

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД СКІНЧЕННИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У ЛІНІЙНИХ І НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧАХ СТАТИКИ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

Запропоновано підхід до розв'язування двовимірних лінійних і нелінійних крайових задач статички пологих оболонок на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень і методу лінеаризації Ньютона – Канторовича – Рафсона. У лінійному випадку застосування узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень зводиться до побудови двох інтегральних перетворень за різними змінними області у припущенні, що ядра одного перетворення є трансформантами другого, і навпаки. Для розв'язання одержаної системи двох одновимірних задач використовується ітераційна процедура, що є аналогом процедури Лібмана – Гаусса – Зейделя в лінійній алгебрі. У нелінійному випадку на основі раціонального поєднання методу лінеаризації Ньютона – Канторовича – Рафсона та узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень побудовано єдиний ітераційний процес, що об'єднує два типи ітерацій: лінеаризацію нелінійної задачі (метод Ньютона – Канторовича – Рафсона) і розв'язання окремої лінеаризованої задачі (метод Лібмана – Гаусса – Зейделя). Цей процес збігається досить швидко (кількість ітерацій знаходиться в межах одного порядку) і дає усталений розв'язок вихідної задачі при невеликій (3÷5) кількості трансформант-ядер в оберненому перетворенні. Наведено приклади тестування підходу та дослідження стійкості пологих оболонок при різних умовах закріплення граничного контуру.

Ключові слова: узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень, метод лінеаризації Ньютона – Канторовича – Рафсона, статика пологих оболонок, лінійні і нелінійні крайові задачі, тестування, аналіз.

Вступ. Класичні розв'язки багатьох фундаментальних задач теорії пружності, тепломасопереносу, електропружності, розповсюдження хвиль в однорідних і неоднорідних середовищах тощо були одержані з використанням методів інтегральних перетворень у нескінченних (скінченних) областях [6, 10, 11, 12, 15, 16]. Основна ідея цих методів полягає у зведенні вихідної лінійної N -вимірної задачі ($N \geq 2$) до задач лінійної алгебри ($N = 0$) або одновимірних задач ($N = 1$) шляхом послідовного застосування N або $(N - 1)$ -го інтегральних перетворень з певними ядрами, які визначаються з відповідних задач Штурма – Ліувілля.

Суттєвим доробком у теорії інтегральних перетворень для скалярних і векторних полів, у розв'язанні просторових задач теорії пружності та механіки спряжених полів у керамічних середовищах стали праці А. Ф. Улітка. Побудовані ним власні векторні функції дозволили вивести формули векторних інтегральних перетворень Фур'є, Ляме, Ганкеля тощо, які набули такого самого ступеня завершення, як і класичні методи для скалярних полів [15].

Методи скінченних інтегральних перетворень (МСІП), основи яких було закладено в працях Н. С. Кошлякова [8], Г. А. Грінберга [5], А. С. Eringen-a [24, 25], С. J. Tranter-a [32], почали інтенсивно розвиватися з другої половини минулого століття. З того часу вони посідають значне місце при розв'язуванні прикладних задач різних галузей фізики взагалі і механіки деформованого твердого тіла зокрема [13, 17, 18, 20, 22, 23, 26, 27, 29–32].

У теоретичному плані питання подальшого розвитку і вдосконалення МСІП зосереджено переважно на пошуку способів побудови ядер перетворення як важливої складової частини і, по суті, наріжного каменя цих методів математичної фізики.

[✉]elena_bespalova@ukr.net

Побудова ядер інтегральних перетворень, як відомо [8, 14], пов'язана з певними вимогами, які фактично зводяться до можливості відокремлення змінних у вихідній задачі і знаходженні відповідних власних функцій за однією або декількома змінними області. Значних успіхів у вирішенні цього питання для векторних задач було досягнуто завдяки працям професора Ю. Е. Сеницького, пов'язаних з розв'язанням багатокомпонентних векторних задач Штурма – Ліувілля і використанням цих розв'язків як ядер інтегральних перетворень. Розроблена Сеницьким векторно-матрична форма *МСІП* дозволила провести дослідження широкого кола задач пружного деформування: динамічних задач для пологих сферичних оболонок і кільцевих пластин при різних видах навантаження і граничних умов, зв'язаних задач термопружності для нескінченного циліндра і кулі, ортотропного циліндра скінченної і нескінченної довжини зі змінними пружними властивостями матеріалу тощо (див., наприклад, [13]).

В окремих роботах з використанням *МСІП*, зважаючи на складність побудови ядер інтегральних перетворень, останні вибираються априорі залежно від вигляду області, операторів диференціальних рівнянь і граничних умов [17].

Певна спроба застосування *МСІП* у задачах з невідокремлювальними змінними була зроблена в статтях [2, 3]. У цих роботах в рамках ідеології *МСІП* викладено основні положення узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень для задач статички неоднорідних пластин (двовимірні задачі [3]) та анізотропних плит із низьким порядком симетрії пружних властивостей і для різних типів граничних умов (тривимірні задачі [2]).

1. Постановка задачі. Розглядається полого оболонка сталюї товщини h , серединна поверхня якої у проєкціях на декартову систему координат Oxy займає прямокутну область $\Omega \cup \partial\Omega = \{x, y : x \in [x_0, x_1], y \in [y_0, y_1]\}$, має кривини k_x, k_y у напрямках координатних осей і гауссову кривину $K = k_x k_y$. Оболонка знаходиться на пружній вінклерівській основі з коефіцієнтом $K_p = K_p(x, y)$, а в області Ω на неї діє вектор розподілених навантажень $\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_n\}$, де індекс n вказує напрямок, перпендикулярний до її серединної поверхні. У кожній точці границі $\partial\Omega$ можуть бути задані зусилля-моменти, переміщення або їхні комбінації, так що на умови закріплення контуру ніяких обмежень, окрім їх фізичної несумісності, не накладається. Матеріал оболонки приймається ізотропним і лінійно пружним.

Цей клас тонкостінних об'єктів охоплює: прямокутні пластини ($k_x = 0, k_y = 0, K = 0$), циліндричні панелі ($k_x = 0, k_y \neq 0, K = 0$), елементи сферичних ($k_x > 0, k_y > 0, K > 0$) та сідлоподібних ($k_x > 0, k_y < 0, K < 0$) оболонок.

Деформування таких оболонок при докритичному навантаженні описується співвідношеннями геометрично нелінійної теорії середнього згину в квадратичному наближенні за моделлю Муштарі – Доннелла – Власова (див., наприклад, [7]):

– рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} T_{1,x} + S_{,y} &= q_x, & T_{2,y} + S_{,x} &= q_y, \\ M_{1,x} + H_{,y} - Q_1 &= 0, & M_{2,y} + H_{,x} - Q_2 &= 0, \\ (Q_1 + T_1 w_{,x} + S_{,y})_{,x} &+ (Q_2 + T_2 w_{,y} + S_{,x})_{,y} + \\ &+ k_x T_1 + k_y T_2 + K_p w &= q_n; \end{aligned} \quad (1)$$

– геометричні співвідношення

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= u_{,x} - k_x w + 1/2 w_{,x}^2, & \varepsilon_2 &= v_{,y} - k_y w + 1/2 w_{,y}^2, \\ \varepsilon_{12} &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y}, & \alpha_1 &= -w_{,xx}, & \alpha_2 &= -w_{,yy};\end{aligned}\quad (2)$$

– співвідношення пружності

$$\begin{aligned}T_1 &= D_N(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), & T_2 &= D_N(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), & M_1 &= D_M(\alpha_1 + \mu\alpha_2), \\ M_2 &= D_M(\alpha_2 + \mu\alpha_1), & S &= \frac{1-\mu}{2} D_N \varepsilon_{12}, & H &= (1-\mu) D_M \tau.\end{aligned}\quad (3)$$

Тут T_1 , S , Q_1 – нормальне тангенціальне, зсувне та перерізувальне зусилля в перерізі $x = \text{const}$; M_1 , H – згинальний і крутний моменти в цьому перерізі; T_2 , S , Q_2 і M_2 , H – аналогічні зусилля і моменти в перерізі $y = \text{const}$; u , v , w – компоненти вектора переміщення уздовж координатних осей x , y , n ; ε_1 , ε_2 , ε_{12} і α_1 , α_2 , τ – відповідно компоненти тангенціальної і згинальної деформації серединної поверхні; $D_N = \frac{Eh}{1-\mu^2}$ і $D_M = \frac{h^2}{12} D_N$

– жорсткість на розтяг-стиск і жорсткість на згин; E , μ – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона. Кома в індексах означає диференціювання за вказаною після неї змінною: $T_{1,x} = \frac{\partial T_1}{\partial x}$, $w_{,xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

На основі співвідношень (1)–(3) математичну модель напружено-деформованого стану гнучких пологих оболонок можна подати в такому загальному векторно-матричному вигляді відносно вектор-функції переміщень $\mathbf{U} = \{u(x, y), v(x, y), w(x, y)\}$:

$$\mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{g} + \mathbf{f} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (4)$$

$$\mathbf{R}_{xp} \mathbf{U} + \mathbf{s}_{xp} + \boldsymbol{\varphi}_{xp} = 0, \quad x = x_p, \quad p = 0, 1, \quad (5)$$

$$\mathbf{R}_{yp} \mathbf{U} + \mathbf{s}_{yp} + \boldsymbol{\varphi}_{yp} = 0, \quad y = y_p, \quad p = 0, 1. \quad (6)$$

Тут $\mathbf{L} = \{\ell_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$, $\mathbf{g} = \{g_i(x, y)\}_{i=1,2,3}$ та $\mathbf{f} = \{f_i(x, y)\}_{i=1,2,3}$ – матричний диференціальний оператор, вектор-функція нелінійних членів і вільний член, визначені в області Ω , $f_i(x, y) = -q_i(x, y)$; $\mathbf{R}_{xp} = \{r_{ij}^{(xp)}\}_{i=1,2,3; j=1,2,3,4}$, $\mathbf{s}_{xp} = \{s_i^{xp}(x, y)\}_{i=1,2,3,4}$ та $\boldsymbol{\varphi}_{xp} = \{\varphi_i^{xp}(x, y)\}_{i=1,2,3,4}$ – матричний диференціальний або алгебраїчний оператор, вектор-функція нелінійних членів і вільний член у граничних умовах на контурі $x = x_p$, $p = 0, 1$; аналогічний зміст мають оператор та вектор-функції з індексом y_p для граничних умов (6) при $y = y_p$, $p = 0, 1$.

Вирази для елементів зазначених операторів і компонент вектор-функцій одержуються за стандартною технікою диференціювання.

2. Основні положення узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень. Для розв'язання поставленої двовимірної нелінійної крайової задачі (4)–(6) в роботі пропонується підхід, що базується на застосуванні узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень (позначення – МСІП*) у лінійному випадку ($\mathbf{g} = 0$, $\mathbf{s}_{xp} = 0$, $\mathbf{s}_{yp} = 0$) і на поєднанні цього методу з процедурою лінеаризації Ньютона – Канторовича – Рафсона [1] в нелінійному випадку ($\mathbf{g} \neq 0$, $\mathbf{s}_{xp} \neq 0$, $\mathbf{s}_{yp} \neq 0$).

2.1. Лінійна крайова задача ($\mathbf{g} = 0$, $\mathbf{s}_{xp} = 0$, $\mathbf{s}_{yp} = 0$ в (4)–(6)). Основні положення були детально висвітлені в [3] у випадку двовимірної задачі статички неоднорідної прямокутної пластини та поширені в [2] на тривимірні задачі про напружено-деформований стан анізотропної призми з різними граничними умовами. Обидві задачі є лінійними крайовими задачами з невідокремлювальними змінними.

Наведемо загальну схему розробленого підходу для розв'язання лінійної крайової задачі, сформульованої відносно вектор-функції переміщень $\mathbf{U} = \{\mathbf{r}(x, y)\} = \{u(x, y), v(x, y), w(x, y)\}$, і яка має такий вигляд:

$$\mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{f} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (7)$$

$$\mathbf{R}_{xp}\mathbf{U} + \mathbf{\Phi}_{xp} = 0, \quad x = x_p, \quad p = 0, 1, \quad (8)$$

$$\mathbf{R}_{yp}\mathbf{U} + \mathbf{\Phi}_{yp} = 0, \quad y = y_p, \quad p = 0, 1. \quad (9)$$

Ця схема охоплює основні положення МСІП* і відповідні кроки їхньої реалізації:

- 1°. Побудова двох інтегральних перетворень вихідної задачі за різними змінними заданої області.
- 2°. Визначення ядер побудованих перетворень.
- 3°. Формулювання системи інтегральних перетворень для знаходження їхніх трансформант (зображень) і ядер.
- 4°. Розв'язання одержаної системи.

Крок 1°. Побудова двох інтегральних перетворень вихідної задачі за різними змінними заданої області.

Будуються паралельно два інтегральні перетворення **I** та **II**, ідентичні щодо змінних x та y .

I. Інтегральне перетворення **I** будується за змінною y в межах її визначення $y \in [y_0, y_1]$ із функціями ядра $\mathbf{Q} = \{q_{rk}(y)\}_{r=u,v,w; k=1,2,\dots,I}$, які поки що є невідомими:

$$\int_{y_0}^{y_1} [(\mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{f})q_{rk}(y)] dy = 0, \quad x \in (x_0, x_1),$$

$$\int_{y_0}^{y_1} [(\mathbf{R}_{xp}\mathbf{U} + \mathbf{\Phi}_{xp})q_{rk}(y)] dy = 0, \quad x = x_p, \quad p = 0, 1. \quad (10)$$

При інтегруванні частинами рівняння (7) враховуються, як і в класичному МСІП, граничні умови (9) за змінною інтегрування y .

Згідно з ідеологією методів скінченних інтегральних перетворень, функції трансформант (зображень) цього перетворення $\mathbf{U}_x = \{r_{xi}(x)\}$ подаємо за функціями ядра $\mathbf{Q} = \{q_{rk}(y)\}$:

$$r_{xi}(x) = \int_{y_0}^{y_1} r(x, y)q_{ri}(y) dy,$$

або в розгорнутому вигляді:

$$u_{xi}(x) = \int_{y_0}^{y_1} u(x, y)q_{ui}(y) dy,$$

$$v_{xi}(x) = \int_{y_0}^{y_1} v(x, y) q_{vi}(y) dy,$$

$$w_{xi}(x) = \int_{y_0}^{y_1} w(x, y) q_{wi}(y) dy.$$

Шуканий розв'язок задачі (7)–(9) – компоненти вектор-функції переміщення $\mathbf{U} = \{r(x, y)\}$, $r = u, v, w$, – наближено визначається оберненим інтегральним перетворенням, яке є скінченною сумою:

$$r(x, y) = F_{rI} \cong \sum_{i=1,2,\dots,I} r_{xi}(x) q_{ri}(y), \quad (11)$$

або в розгорнутому вигляді:

$$u(x, y) = F_{uI} \cong \sum_{i=1,2,\dots,I} u_{xi}(x) q_{ui}(y),$$

$$v(x, y) = F_{vI} \cong \sum_{i=1,2,\dots,I} v_{xi}(x) q_{vi}(y),$$

$$w(x, y) = F_{wI} \cong \sum_{i=1,2,\dots,I} w_{xi}(x) q_{wi}(y).$$

II. Інтегральне перетворення **II** будується за змінною x в межах її визначення $x \in [x_0, x_1]$ з функціями ядра $\mathbf{P} = \{p_{rk}(x)\}_{r=u,v,w; k=1,2,\dots,I}$, які, як і в перетворенні **I**, є поки що невідомими:

$$\int_{x_0}^{x_1} (\mathbf{LU} + \mathbf{f}) p_{rk}(x) dx = 0, \quad y \in (y_0, y_1),$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (\mathbf{R}_{yp} \mathbf{U} + \mathbf{\Phi}_{yp}) p_{rk}(x) dx = 0, \quad y = y_p, \quad p = 0, 1. \quad (12)$$

При цьому враховуються граничні умови (8) за змінною перетворення x .

Трансформанти цього перетворення $\mathbf{U}_y = \{r_{yi}(y)\}$ подаємо за вибраними функціями ядра $\mathbf{P} = \{p_{rk}(x)\}$ у вигляді

$$r_{yi}(y) = \int_{x_0}^{x_1} r(x, y) p_{ri}(x) dx,$$

або розгорнуто:

$$u_{yi}(y) = \int_{x_0}^{x_1} u(x, y) p_{ui}(x) dx,$$

$$v_{yi}(y) = \int_{x_0}^{x_1} v(x, y) p_{vi}(x) dx,$$

$$w_{yi}(y) = \int_{x_0}^{x_1} w(x, y) p_{wi}(x) dx.$$

Шуканий розв'язок задачі (7)–(9) $\mathbf{U} = \{r(x, y)\}$, $r = u, v, w$, наближено визначається оберненим інтегральним перетворенням, яке в цьому випадку

має вигляд

$$r(x, y) = S_{rI} \cong \sum_{i=1,2,\dots,I} r_{yi}(y)p_{ri}(x), \quad (13)$$

або розгорнуто:

$$u(x, y) = S_{uI} \cong \sum_{i=1,2,\dots,I} u_{yi}(y)p_{ui}(x),$$

$$v(x, y) = S_{vI} \cong \sum_{i=1,2,\dots,I} v_{yi}(y)p_{vi}(x),$$

$$w(x, y) = S_{wI} \cong \sum_{i=1,2,\dots,I} w_{yi}(y)p_{wi}(x).$$

Крок 2^о. Визначення ядер побудованих перетворень.

Принциповою особливістю розробленого варіанта МСІП* порівняно з класичною формою цих методів є побудова ядер інтегральних перетворень **I** і **II**.

У класичному методі скінченних інтегральних перетворень ядрами слугують власні функції відповідної задачі Штурма – Ліувілля, для одержання якої на оператори вихідної задачі накладаються вимоги відокремлення змінних [8]. Виконання цих умов суттєво звужує коло задач, до яких можуть бути застосовані МСІП. Саме побудова ядер інтегральних перетворень, що не накладає ніяких додаткових обмежень на постановку задачі, є основною відмінністю запропонованого узагальнення цих методів.

Так, у МСІП* приймається, що ядрами $\mathbf{Q} = \{q_{rk}(y)\}$ в інтегральному перетворенні **I** є трансформанти $\mathbf{U}_y = \{r_{yi}(y)\}$ перетворення **II**, а ядрами $\mathbf{P} = \{p_{rk}(x)\}$ перетворення **II** є трансформанти $\mathbf{U}_x = \{r_{xi}(x)\}$ перетворення **I**, тобто

$$q_{ri}(y) = r_{yi}(y), \quad p_{ri}(x) = r_{xi}(x), \quad r = u, v, w, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (14)$$

або розгорнуто

$$q_{ui}(y) = u_{yi}(y), \quad q_{vi}(y) = v_{yi}(y), \quad q_{wi}(y) = w_{yi}(y),$$

$$p_{ui}(x) = u_{xi}(x), \quad p_{vi}(x) = v_{xi}(x), \quad p_{wi}(x) = w_{xi}(x).$$

При цій умові вирази для обернених перетворень (11) і (13) є ідентичними ($F_{rI} = S_{rI}$) і шукані функції задачі (7)–(9) визначаються так:

$$r(x, y) = F_{rI} \cong \sum_{i=1,2,\dots,I} r_{xi}(x)r_{yi}(y), \quad (15)$$

або в розгорнутому вигляді:

$$u(x, y) = F_{uI} \cong \sum_{i=1,2,\dots,I} u_{xi}(x)u_{yi}(y),$$

$$v(x, y) = F_{vI} \cong \sum_{i=1,2,\dots,I} v_{xi}(x)v_{yi}(y),$$

$$w(x, y) = F_{wI} \cong \sum_{i=1,2,\dots,I} w_{xi}(x)w_{yi}(y).$$

Отже, при такому виборі ядер інтегральних перетворень **I** і **II** розв'язання задачі (7)–(9) зводиться до знаходження функцій $\mathbf{U}_x = \{r_{xi}(x)\}$ і $\mathbf{U}_y = \{r_{yi}(y)\}$ із системи (10), (12).

Крок 3°. Формулювання системи інтегральних перетворень для знаходження їхніх трансформант (зображень) і ядер.

Систему (10), (12), яка визначає шукані трансформанти-ядра інтегральних перетворень **I**, **II**, з урахуванням формул (14), (15) і позначення $\mathbf{F} = \{F_{rI} = S_{rI}\}_{r=u,v,w}$ можна подати в такому вигляді (стрілками показано результат відповідного інтегрального перетворення):

$$\int_{y_0}^{y_1} [(\mathbf{L}\mathbf{F} + \mathbf{f})r_{yk}(y)] dy = 0 \rightarrow \mathbf{L}_{(x)}\mathbf{U}_x + \mathbf{f}_{(x)} = 0, \quad x \in (x_0, x_1),$$

$$\int_{y_0}^{y_1} [(\mathbf{R}_{xp}\mathbf{F} + \mathbf{\Phi}_{xp})r_{yk}(y)] dy = 0 \rightarrow \mathbf{R}_{xp(x)}\mathbf{U}_x + \mathbf{\Phi}_{xp(x)} = 0,$$

$$x = x_p, \quad p = 0, 1, \quad (16)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} [(\mathbf{L}\mathbf{F} + \mathbf{f})r_{xk}(x)] dx = 0 \rightarrow \mathbf{L}_{(y)}\mathbf{U}_y + \mathbf{f}_{(y)} = 0, \quad y \in (y_0, y_1),$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (\mathbf{R}_{yp}\mathbf{F} + \mathbf{\Phi}_{yp})r_{xk}(x) dx = 0 \rightarrow \mathbf{R}_{yp(y)}\mathbf{U}_y + \mathbf{\Phi}_{yp(y)} = 0,$$

$$y = y_p, \quad p = 0, 1. \quad (17)$$

Ця нова структура є системою двох побудованих інтегральних перетворень вихідної двовимірної задачі, що відповідає двом умовно одновимірним задачам за різними змінними області (вирази після стрілок \rightarrow).

Так, задачу (16) (вирази після стрілок \rightarrow) сформульовано відносно функцій $\mathbf{U}_x = \{r_{xi}(x)\}$, $r = u, v, w$; нижній індекс у дужках «(x)» означає, що відмічені ним оператори і вектори одержано згідно з інтегральним перетворенням **I**; $\mathbf{L}_{(x)} = \{\ell_{sq}\}_{s,q=1,2,3}$ – блочна матриця, кожний блок якої є диференціальним оператором другого ($s \neq 3, q \neq 3$) або четвертого ($s = q = 3$) порядку загальної структури за змінною x :

$$\ell_{ik}^{(sq)} = A_{2ik}^{(sq)} \frac{d^2}{dx^2} + A_{1ik}^{(sq)} \frac{d}{dx} + A_{0ik}^{(sq)}, \quad s, q = 1, 2,$$

$$\ell_{ik}^{(33)} = A_{4ik}^{(33)} \frac{d^4}{dx^4} + A_{3ik}^{(33)} \frac{d^3}{dx^3} + A_{2ik}^{(33)} \frac{d^2}{dx^2} + A_{1ik}^{(33)} \frac{d}{dx} + A_{0ik}^{(33)},$$

з коефіцієнтами, що залежать від функцій $r_{yk}(y)$, $r = u, v, w$, у вигляді констант-функціоналів, наприклад,

$$A_{1ik}^{31} = D_N (k_x + \mu k_y) \int_{y_0}^{y_1} w_{yi}(y) u_{yk}(y) dy,$$

$$A_{4ik}^{33} = D_M \int_{y_0}^{y_1} w_{yi}(y) w_{yk}(y) dy. \quad (18)$$

Таким чином, цю задачу можна умовно вважати одновимірною за координатою x .

Аналогічний зміст має задача (17) (вирази після стрілок \rightarrow): невідомими в ній є функції $\mathbf{U}_y = \{r_{yi}(y)\}$, $r = u, v, w$, нижній індекс у дужках « (y) » означає, що відмічені ним оператори і вектори одержано з інтегральним перетворенням \mathbf{II} , і, на відміну від задачі (16), диференціювання ведеться за змінною y в $\mathbf{L}_{(y)}$ і $\mathbf{R}_{yp(y)}$, а коефіцієнти в цих операторах залежать від функцій $\mathbf{U}_x = \{r_{xi}(x)\}$, $r = u, v, w$, наприклад,

$$A_{0ik}^{31} = -D_N(k_x + \mu k_y) \int_{x_0}^{x_1} w_{xi}(x) u'_{xk}(x) dx,$$

$$A_{4ik}^{33} = D_M \int_{x_0}^{x_1} w_{xi}(x) w_{xk}(x) dx. \quad (19)$$

Взаємозв'язок інтегральних перетворень \mathbf{I} і \mathbf{II} у єдиній системі (16), (17) встановлюється через коефіцієнти диференціальних операторів цих одновимірних задач (див., наприклад, вирази (18), (19)).

Крок 4°. Розв'язання одержаної системи інтегральних перетворень.

Для розв'язання системи (16), (17) використовується аналог методу послідовних заміщень лінійної алгебри – процедура Лібмана – Гаусса – Зейделя, загальна ітераційна схема якої записується таким чином (параметр ітерації j):

$$\mathbf{L}_{(x)}^{(j-1)} \mathbf{U}_x^{(j)} + \mathbf{f}_{(x)}^{(j-1)} = 0, \quad x \in (x_0, x_1),$$

$$\mathbf{R}_{xp(x)}^{(j-1)} \mathbf{U}_x^{(j)} + \mathbf{\Phi}_{xp(x)}^{(j-1)} = 0, \quad x = x_p, \quad p = 0, 1, \quad (20)$$

$$\mathbf{L}_{(y)}^{(j)} \mathbf{U}_y^{(j)} + \mathbf{f}_{(y)}^{(j)} = 0, \quad y \in (y_0, y_1),$$

$$\mathbf{R}_{yp(y)}^{(j)} \mathbf{U}_y^{(j)} + \mathbf{\Phi}_{yp(y)}^{(j)} = 0, \quad y = y_p, \quad p = 0, 1. \quad (21)$$

Проміжне j -те наближення цього процесу при фіксованій кількості членів I оберненого перетворення (15) реалізується у такій послідовності:

- обчислення коефіцієнтів вигляду (18) з використанням компонент вектор-функцій $\mathbf{U}_y^{(j-1)}$, відомих з попереднього $(j-1)$ -го наближення;
- знаходження вектор-функції $\mathbf{U}_x^{(j)}$ як розв'язку одновимірної лінійної крайової задачі (20);
- обчислення коефіцієнтів вигляду (19) з використанням компонент знайденої вектор-функції $\mathbf{U}_x^{(j)}$;
- знаходження вектор-функції $\mathbf{U}_y^{(j)}$ як розв'язку одновимірної лінійної крайової задачі (21);
- перевірка точності обчислення трансформант-ядер $\mathbf{U}_x^{(j)}$, $\mathbf{U}_y^{(j)}$ за вибраним критерієм і, якщо задана точність досягнута, тоді побудова шуканого вектора переміщень \mathbf{U} за оберненим інтегральним перетворенням (15) або, в протилежному випадку, перехід до наступного $(j+1)$ -го наближення.

За початкове наближення $\mathbf{U}_y^{(0)} = \{r_{yi}^{(0)}\}_{i=1, \dots, I}$, $r = u, v, w$, можуть бути використані будь-які лінійно незалежні (за i) функції. Розв'язання окремої одновимірної задачі проводиться чисельно методом ортогональної прогонки. Завершення ітераційного процесу розв'язання системи (20), (21) при фіксо-

ваній кількості членів I в (15) реалізується за відомим критерієм прикладної математики:

$$\left| 1 - \frac{\gamma^{(j)}}{\gamma^{(j-1)}} \right| \leq \varepsilon_1, \quad (22)$$

де $\gamma^{(j)} = \max_{q=u,v,w} \{\gamma_q^{(j)}\}$, $\gamma_q^{(j)}$ – максимальне або середньоквадратичне значення функції $F_{rl}^{(j)}$ в оберненому перетворенні (15), ε_1 – задана точність обчислення трансформант-ядер $\mathbf{U}_x^{(j)}$, $\mathbf{U}_y^{(j)}$. Задана точність ε_2 остаточного розв'язку задачі (7)–(9) досягається шляхом утримання в (15) більшої кількості членів I . Контроль за її виконанням здійснюється за умовою:

$$\left| 1 - \frac{\gamma^{(I)}}{\gamma^{(I-1)}} \right| \leq \varepsilon_2. \quad (23)$$

Слід зазначити, що аналогічна структура у вигляді спільної системи, що об'єднує одновимірні задачі за різними змінними, формується і в інших підходах, зокрема при застосуванні узагальненого методу Канторовича – Власова. Аналітичний розв'язок такої системи у випадку бігармонічного рівняння наведено в [19].

Закінчивши висвітлення основних положень запропонованого узагальнення *МСІП**, відмітимо його особливості порівняно з класичною формою цього методу.

Класичний *МСІП* орієнтований на одержання точного аналітичного розв'язку задачі у вигляді нескінченного ряду за певних обмежень на її постановку. Обмеження стосуються вибору ядер перетворення як власних функцій задачі Штурма – Ліувілля за змінною перетворення. Це, з одного боку, дає змогу достатньо просто одержати функції трансформанти з незв'язаної системи диференціальних рівнянь, а з другого – суттєво обмежує клас задач, до яких можна застосувати цей метод.

Узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень дає наближений розв'язок задачі у вигляді скінченного відрізка ряду оберненого інтегрального перетворення, але без будь-яких додаткових обмежень на її постановку. І трансформанти, і ядра визначаються із взаємозв'язаної системи двох інтегральних перетворень за різними змінними області. Це створює деякі ускладнення її розв'язання, однак не є принциповим при сучасному розвитку чисельного аналізу і обчислювальної техніки, але дозволяє істотно розширити клас задач, які можна розв'язувати класичними *МСІП*.

2.2. Нелінійна крайова задача ($\mathbf{g} \neq 0$, $\mathbf{s}_{xp} \neq 0$, $\mathbf{s}_{yp} \neq 0$ в (4)–(6)):

$$\mathbf{D}(\mathbf{U}) = \mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{g} + \mathbf{f} = 0, \quad (x, y) \in \Omega; \quad (24)$$

$$\mathbf{G}_{xp}(\mathbf{U}) = \mathbf{R}_{xp}\mathbf{U} + \mathbf{s}_{xp} + \boldsymbol{\Phi}_{xp} = 0, \quad x = x_p, \quad p = 0, 1, \quad (25)$$

$$\mathbf{G}_{yp}(\mathbf{U}) = \mathbf{R}_{yp}\mathbf{U} + \mathbf{s}_{yp} + \boldsymbol{\Phi}_{yp} = 0, \quad y = y_p, \quad p = 0, 1. \quad (26)$$

Методика розв'язання нелінійних двовимірних крайових задач для пологих оболонок при докритичних навантаженнях базується, як уже зазначалося, на раціональному поєднанні методу лінеаризації у формі Ньютона – Канторовича – Рафсона [1] та узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень *МСІП**.

Метод Ньютона – Канторовича – Рафсона (метод квазілінеаризації) має ряд переваг порівняно з іншими методами лінеаризації. Ці переваги стосуються, зокрема, алгоритмічності і квадратичної збіжності ітераційного процесу, простоти вибору початкового наближення, широти області застосування, яка співпадає з областю опуклості оператора задачі і, як показано в [4], – з докритичною стадією деформування оболонок.

Загальну схему розв'язання нелінійної задачі (24)–(26) можна подати як послідовне виконання таких процедур.

- 1°. Зведення нелінійної задачі до ітеративної послідовності лінійних крайових задач за методом квазілінеаризації.
- 2°. Розв'язання окремої лінеаризованої задачі за МСПП*.
- 3°. Побудова єдиного ітераційного процесу, що включає визначення трансформант-ядер із системи двох інтегральних перетворень та ітерації з лінеаризації вихідної задачі.

Розглянемо ці процедури детально.

1°. Застосування методу квазілінеаризації до вихідної нелінійної задачі (24)–(26) зводить її до ітераційної послідовності лінеаризованих двовимірних крайових задач такого вигляду ($n = 1, 2, \dots$ – параметр лінеаризації):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{U}^{(n)}, \mathbf{U}^{(n-1)}, \dots) &= \mathbf{L}\mathbf{U}^{(n)} + J_{,\mathbf{U}}(\mathbf{U}^{(n)} - \mathbf{U}^{(n-1)}) + J_{,\mathbf{U},x}(\mathbf{U}_{,x}^{(n)} - \mathbf{U}_{,x}^{(n-1)}) + \\ &+ J_{,\mathbf{U},xx}(\mathbf{U}_{,xx}^{(n)} - \mathbf{U}_{,xx}^{(n-1)}) + J_{,\mathbf{U},y}(\mathbf{U}_{,y}^{(n)} - \mathbf{U}_{,y}^{(n-1)}) + \\ &+ J_{,\mathbf{U},xy}(\mathbf{U}_{,xy}^{(n)} - \mathbf{U}_{,xy}^{(n-1)}) + J_{,\mathbf{U},xy}(\mathbf{U}_{,xy}^{(n)} - \mathbf{U}_{,xy}^{(n-1)}) + \\ &+ \dots + \mathbf{g}(\mathbf{U}^{(n-1)}, \mathbf{U}_{,x}^{(n-1)}, \dots) + \mathbf{f} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{xp}(\mathbf{U}^{(n)}, \mathbf{U}^{(n-1)}, \dots) &= \mathbf{R}_{xp}\mathbf{U}^{(n)} + I_{,\mathbf{U}}(\mathbf{U}^{(n)} - \mathbf{U}^{(n-1)}) + \\ &+ I_{,\mathbf{U},x}(\mathbf{U}_{,x}^{(n)} - \mathbf{U}_{,x}^{(n-1)}) + I_{,\mathbf{U},y}(\mathbf{U}_{,y}^{(n)} - \mathbf{U}_{,y}^{(n-1)}) + \Phi_{xp} = 0, \\ x &= x_p, \quad p = 0, 1, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{yp}(\mathbf{U}^{(n)}, \mathbf{U}^{(n-1)}, \dots) &= \mathbf{R}_{yp}\mathbf{U}^{(n)} + T_{,\mathbf{U}}(\mathbf{U}^{(n)} - \mathbf{U}^{(n-1)}) + \\ &+ T_{,\mathbf{U},x}(\mathbf{U}_{,x}^{(n)} - \mathbf{U}_{,x}^{(n-1)}) + T_{,\mathbf{U},y}(\mathbf{U}_{,y}^{(n)} - \mathbf{U}_{,y}^{(n-1)}) + \Phi_{yp} = 0, \\ y &= y_p, \quad p = 0, 1, \end{aligned} \quad (29)$$

де $\mathbf{D}(\mathbf{U}^{(n)}, \mathbf{U}^{(n-1)}, \dots)$, $\mathbf{G}_{xp}(\mathbf{U}^{(n)}, \mathbf{U}^{(n-1)}, \dots)$, $\mathbf{G}_{yp}(\mathbf{U}^{(n)}, \mathbf{U}^{(n-1)}, \dots)$ – диференціальні або алгебраїчні оператори лінеаризованої задачі, що містять шукані функції двох послідовних наближень $\mathbf{U}^{(n)}$ та $\mathbf{U}^{(n-1)}$ і визначені відповідно в заданій області та на її границі;

$$\begin{aligned} J_{,\mathbf{U},xy} &= \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_{j,xy}} \right) \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^{(n-1)}}, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ I_{,\xi} &= \left(\frac{\partial s_{xpi}}{\partial u_{j,\xi}} \right) \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^{(n-1)}}, \quad T_{,\xi} = \left(\frac{\partial s_{ypi}}{\partial u_{j,\xi}} \right) \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^{(n-1)}}, \\ i &= 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, 2, 3, \quad \xi = 0, x, y. \end{aligned}$$

2°. Розв'язання окремої лінеаризованої задачі з побудованої послідовності (27)–(29) на кожному фіксованому кроці ітераційного процесу квазілінеаризації ($n = \text{fixed}$) здійснюється за МСПП* (п. 2.1).

Згідно з основними положеннями цього методу обернене інтегральне перетворення для шуканих переміщень (див. (15)) запишеться таким чином:

$$\begin{aligned} r^{(n)}(x, y) &= F_{rI}^{(n)} \cong \sum_{i=1,2,\dots,I} r_{xi}^{(n)}(x) r_{yi}^{(n)}(y), \\ r_{zi}^{(n)} &= (u_{zi}^{(n)}(z), v_{zi}^{(n)}(z), w_{zi}^{(n)}(z)), \quad z = x, y, \end{aligned} \quad (30)$$

а трансформанти-ядра визначатимуться із системи вигляду (16), (17), яка при застосуванні ітераційного процесу типу Лібмана – Гаусса – Зейделя матиме вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{(x)}^{(n-1)(j-1)} \mathbf{U}_x^{(n)(j)} + \mathbf{f}_{(x)}^{(n-1)(j-1)} &= 0, & x \in (x_0, x_1), \\ \mathbf{R}_{xp(x)}^{(n-1)(j-1)} \mathbf{U}_x^{(n)(j)} + \mathbf{\Phi}_{xp(x)}^{(n-1)(j-1)} &= 0, & x = x_p, \quad p = 0, 1, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{(y)}^{(n-1)(j)} \mathbf{U}_y^{(n)(j)} + \mathbf{f}_{(y)}^{(n-1)(j)} &= 0, & y \in (y_0, y_1), \\ \mathbf{R}_{yp(y)}^{(n-1)(j)} \mathbf{U}_y^{(n)(j)} + \mathbf{\Phi}_{yp(y)}^{(n-1)(j)} &= 0, & y = y_p, \quad p = 0, 1, \end{aligned} \quad (32)$$

(верхніми індексами в дужках відмічені параметри двох різних ітераційних процесів: лінеаризації (n) та Лібмана – Гаусса – Зейделя (j)).

Таким чином, визначення трансформант-ядер $\mathbf{U}_x^{(n)(j)}$, $\mathbf{U}_y^{(n)(j)}$ двох інтегральних перетворень за різними змінними області реалізується в результаті двох ітераційних процесів: зовнішнього процесу лінеаризації (параметр n) і внутрішнього процесу Лібмана – Гаусса – Зейделя розв'язання системи одновимірних задач (параметр j).

3°. Слід зауважити, що в цьому класі задач теорії оболонок для одержання розв'язку нелінійної задачі (24)–(26) є можливість побудувати єдиний ітераційний процес. Цей процес об'єднує обидва вказані вище типи ітерацій: лінеаризації вихідної задачі (параметр n) і розв'язання системи одновимірних задач за процесом Лібмана – Гаусса – Зейделя (параметр j):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_{(x)}^{(m-1)} \mathbf{U}_x^{(m)} + \tilde{\mathbf{f}}_{(x)}^{(m-1)} &= 0, & x \in (x_0, x_1), \\ \tilde{\mathbf{R}}_{xp(x)}^{(m-1)} \mathbf{U}_x^{(m)} + \tilde{\mathbf{\Phi}}_{xp(x)}^{(m-1)} &= 0, & x = x_p, \quad p = 0, 1, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_{(y)}^{(m-1)} \mathbf{U}_y^{(m)} + \tilde{\mathbf{f}}_{(y)}^{(m-1)} &= 0, & y \in (y_0, y_1), \\ \tilde{\mathbf{R}}_{yp(y)}^{(m-1)} \mathbf{U}_y^{(m)} + \tilde{\mathbf{\Phi}}_{yp(y)}^{(m-1)} &= 0, & y = y_p, \quad p = 0, 1, \end{aligned} \quad (34)$$

($m = 1, 2, \dots$ – параметр спільного процесу).

Реалізація побудованого процесу проводиться аналогічно до того, як це здійснюється у випадку лінійної задачі (20), (21), з тією лише відмінністю, що в m -му наближенні для розв'язання задачі, наприклад, (33) при визначенні трансформант $\mathbf{U}_x^{(m)}$ із попереднього ($m - 1$)-го наближення використовуються не тільки ядра $\mathbf{U}_y^{(m-1)}$, а й трансформанти $\mathbf{U}_x^{(m-1)}$, оскільки їхні складові містяться в коефіцієнтах і вільних членах лінеаризованої задачі. Те саме маємо при розв'язанні задачі (34).

Початкове наближення для цього спільного ітераційного процесу можна вибрати таким чином: за вектор-функцію трансформант $\mathbf{U}_x^{(0)}$ вибирається нульовий вектор $\mathbf{U}_x^{(0)} = \{r_{xi}^{(0)}(x)\} \equiv \mathbf{0}$, а для компонент вектор-функції ядер $\mathbf{U}_y^{(0)} = \{r_{yi}^{(0)}(y)\}$ зазвичай приймаються лінійно незалежні за i функції (тригонометричні, степеневі, поліноміальні тощо). Тоді одновимірна задача (33) у першому наближенні відповідає лінійній постановці вихідної задачі.

Критерій завершення ітераційного процесу розв'язання системи (33), (34) з визначення трансформант-ядер інтегральних перетворень є таким самим, що і в лінійній задачі (див. (22)).

Після того, як обчислення трансформант-ядер при фіксованій кількості членів I одержано з заданою точністю ε_1 , конструюється остаточний роз-

в'язок нелінійної задачі (24)–(26) за оберненим інтегральним перетворенням (30). Досягнення заданої точності його обчислення ε_2 здійснюється шляхом збільшення кількості членів $I = 1, 2, \dots, I + 1$ в (30) за критерієм (23).

3. Тестування розробленого підходу. Розроблений підхід, що ґрунтується на узагальненні методу скінченних інтегральних перетворень, не має наразі строгого теоретичного обґрунтування щодо умов існування розв'язку, дедуктивної оцінки збіжності, її швидкості, точності одержаних результатів тощо. Практичне обґрунтування підходу, досить важливе при розв'язанні прикладних задач, проводиться в роботі індуктивно із залученням відомих прийомів прикладної математики, зокрема, порівнянням з аналітичними розв'язками окремих задач або з результатами, одержаними іншими методами.

Тестування підходу в класі лінійних задач механіки деформівного твердого тіла з невідокремлюваними змінними було наведено в [3] для неоднорідних прямокутних пластин при різних навантаженнях (двовимірний випадок) і в [2] для анізотропної призми з низьким порядком симетрії пружних властивостей матеріалу (тривимірний випадок).

У цій статті основна увага зосереджена на оцінці правомірності застосування запропонованого підходу в класі нелінійних задач статички пологих оболонок.

Необхідними умовами одержання розв'язку таких задач за МСІП*, як випливає з його основних положень (п. 2), є:

- збіжність побудованого єдиного процесу розв'язання системи інтегральних перетворень щодо визначення невідомих трансформант-ядер при їхній фіксованій кількості I , який об'єднує лінеаризацію Ньютона – Канторовича – Рафсона та розв'язання окремої лінеаризованої задачі за процедурою типу Лібмана – Гаусса – Зейделя (процес (33), (34), $I = \text{fixed}$);
- збіжність остаточного розв'язку задачі при збільшенні кількості I трансформант-ядер, що утримуються в оберненому інтегральному перетворенні (30) ($I = 1, 2, \dots, I + 1$).

Виконання цих умов і порівняння з результатами інших авторів ілюструється на задачах, запозичених із робіт [7, 28].

Приклад 1. Розглядається полога ізотропна панель сталої товщини h , що в плані займає область $a \times b$ і має кривини k_x і k_y уздовж координатних осей Ox і Oy відповідно. Оболонка шарнірно оперта по всьому контуру і знаходиться під дією рівномірно розподіленого нормального навантаження інтенсивності q , $q_n(x, y) = q$, яке направлене до центра кривини. Кривину панелі і діюче навантаження будемо характеризувати, як і в [7], безрозмірними параметрами $k_x^* = \frac{k_x b^2}{h}$, $k_y^* = \frac{k_y b^2}{h}$, $q^* = \frac{qb^4}{Eh^4}$ (E – модуль Юнга).

На прикладі цієї оболонки проілюструємо залежність збіжності єдиного ітераційного процесу (33), (34) від кроку ітерації m для різної кількості I трансформант-ядер, що утримуються в оберненому перетворенні (30). Ці дані для максимального безрозмірного прогину $\zeta = \frac{w}{h}$ квадратної в плані сферичної панелі з кривинами $k_x^* = k_y^* = 10$ при навантаженні $q^* = 30.82$ наведено в табл. 1, а з кривинами $k_x^* = k_y^* = 15$ при $q^* = 96.42$ – в табл. 2. Для порівняння у таблицях також подано результати, отримані в роботі [7], і відносну відмінність максимальних значень прогинів за розробленою методикою і за методом Рітца [7] ($\varepsilon, \%$).

Таблиця 1. Залежність значень безрозмірного прогину $\zeta = w/h$ від кроку ітерації m для різної кількості I трансформант-ядер в (30) (квадратна в плані сферична панель, $k_x^* = k_y^* = 10$, $q^* = 30.82$).

m	$\zeta = w/h$				
	I			[7]	$\varepsilon, \%$
	1	2	3		
1	0.4430	0.4580	0.4610	0.49	2.6
2	0.4431	0.4583	0.4770		
3	0.4806	0.4758	0.4772		
4	0.4786	0.4771	0.4772		
5	0.4795	0.4772			
6	0.4795	0.4772			

Таблиця 2. Залежність значень безрозмірного прогину $\zeta = w/h$ від кроку ітерації m для різної кількості I трансформант-ядер в (30) (квадратна в плані сферична панель, $k_x^* = k_y^* = 15$, $q^* = 96.42$).

m	$\zeta = w/h$				
	I			[7]	$\varepsilon, \%$
	1	2	3		
1	0.7330	0.7960	0.8080	0.99	4
2	0.9363	0.7976	0.8056		
3	1.006	0.9215	0.9527		
4	1.055	1.017	1.031		
5	1.092	1.031	1.031		
6	1.097	1.031			

Процес збіжності результатів розв'язання нелінійної задачі для прямокутної в плані циліндричної панелі з відношенням сторін $\lambda = \frac{b}{a} = 2/3$, з кривиною $k_y^* = 10$ при $q^* = 25.53$ ілюструють дані, наведені в табл. 3.

Таблиця 3. Залежність значень безрозмірного прогину $\zeta = w/h$ від кроку ітерації m для різної кількості I трансформант-ядер в (30) (прямокутна в плані циліндрична панель, $\lambda = 2/3$, $k_y^* = 10$, $q^* = 25.53$).

m	$\zeta = w/h$				
	I			[7]	$\varepsilon, \%$
	1	2	3		
1	3.115	1.933	2.003	1.94	1.8
2	2.512	2.014	1.948		
3	2.407	1.975	1.975		
4	2.268	1.975	1.975		
5	1.807				
6	1.807				

У подальших розрахунках для панелей різних кривин і різних відносних розмірів в плані проводиться порівняння результатів, одержаних за розробленим підходом і за методом Рітца в [7] (див. табл. 4).

Таблиця 4. Порівняння результатів, одержаних за розробленим підходом і за методом Рітца [7] для оболонок різних кривин k_x^* , k_y^* і розмірів в плані $\lambda = 1, 2/3, 0.5$.

λ	k_x^*	k_y^*	q^*	ζ	[7]	$\varepsilon, \%$
1	2	2	45.4	1.473	1.45	1.6
	4	4	99.24	2.501	2.44	2.4
	8	8	39.59	2.060	2.01	2.5
2/3	0	20	19.69	1.029	1.00	2.9
0.5	0	10	30.18	2.601	2.56	1.5
0.5	0	20	14.84	1.572	1.54	2.1

Як видно з даних, наведених у табл. 1–табл. 3, єдиний ітераційний процес розв’язання вихідної нелінійної задачі збігається достатньо швидко ($m = 5-6$) при вибраних значеннях кількості I трансформант-ядер в оберненому перетворенні (30) і має стає значення уже при $I = 2, I = 3$. Відмінність у порівнюваних результатах (див. табл. 4 і останні стовпчики в табл. 1 – табл. 3) знаходиться у межах 3-4%.

Приклад 2. Розглядається ізотропна квадратна в плані циліндрична панель $a \times a$ сталої товщини h зі стрілою підйому f_x при рівномірному зовнішньому тиску q . Дюгові контури панелі вільні від навантажень ($y = 0; a : T_2 = S = Q_2 = M_2 = 0$), а на прямолінійних краях приймаються умови жорсткого шарніру ($x = 0; a : u = v = w = M_1 = 0$).

Визначається критичне граничне значення діючого тиску q_{cr} , при якому панель втрачає стійкість за «хлопком».

Зауважимо, що область застосування методу квазілінеаризації автоматично обмежується докритичною стадією деформування, так що і побудований єдиний ітераційний процес (33), (34) збігається лише в цій області. Цей факт, як показано в [4], можна використати для наближеного визначення верхнього критичного значення навантаження q_{cr} за таким обчислювальним критерієм: $q_{cr} \in [q_-, q_+)$, де q_- – значення навантаження, при якому ітеративна процедура (33), (34) ще збігається, а q_+ – значення навантаження, при якому цей процес є розбіжним.

За цим обчислювальним критерієм досліджується стійкість циліндричної розглядуваної панелі. Результати наводяться для таких вихідних даних [28]: $a = 2$ м, $f_x = 0.1$ м, $h = 0.02$ м, $E = 210$ ГПа, $\mu = 0.3$.

За проведеними розрахунками одержано

$$q_- = 0.5683 \text{ Н/мм}^2, \quad q_+ = 0.5684 \text{ Н/мм}^2,$$

тобто шукане критичне значення знаходиться в таких межах:

$$0.5683 \leq q_{cr} < 0.5684 \text{ [Н/мм}^2\text{]}.$$

У роботі [28] цю задачу було розв’язано методом скінченних елементів (МСЕ, програма ANSYS) і одержано, що $q_{cr} = 0.576$ Н/мм².

Таким чином, різниця між одержаними значеннями критичного тиску за МСЕ і запропонованим підходом не перевищує 1.5%.

Наведені тут приклади тестування розробленого підходу збільшують ступінь достовірності одержаних на його основі результатів в класі розглядуваних задач.

4. Аналіз стійкості пологих панелей з різними комбінаціями вільного краю і жорсткого закріплення граничного контуру. Слід зазначити, що дослідження стійкості пологих оболонок зазвичай обмежувалось і обмежується умовами шарнірного опирання, жорсткого закріплення або їхньою комбінацією на граничному контурі [7, 9, 21, 27]. Практика будівництва

споруд різного призначення (промислових об'єктів, залізничних вокзалів, ангарів тощо) нерідко стикається з випадками, коли при використанні пологих панелей для покриття чи перекриття окремі їхні ділянки мають бути вільними від будь-яких обмежень (кутові навіси, навіси прямокутної форми з одним вільним краєм, консолі тощо). Це приводить до необхідності дослідження всіх аспектів стаціонарного деформування (НДС, коливаль, стійкості) при комбінації різних умов закріплення границі, включаючи наявність вільного краю. Таких робіт зі стійкості пологих оболонок у літературі обмаль [28].

На прикладі квадратної в плані сферичної панелі, що розглядалася в **Прикладі 1** (див. п. 3), досліджується її стійкість при зовнішньому тиску і різних комбінаціях вільного і жорстко закріпленого країв.

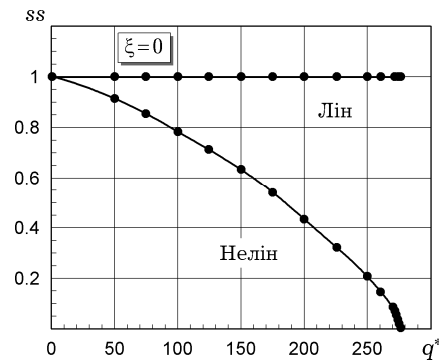
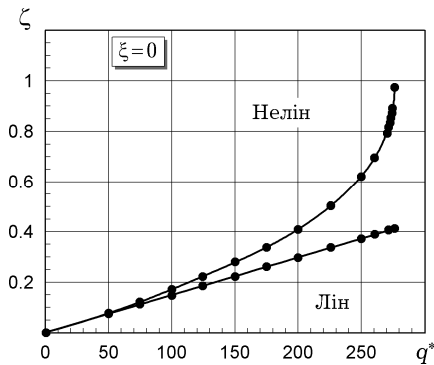
Розрахунки виконано для різних значень параметра $\xi = \ell f / \ell \ell$, що характеризує відношення довжини вільної від навантажень ділянки границі (ℓf) до довжини всього контуру ($\ell \ell$): $\xi = 0, 1/4, 1/2, 3/4$. Як і раніше,

введено безрозмірні параметри максимального прогину $\zeta = \frac{w}{h}$, кривин

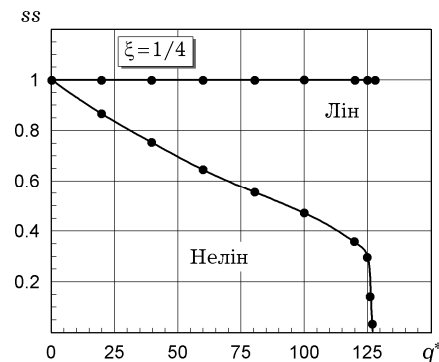
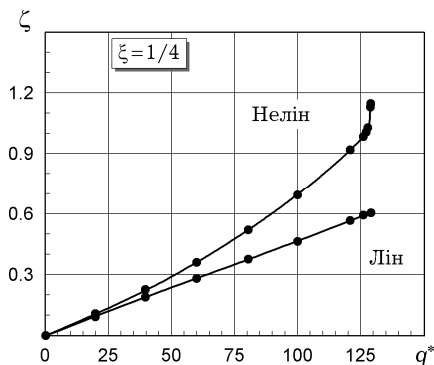
$$k_x^* = \frac{k_x b^2}{h}, \quad k_y^* = \frac{k_y b^2}{h} \quad \text{і навантаження} \quad q^* = \frac{q b^4}{E h^4}.$$

Розглянуто такі чотири випадки граничних умов:

- $n = 1 : \xi = 0$ (всі сторони панелі жорстко закріплені);
- $n = 2 : \xi = 1/4$ (одна сторона вільна, інші закріплені);
- $n = 3 : \xi = 1/2$ (дві суміжні сторони вільні, дві інші закріплені);
- $n = 4 : \xi = 3/4$ (три сторони вільні, одна закріплена (консоль)).



а) $n = 1 : \xi = 0$.



б) $n = 2 : \xi = 1/4$.

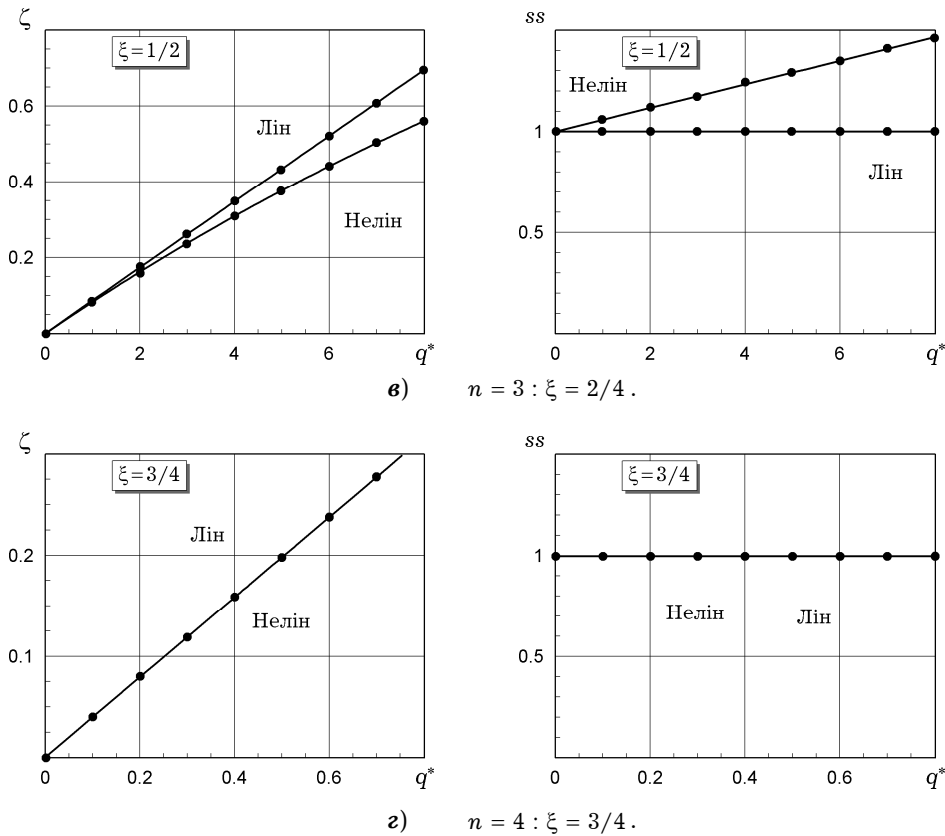


Рис. 1. Залежності $\zeta = \zeta(q^*)$ («прогин – навантаження») та $ss = ss(q^*)$ («статична жорсткість – навантаження») для різних випадків закріплення граничного контуру.

Результати дослідження представлені у вигляді традиційної залежності «прогин – навантаження» $\zeta = \zeta(q^*)$ і відповідної залежності відносної статичної жорсткості оболонки від навантаження $ss = ss(q^*) = \frac{dq^*}{d\zeta} / ss(0)$, де $ss(0)$ – жорсткість оболонки без навантаження). Ці дані для оболонки з кривинами $k_x^* = k_y^* = 20$ наведено на рис. 1а – рис. 1г для $\zeta = \zeta(q^*)$ (лівий стовпчик) і для $ss = ss(q^*)$ (правий стовпчик).

Як бачимо з рисунків, наявність вільного краю для розглянутих випадків граничних умов якісно впливає на наведені залежності. При повністю закріпленому граничному контурі (рис. 1а) і при наявності тільки однієї вільної сторони (рис. 1б) оболонка схильна втрачати стійкість «за хлопком» відповідно при $q_{cr}^* = 275$ і $q_{cr}^* = 128$, а статична жорсткість зі збільшенням навантаження природно спадає до нуля. У двох інших випадках: закріплення двох суміжних сторін і консольній панелі картина цих залежностей має якісно інший характер: статична жорсткість зростає (рис. 1в) або не змінюється (рис. 1г) і відповідно втрата стійкості «за хлопком» таким оболонкам не загрожує.

Одержані результати фізично осмислені і дають змогу оцінити наявність вільної ділянки границі на величину критичних граничних навантажень. При тій самій кривині панелі незначне ослаблення контуру (на 25%) приводить до суттєвого (більш як удвічі) зменшення критичного граничного тиску.

Висновки. У роботі запропоновано новий підхід до розв'язання двовимірних задач статички пологих оболонок на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень (*МСІП**, лінійна постановка) та його поєднанні з методом лінеаризації за Ньютоном – Канторовичем – Рафсоном (метод квазілінеаризації, нелінійна постановка).

Особливості цього підходу можна визначити так.

- Лінійна постановка:
 - суть *МСІП** полягає у побудові двох інтегральних перетворень за різними змінними області, так що ядра одного перетворення є трансформантами другого, і навпаки;
 - ядра-трансформанти цих перетворень визначаються з системи двох взаємозв'язаних одновимірних задач, для розв'язання якої використано ітераційний процес, що є аналогом процесу Лібмана – Гаусса – Зейделя в лінійній алгебрі.
- Нелінійна постановка:
 - розв'язання лінеаризованих задач, одержаних за методом Ньютона – Канторовича – Рафсона, проводиться за *МСІП** із дотриманням всіх його процедур;
 - в результаті їх виконання побудовано єдиний ітераційний процес розв'язання вихідної нелінійної задачі, що об'єднує ітерації двох типів: лінеаризації нелінійної задачі (процес Ньютона – Канторовича – Рафсона) і розв'язання окремої лінеаризованої задачі в *МСІП** (процес Лібмана – Гаусса – Зейделя).
 - шуканий розв'язок нелінійної задачі визначається як обернене перетворення за знайденими трансформантами-ядрами двох вказаних інтегральних перетворень.
- Побудований єдиний ітераційний процес розв'язання вихідної нелінійної задачі збігається досить швидко (менше 10-ти ітерацій у загальному випадку) і дозволяє одержати шуканий розв'язок задачі при невеликому (до 5-ти членів) числі задіяних трансформант-ядер в оберненому інтегральному перетворенні.

Наведені окремі приклади тестування розробленого підходу підтвердили правомірність його застосування в розглянутому класі нелінійних задач статички пологих оболонок.

Проведено аналіз стійкості пологих панелей при комбінації жорстко закріплених і вільних від навантаження ділянок граничного контуру. Показано, що на характер залежності «прогин – навантаження» якісно впливає наявність вільної ділянки контуру, її протяжність (довжина) та розташування.

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – Москва: Мир, 1968. – 183 с.
2. Беспалова Е. И. Обобщенный метод конечных интегральных преобразований в задачах статички анизотропных призм // Прикл. механика. – 2018. – **54**, № 1. – С. 52–67.
Те саме: *Bespalova E. I. Generalized method of finite integral transforms in static problems for anisotropic prisms // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, No. 1. – P. 41–55. – <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0858-2>.*
3. Беспалова Е. И. О методе конечных интегральных преобразований в задачах статички неоднородных пластин // Прикл. механика. – 2014. – **50**, № 6. – С. 55–68.
Те саме: *Bespalova E. I. Finite integral transform method in static problems for inhomogeneous plates // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, No. 6. – P. 651–663. – <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0663-5>.*
4. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. О численном решении нелинейных краевых задач статички гибких оболочек // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 6. – С. 44–48.

5. Гринберг Г. А. Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных // Изв. АН СССР. Сер. физ. – 1946. – **10**, № 2. – С. 141–168.
6. Дыхта В. В. Метод интегральных преобразований в волновых задачах гидроакустики. – Киев: Наук. думка, 1981. – 285 с.
7. Корнишин М. С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. – Москва: Наука, 1964. – 192 с.
8. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – Москва: Физматгиз, 1962. – 767 с.
9. Кривенко О. П. Вплив нагріву на стійкість і власні коливання сферичної панелі при зміні умов комбінованого закріплення контуру // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 96. – С. 48–65.
10. Кубенко В. Д. Нестационарное деформирование упругого слоя при смешанных граничных условиях // Прикл. механика. – 2016. – **52**, № 6. – С. 3–25.
Te same: Kubenko V. D. Nonstationary deformation of an elastic layer with mixed boundary conditions // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, No. 6. – P. 563–580. – <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0777-z>.
11. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 599 с.
12. Острик В. І. Симетрія інверсії розв'язку першої крайової задачі теорії пружності для півпростору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 1. – С. 112–126.
Te same: Ostriuk V. I. Inversion symmetry of the solution to the first boundary-value problem of the elasticity theory for a half space // J. Math. Sci. – 2021. – **258**, No. 4. – P. 507–526. – <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05563-4>.
13. Сеницкий Ю. Э. Динамика неоднородной непологой сферической оболочки // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 6. – С. 144–157.
Te same: Senitskii Yu. E. Dynamics of inhomogeneous non-shallow spherical shells // Mech. Solids. – 2002. – **37**, No. 6. – P. 123–133.
14. Сеницкий Ю. Э. Метод конечных интегральных преобразований – обобщение классической процедуры разложения по собственным вектор-функциям // Изв. Саратов. ун-та. Новая сер.: Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 3(1). – С. 61–89.
15. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1979. – 264 с.
16. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 403 с.
17. Чибиряков В. К., Смоляр А. М. Об одном обобщении метода конечных интегральных преобразований в теории толстых пластин // Сопротивление материалов и теория сооружений – 1983. – Вып. 42. – С. 80–86.
18. An D., Xu D. Ni Z., Su Y., Wang Bo, Li R. Finite integral transform method for analytical solutions of static problems of cylindrical shell panels // Eur. J. Mech. A-Solids. – 2020. – **83**. – Art. 104033.
– <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104033>.
19. Beshpalova E. I., Kitaygorodskii A. B. Advanced Kantorovich method for biharmonic problems // J. Eng. Math. – 2003. – **46**, No. 3-4. – P. 213–226.
– <https://doi.org/10.1023/a:1025090525280>.
20. Bidgoli A. M. M., Daneshmehr A. R., Kolahchi R. Analytical bending solution of fully clamped orthotropic rectangular plates resting on elastic foundations by the finite integral transform method // J. Appl. Comput. Mech. – 2015. – **1**, No. 2. – P. 52–58. – <https://doi.org/10.22055/JACM.2014.10742>.
21. Van Campen D. H., Bouwman V. P., Zhang G. Q., Zhang J., ter Weeme B. J. W. Semi-analytical stability analysis of doubly-curved orthotropic shallow panels – considering the effects of boundary conditions // Int. J. NonLinear Mech. – 2002. – **37**, No. 4-5. – P. 659–667. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(01\)00090-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00090-7).
22. Cotta R. M., Michailov M. D. Integral transform method // Appl. Math. Model. – 1993. – **17**, No. 3. – P. 156–161. – [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(93\)90041-E](https://doi.org/10.1016/0307-904X(93)90041-E).
23. Dernek N. On the solution of the E.P.D. equation using finite integral transformations // Turk. J. Math. – 1997. – **21**, No. 3. – P. 317–324.
24. Eringen A. C. A transform technique for boundary-value problems in fourth-order partial differential equations // Quart. J. Math. – 1955. – **6**, No. 1. – P. 241–249.
– <https://doi.org/10.1093/qmath/6.1.241>.
25. Eringen A. C. The finite Sturm – Liouville transform // Quart. J. Math. – 1954. – **5**, No. 1. – P. 120–131.

26. *Gasymov É. A.* Application of the finite integral transform method to solving a mixed problem with integro-differential conditions for a nonclassical equation // *Differ. Equat.* – 2011. – **47**, No. 3. – P. 319–332.
– <https://doi.org/10.1134/S0012266111030037>.
27. *Li R., Zhong Y., Tian B., Liu Y.* On the finite integral transform method for exact bending solutions of fully clamped orthotropic rectangular thin plates // *Appl. Math. Lett.* – 2009. – **22**, No. 12. – P. 1821–1827.
– <https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.07.003>.
28. *Psozny M., Havran J.* Stability analysis of an open shallow cylindrical shell with imperfection under external pressure // *MATEC Web Conf.: Proc. of “Dynamics of Civil Engineering and Transport Structures and Wind Engineering – DYN-WIND’2017”.* – 107. – 2017. – P. 1–6.
– <https://doi.org/10.1051/mateconf/201710700052>.
29. *Ruan J., Feng X., Zhang G., Wang Y., Fang D.* Dynamic thermoelastic analysis of a slab using finite integral transformation method // *AIAA Journal.* – 2010. – **48**, No. 8. – P. 1833–1839. – <https://doi.org/10.2514/1.J050377>.
30. *Suneet Singh, Prashant K. Jain, Rizwan-uddin.* Finite integral transform method to solve asymmetric heat conduction in a multilayer annulus with time-dependent boundary conditions // *Nuclear Eng. Des.* – 2011. – **241**, No. 1. – P. 144–154.
– <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2010.10.010>.
31. *Sneddon I. N.* The use of integral transforms. – New York: McGraw-Hill, 1972. – 539 p.
32. *Tranter C. J.* Integral transforms in mathematical physics. – New York: Wiley, 1951. – x+118 p.

THE GENERALIZED FINITE INTEGRAL TRANSFORMATIONS METHOD IN LINEAR AND NONLINEAR STATIC PROBLEMS FOR SHALLOW SHELLS

The new approach to solving two-dimensional linear and nonlinear boundary-value static problems of shallow shells based on the generalized method of finite integral transformations and Newton – Kantorovich – Raphson method of linearization is developed. In the linear case, the application of the generalized method of finite integral transformations is reduced to construction of two integral transformations with respect to different variables of domain in assumption that the kernels of one transformation are transforms of the other one and vice versa. To solve the obtained system of two interconnected one-dimensional problems, an iterative procedure, which represents analog of the Libman – Gauss – Seidel procedure in linear algebra, is used. In the nonlinear case, the rational combination of the Newton – Kantorovich – Raphson method of linearization and the generalized method of finite integral transformations makes it possible to construct unified iterative process combining two kinds: linearization of nonlinear problem (Newton – Kantorovich – Raphson method) and solving of the single linearized problem (Libman – Gauss – Seidel method). The process constructed is characterized by rapid convergence (the number of iterations is within the limits of one order) and small quantity of transform-kernels in inverse transformation (3÷5), which assures stable solving of original problem. The examples of testing the approach developed and investigation of stability problems for shallow panels under various conditions of fastening of a boundary contour are presented.

Key words: *generalized method of finite integral transformations, Newton – Kantorovich – Raphson method of linearization, statics of shallow shells, linear and nonlinear boundary-value problems, testing, analysis.*