{B}{\sim} Y$).

Позначимо через I замкнений одиничний відрізок, а через S – одиничне коло з топологіями, породженими евклідовою метрикою. Під топологічним графом будемо розуміти геометричну реалізацію деякого комбінаторного графа. Будемо розглядати графи, які мають скінченну кількість вершин, без паралельних ребер і петель (див. [11]). Під *деревом* будемо розуміти граф, який не містить циклів. Граф, який є прямою сумою дерев, називають *лісом*. *Нетривіальним* будемо називати дерево (ліс), що містить

[✉]pnazar@ukr.net

принаймні одне ребро. Іноді будемо ототожнювати комбінаторний граф із його геометричною реалізацією, зокрема, під комбінаторними характеристиками топологічного графа $(\gamma(X), k(X))$ будемо розуміти характеристики відповідного комбінаторного графа.

Важливими напрямками дослідження M-еквівалентних просторів є встановлення методів побудови таких просторів і визначення інваріантів відношення M-еквівалентності. Крім того, ще одним важливим напрямком вивчення еквівалентних просторів є встановлення класів просторів, над якими можлива повна класифікація вільних об'єктів. У роботі [6] встановлено ізоморфну класифікацію вільних (абелевих) топологічних груп і вільних локально опуклих просторів над нульвимірними локально компактними метризованими сепарабельними просторами. У цій роботі наводимо класифікацію згаданих вище вільних об'єктів над іншим класом просторів: над класом топологічних просторів, які є геометричними реалізаціями скінченних графів.

1. Графи-дерева та ізоморфізми вільних однорідних просторів. Підпростори K_1 і K_2 простору X називають *паралельними ретрактами* топологічного простору X, якщо існують ретракції $r_1 : X \to K_1$ та $r_2 : X \to K_2$ такі, що $r_1 \circ r_2 = r_1$ і $r_2 \circ r_1 = r_2$. Якщо простори K_1 та K_2 є паралельними дискретними ретрактами простору X, то фактор-простори X/K_1 та X/K_2 мають топологічно ізоморфні вільні однорідні простори [5].

Теорема 1. *Нехай* X *– топологічний граф-дерево. Тоді* $X \overset{B}{\sim} I$.

Д о в е д е н н я. Нехай (a,b) – деяке висяче ребро графа X, b – вершина степеня 1, (c,d) – деяке інше висяче ребро, d – вершина степеня 1. Позначимо через X_1 граф, що отримується з графа X внаслідок видалення ребра (a,b) (з топологічної точки зору, це факторизація простору X по підпростору, що складається з цього ребра). Розглянемо простір $Y = X_1 \oplus [0,1]$ та його дискретні паралельні ретракти $K_1 = \{0\} \oplus \{a\}$, $K_2 = \{0\} \oplus \{d\}$. Тоді фактор-простори X/K_1 та X/K_2 є B-еквівалентними.

Фактор-простір Y/K_1 гомеоморфний простору X, фактор-простір Y/K_2 є графом, що має (з топологічної точки зору) на одне ребро менше, ніж граф X. Застосувавши подібну процедуру $n-1$ раз, на останньому етапі отримаємо граф з одним ребром, тобто простір I. ♦

Позначимо через D_n скінченний дискретний простір потужності n.

Лема 1. *Для довільного натурального* n *виконується* $D_n \times I \overset{B}{\sim} I \oplus D_{n-1}$.

Д о в е д е н н я. Покажемо спочатку, що $I \oplus I \overset{B}{\sim} I \oplus \{x_0\}$.

Розглянемо простір $Y = [1,2] \oplus [3,4] \oplus \{5\}$ та його паралельні дискретні ретракти $K_1 = \{2\} \oplus \{5\}$, $K_1 = \{2\} \oplus \{3\}$. Тоді $Y/K_1 \approx I \oplus I$, $Y/K_2 \approx I \oplus \{x_0\}$.

Відношення B-еквівалентності є адитивним, тобто з умов $X_1 \overset{B}{\sim} Y_1$ та $X_2 \overset{B}{\sim} Y_2$ випливає, що $X_1 \oplus X_2 \overset{B}{\sim} Y_1 \oplus Y_2$. Доведення цього факту аналогічне доведенню твердження 8.8 з [2].

Використовуючи отриману еквівалентність відповідну кількість разів та властивість адитивності відношення B-еквівалентності, отримаємо:

$$D_n \times I \overset{B}{\sim} I \oplus I \oplus D_{n-2} \times I \overset{B}{\sim} I \oplus \{x_0\} \oplus D_{n-2} \times I = D_{n-1} \times I \oplus D_1 \overset{B}{\sim}$$

$$\overset{B}{\sim} D_{n-1} \times I \oplus D_1 \overset{B}{\sim} D_{n-2} \times I \oplus D_2 \overset{B}{\sim} D_{n-3} \times I \oplus D_3 \overset{B}{\sim} \ldots \overset{B}{\sim} I \oplus D_{n-1}.$$

♦

Теорема 2. *Нехай* $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n$ *– геометрична реалізація нетривіального лісу, що має* n *дерев. Тоді* $X \overset{B}{\sim} I \oplus D_{n-1}$.

Д о в е д е н н я. З теореми 1 та адитивності відношення B-еквівалентності отримаємо, що

$$X \overset{B}{\sim} mI \oplus D_{n-m},$$

де m – кількість нетривіальних дерев серед $X_1, X_2, \ldots, X_n$. За лемою 1 маємо

$$X \overset{B}{\sim} I \oplus D_{m-1} \oplus D_{n-m} = I \oplus D_{n-1}.$$ ♦

Наслідок 1. *Вільні однорідні топологічні простори над двома нетривіальними лісами є топологічно ізоморфними тоді й тільки тоді, коли вони мають однакову кількість дерев.*

Д о в е д е н н я випливає з того факту, що кількість компонент M-еквівалентних, а отже, і B-еквівалентних просторів співпадають [2]. ♦

Оскільки з ізоморфності вільних однорідних просторів випливає ізоморфність вільних (абелевих) паратопологічних груп [9], то робимо висновок, що вільні (абелеві) паратопологічні групи двох нетривіальних лісів є топологічно ізоморфними тоді й тільки тоді, коли ці ліси мають однакову кількість дерев.

2. Графи та ізоморфізми вільних топологічних груп. Для сім'ї топологічних просторів $\{(X_i, x_i) : i \in I\}$ з відміченими точками *букетом* $\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i)$ називають фактор-простір $\left(\bigoplus_{i\in I} X_i\right) / \{x_i : i \in I\}$. Як встановлено у [8], букет $\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i)$ з точністю до M-еквівалентності не залежить від відмічених точок, тому іноді будемо вживати скорочене позначення $\bigvee_{i\in I} X_i$.

Твердження 1. *Нехай* $I \to X$ *– вкладення одиничного відрізку у топологічний простір* X. *Якщо простір* X/I *містить копію відрізка* I, *то* X/I *є* M*-еквівалентним простору* X.

Д о в е д е н н я. Нагадаємо, що простір I є абсолютним ретрактом. Як встановлено у [8], для довільного простору X і його ретракта K виконується $X \overset{M}{\sim} (X/K) \vee K$. Нехай $I_1 \to X/I$ – вкладення одиничного відрізка у простір X/I. Тоді

$$X \overset{M}{\sim} (X/I) \vee I \overset{M}{\sim} \Big(((X/I)/I_1) \vee I_1 \Big) \vee I \overset{M}{\sim}$$

$$\overset{M}{\sim} ((X/I)/I_1) \vee (I_1 \vee I) \overset{M}{\sim} ((X/I)/I_1) \vee I_1 \overset{M}{\sim} X/I.$$

♦

Твердження 2. *Нехай* $T \to X$ *– вкладення нетривіального дерева у топологічний простір* X. *Якщо простір* X/T *містить копію відрізка* I, *то він є* M*-еквівалентним простору* X.

Д о в е д е н н я випливає з твердження 1, якщо почергово профакторизувати простір X по всіх ребрах дерева T. ♦

Наслідок 2. *Нехай* $S \to X$ *–* *вкладення нетривіального лісу* $S = T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_n$, *де* T_i *–* *дерева, у топологічний простір* X. *Якщо простір* $X / \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ *містить копію відрізка* I, *то він є* M*-еквівалентним простору* X.

Д о в е д е н н я випливає з твердження 2, якщо почергово профакторизувати простір X по всіх деревах лісу S. ♦

Нехай $k(G)$ – кількість компонент зв'язності графа G. Через $\gamma(G)$ позначимо циклічний порядок графа G – мінімальну кількість ребер графа G, які потрібно вилучити з цього графа, щоб отримати ліс. При факторизації простору графа по деякому його циклу отримаємо граф, у якого циклічний порядок на одиницю менший, ніж у G.

Теорема 3. *Нехай* X *–* *геометрична реалізація нетривіального зв'язного графа. Якщо* $\gamma(X) > 0$, *то простір* X *є* M*-еквівалентним букету* $\bigvee_{i \in I}^{\gamma(X)} (S_i, s_i)$, *де* S_i *–* *простір, гомеоморфний простору* S, *а* $s_i \in S_i$ *–* *довільні відмічені точки, а* якщо $\gamma(X) = 0$, *то простір* X *є* M*-еквівалентним одиничному відрізку* I.

Д о в е д е н н я. Нехай $\gamma(X) > 0$. Доведемо твердження методом математичної індукції.

Нехай K_1 – деякий цикл у графі X. Тоді простір K_1 є ретрактом у X. Розглянемо простір $Y = X \vee S_1$, де S_1 – гомеоморфна копія простору K_1. Тоді простори K_1 і S_1 є паралельними ретрактами простору Y. А тому $(X/K_1) \vee S_1 \cong Y/K_1 \overset{M}{\sim} Y/S_1 \cong X$ (тут $X \cong Y$ означає гомеоморфність просторів X та Y). Зауважимо, що $\gamma(X/K_1) = \gamma(X) - 1$. У просторі X/K_1 виділяємо цикл K_2. Розглянемо простір $Y_2 = X \vee S_1 \vee S_2$, де S_2 – гомеоморфна копія простору K_2. Тоді простори K_2 і S_2 є паралельними ретрактами простору Y_2. А тому $(X/K_1, K_2) \vee S_1 \vee S_2 \cong Y_2/K_2 \overset{M}{\sim} Y_2/S_2 \cong$ $(X/K_1) \vee S_1$. Повторивши подібні міркування $\gamma(X)$ разів, отримаємо

$$X \overset{M}{\sim} (X/K_1) \vee S_1 \overset{M}{\sim} (X/K_1, K_2) \vee S_1 \vee S_2 \overset{M}{\sim}$$

$$\overset{M}{\sim} \ldots \overset{M}{\sim} (X/K_1, K_2, \ldots, K_n) \vee S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_n .$$

Оскільки $\gamma(X/K_1, K_2, \ldots, K_n) = 0$, то простір $X/K_1, K_2, \ldots, K_n$ є деревом. Профакторизувавши простір $Z = (X/K_1, K_2, \ldots, K_n) \vee S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_n$ почергово по всіх ребрах цього дерева, отримаємо простір $Z_1 = S_1 \vee$ $\vee S_2 \vee \ldots \vee S_n$, який відповідно до твердження 1 буде M-еквівалентним простору Z, а отже, і простору X.

У випадку $\gamma(X) = 0$ застосуємо теорему 2. ♦

Теорема 4. *Нехай* X_1, X_2 *–* *геометричні реалізації нетривіальних зв'язних графів. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1°) $X_1 \overset{M}{\sim} X_2$;

2°) $X_1 \overset{A}{\sim} X_2$;

3°) $\gamma(X_1) = \gamma(X_2)$.

Д о в е д е н н я. Імплікація $1 \Rightarrow 2$ виконується для всіх топологічних просторів.

Доведемо імплікацію $2 \Rightarrow 3$. Нехай $\gamma(X_1) > 0$. Оскільки простір X_1 є M-еквівалентним букету $S_1 = \overset{\gamma(X_1)}{\underset{i=1}{\vee}} (S_i, s_i)$, простір X_2 є M-еквівалентним букету $S_2 = \overset{\gamma(X_2)}{\underset{i=1}{\vee}} (S_i, s_i)$, то $\left(\overset{\gamma(X_1)}{\underset{i=1}{\vee}} (S_i, s_i) \right) \overset{A}{\sim} \left(\overset{\gamma(X_2)}{\underset{i=1}{\vee}} (S_i, s_i) \right)$. Група гомотопічно еквівалентних відображень з простору S у простір S є ізоморфна $\mathbb{Z}$ (див. [10]). Враховуючи лінійну зв'язність [7] простору $S_1 = \overset{\gamma(X_1)}{\underset{i=1}{\vee}} (S_i, s_i)$, отримаємо, що група гомотопічно еквівалентних відображень із простору S_1 в абелеву топологічну групу S є ізоморфною $\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{\gamma(X_1)} = \mathbb{Z}^{\gamma(X_1)}$, а з простору $S_2 = \overset{\gamma(X_2)}{\underset{i=1}{\vee}} (S_i, s_i)$ – $\mathbb{Z}^{\gamma(X_2)}$. За теоремою 7.10.7 з [5], групи $\mathbb{Z}^{\gamma(X_1)}$ і $\mathbb{Z}^{\gamma(X_2)}$ є ізоморфними. Звідси $\gamma(X_1) = \gamma(X_2)$.

Імплікація $3 \Rightarrow 1$ випливає з теореми 1 у випадку $\gamma(X) = 0$ і теореми 3 у випадку $\gamma(X) > 0$. ♦

Під каркасом многогранника в $\mathbb{R}^3$ будемо розуміти підпростір в $\mathbb{R}^3$, який є об'єднанням усіх ребер цього многогранника. Наступний наслідок випливає з того факту, що циклічний порядок графа ребер многогранника на одиницю менший від кількості його граней. Дійсно, якщо m – кількість ребер графа G, n – кількість його вершин і r – кількість його граней , то $\gamma(G) = m - n + 1$. З іншого боку, для будь-якого многогранника справджується формула Ейлера: $n + r = m + 2$. Тому циклічний порядок графа ребер многогранника можна знайти за формулою $\gamma(G) = r - 1$.

Наслідок 3. *Каркаси двох многогранників є M-еквівалентними тоді й тільки тоді, коли ці многогранники мають однакову кількість граней.*

Теорема 5. *Нехай X – геометрична реалізація нетривіального графа. Тоді простір X є M-еквівалентним простору* $\overset{\gamma(X)}{\underset{i \in I}{\vee}} (S_i, s_i) \oplus D_{k(X)-1}$, *якщо* $\gamma(X) > 0$, *де S_i – простір, гомеоморфний S, $s_i \in S_i$, або простору* $I \oplus D_{k(X)-1}$, *якщо* $\gamma(X) = 0$.

Д о в е д е н н я. Нехай $X = \overset{k(X)}{\underset{j=1}{\oplus}} X_j$ – зображення простору у вигляді прямої суми його зв'язних підпросторів X_j. Простір X_j є M-еквівалентним простору $T_j = \overset{\gamma(X_j)}{\underset{i \in I}{\vee}} (S_{i,j}, s_{i,j})$, якщо $\gamma(X_j) > 0$, або простору $T_j = I$, якщо $\gamma(X_j) = 0$. За адитивністю відношення M-еквівалентності будемо мати, що $X \overset{M}{\sim} \left(\overset{k(X)}{\underset{j=1}{\oplus}} T_j \right)$. Покладемо $T = \overset{k(X)}{\underset{j=1}{\oplus}} T_j \oplus D_{k(X)-1}$. У кожному просторі T_j відмітимо точку a_j, в яку склеюються точки $\{s_{i,j}\}$, або точку $a_j = 0 \in I$, якщо $\gamma(X_j) = 0$. Розглянемо дискретні паралельні ретракти простору T: $K_1 = D_{k(X)-1} + \{a\}$, де $a \in T_1$, і $K_2 = \{a_j : j = 1, \ldots, k(X)\}$. Фактор-простір

T/K_1 є гомеоморфним простору $\overset{k(X)}{\underset{j=1}{\oplus}} T_j$, фактор-простір T/K_2 є M-еквівалентним простору $Y = \overset{k(X)}{\underset{j=1}{\vee}} (T_j, a_j) \oplus D_{k(X)-1}$. Простір $Z = \overset{k(X)}{\underset{j=1}{\vee}} (T_j, a_j)$ є зв'язним і є букетом $\gamma(X)$ кількості кіл і, можливо, деякої кількості одиничних відрізків. Після факторизації простору Z по цих відрізках отримаємо простір Z_1, який є букетом $\gamma(X)$ кількості кіл і відповідно до твердження 1 є M-еквівалентним простору Z. Таким чином, у випадку $\gamma(X) > 0$ простір X є M-еквівалентним прямій сумі

$$T = Z_1 \oplus D_{k(X)-1} = \overset{\gamma(X)}{\underset{j=1}{\vee}} (S_j, s_j) \oplus D_{k(X)-1}$$

букету $\gamma(X)$ кількості кіл і скінченного дискретного простору потужності $k(X)-1$. У випадку $\gamma(X) = 0$ простір Z_1 є одиничним відрізком. ♦

Теорема 6. *Нехай X_1, X_2 – геометричні реалізації графів, ребра яких поза вершинами не перетинаються. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1°) $X_1 \overset{M}{\sim} X_2$;

2°) $X_1 \overset{A}{\sim} X_2$;

3°) $\gamma(X_1) = \gamma(X_2)$ *і* $k(X_1) = k(X_2)$.

Д о в е д е н н я. Імплікація *1* ⇒ *2* виконується для всіх топологічних просторів (див. твердження 7.10.1 з [4])

Доведемо імплікацію *2* ⇒ *3*. Нехай $X_1 = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} K_i$, $X_2 = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} T_i$, де $n = k(X_1) = k(X_2)$, K_i, T_i – непорожні зв'язні підграфи. Спочатку показуємо, що $X_1 \overset{M}{\sim} \left(\overset{\gamma(X_1)}{\underset{i \in I}{\vee}} (S_i, s_i) \oplus D_{k(X_1)-1} \right)$. Аналогічно доводимо, що $X_2 \overset{M}{\sim} \left(\overset{\gamma(X_2)}{\underset{i \in I}{\vee}} (S_i, s_i) \oplus D_{k(X_2)-1} \right)$. Далі рівність $\gamma(X_1) = \gamma(X_2)$ отримується міркуваннями, аналогічними, як при доведенні теореми 4.

Рівність $k(X_1) = k(X_2)$ випливає з того, що кількості компонент зв'язності A-еквівалентних просторів співпадають (твердження 8.2 з [2]).

Імплікація *3* ⇒ *1* випливає з теореми 5. ♦

Наслідок 4. *Нехай* Y_i – *граф, який отримується зі зв'язного графа* X_i, $i = 1, 2$, *склеюванням* (*ототожненням*) *двох несуміжних вершин. Тоді такі умови є еквівалентними*:

1°) $X_1 \overset{M}{\sim} X_2$;

2°) $Y_1 \overset{M}{\sim} Y_2$.

Д о в е д е н н я випливає з теореми 3 і рівності $\gamma(Y_i) = \gamma(X_i) + 1$. ♦

Наслідок 5. *Нехай* Y_i – *граф, який отримується з графа-лісу* X_i, $i = 1, 2$, *видаленням ребра, що належить деякому циклу в* X_i. *Тоді такі умови є еквівалентними*:

1°) $X_1 \overset{M}{\sim} X_2$;

2°) $Y_1 \overset{M}{\sim} Y_2$.

Д о в е д е н н я випливає з теореми 3 і рівностей $\gamma(Y_i) = \gamma(X_i) - 1$, $k(X_i) = k(Y_i)$. ♦

Наслідок 6. *Нехай* $T_i \overset{M}{\sim} Q_i$, $i = 1, \ldots, n$, − *пари* M*-еквівалентних геометричних реалізацій скінченних лісів. Тоді*

$$T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n \overset{M}{\sim} Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_n .$$

Д о в е д е н н я випливає з результатів роботи [4], якщо врахувати, що всі простори T_i та Q_i є компактними. ♦

Зауваження 1. Як встановлено у [3], зв'язний топологічний простір, що не розділяється на дві компоненти зв'язності жодною точкою, є B-еквівалентним лише самому собі, тому теорема 4 не узагальнюється на відношення B-еквівалентності.

Тихоновські простори X та Y називають L-еквівалентними, якщо вільні локально опуклі простори $L(X)$ та $L(Y)$ є лінійно гомеоморфними (позначення $X \overset{L}{\sim} Y$). Тихоновські простори X та Y називають ℓ-еквівалентними, якщо лінійні топологічні простори $C_p(X)$ та $C_p(Y)$ неперервних дійснозначних функцій у топології поточкової збіжності є лінійно гомеоморфними (позначення $X \overset{\ell}{\sim} Y$). Для довільних топологічних просторів з умови $X \overset{L}{\sim} Y$ випливає умова $X \overset{\ell}{\sim} Y$, для компактних просторів ці умови є еквівалентними.

Як встановлено у роботі [1], простори I та S є L-еквівалентними, простори I та $I \oplus D_n$ для довільного натурального n є також L-еквівалентними, а тому з теореми 4 випливає, що геометричні реалізації будь-яких двох скінченних нетривіальних графів будуть L-еквівалентними.

1. *Архангельский А. В.* О линейной топологической классификации пространств непрерывных функций в топологии поточечной сходимости // Мат. сб. − 1990. − **181**, № 5. − С. 705−718.
   Те саме: *Arkhangel'skii A. V.* On linear topological classification of spaces on continuous functions in the topology of pointwise convergence // Math. USSR-Sb. − 1991. − **70**, No. 1. − P. 129−142.
2. *Гуран І. Й., Зарічний М. М.* Елементи теорії топологічних груп. − Київ: НМК ВО, 1991. − 75 с.
3. *Мегрелишвили М. Г.* Топологические пространства с изоморфными свободными однородными пространствами // Сообщ. АН Груз. ССР. − 1981. − **103**, № 3. − С. 549−552.
4. *Окунев О. Г.* M-эквивалентность произведений // Тр. Моск. мат. об-ва. − 1995. − **56**. − С. 192−205.
5. *Arkhangel'skiĭ A. V., Tkachenko M.* Topological groups and related structures. − Amsterdam−Paris: Atlantis Press, 2008. − xiv+781 p.
6. *Baars J.* Equivalence of certain free topological groups // Comment. Math. Univ. Carolin. − 1992. − **33**, No. 1. − P. 125−130.
7. *Engelking R.* General topology. − Berlin: Heldermann, 1989. − 539 p.
   Те саме: *Энгелькинг Р.* Общая топология. − Москва: Мир, 1986. − 752 с.
8. *Okunev O. G.* A method for constructing examples of M-equivalent spaces // Topology Appl. − 1990. − **36**, No. 2. − P. 157−171. − https://doi.org/10.1016/0166-8641(90)90006-N; Correction // Topology Appl. − 1993. − **49**, No. 2. − P. 191−192. − https://doi.org/10.1016/0166-8641(93)90044-E.
9. *Pyrch N.* On isomorphisms of the free paratopological groups and free homogeneous spaces. I // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. − 2007. − Вип. 67. − С. 224−232.
10. *Spanier E. H.* Algebraic topology. − New York: Springer-Verlag, 1966. − xiv+548 p.
11. *West D. B.* Introduction to graph theory. − London: Prentice Hall, 2001. − xx+588 p.

ON GRAPHS AND M-EQUIVALENCE

The isomorphic classification of free topological groups of the spaces that are geometric realizations of finite graphs is presented.

Key words**:** *free topological group, M-equivalence, graph, tree.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
Укр. акад. друкарства, Львів

Одержано
22.11.20