

## АНАЛІЗ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ПРУЖНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ ІЗ ВНУТРІШНІМИ ТРІЩИНАМИ

*Проведено огляд стану досліджень задач динамічного навантаження пружних кусково-однорідних тіл з плоско-паралельними поверхнями поділу матеріалів та внутрішніми тріщинами. З використанням гранично-інтегрального формулювання вказаних тривимірних задач описано ефекти впливу різнотипних крайових умов контакту на поверхнях поділу матеріалів, біматеріальної і шаруватої структур композитів на динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень в околі дефектів.*

**Ключові слова:** тривимірні динамічні задачі, кусково-однорідні тіла, плоско-паралельні поверхні поділу матеріалів, некласичні крайові умови контакту, внутрішні плоскі тріщини, динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень, метод граничних інтегральних рівнянь.

Тотальне застосування композитів у багатьох галузях господарства спонукає проведення досліджень їх механічних властивостей. Важливий клас застосованих в інженерній практиці пружних композитів становлять біматеріальні та багатошарові з плоско-паралельними поверхнями поділу матеріалів. Процеси виготовлення та експлуатації виробів з таких матеріалів часто супроводжуються виникненням у них різнорідних дефектів, особливо небезпечними з яких є тріщини і недосконалість міжфазного контакту як фактори суттєвого перерозподілу пружних полів і концентрації напружень. Більшість відомих результатів досліджень механічних властивостей таких матеріалів з дефектами стосуються дії статичного навантаження, а вплив динамічних (циклічних, ударних) навантажень обмежувався розглядом тунельних і міжфазних тріщин. Хвильові процеси в тріщинуватих кусково-однорідних тілах характеризуються можливістю взаємного перетворення пружних хвиль на поверхнях поділу матеріалів, виникненням поверхневих хвиль і резонансних явищ, а інерційні ефекти проявляються у перевищенні динамічними коефіцієнтами інтенсивності напружень (ДКІН) своїх статичних аналогів. Окремих досліджень вимагають випадки впливу на динамічні напруження в околі тріщин тонких неоднорідностей на інтерфейсах, тонкого покриття і періодично-шаруватої структури композита. Дослідження пружних хвильових полів у кусково-однорідних тілах із тріщинами важливі для геофізики, сейсмології, неруйнівного акустичного контролю та оцінки міцності і довговічності таких тіл.

Математична складність таких задач обумовлена виконанням різнотипних крайових умов динамічного розходження протилежних поверхонь тріщин та контакту складових композита. Актуальним є питання розроблення комплексного підходу до розв'язання дво- та тривимірних динамічних задач з урахуванням багатопараметричності вхідних даних – кількості та взаємного розташування тріщин, кількості структурних компонент композитного тіла, співвідношення пружних параметрів матеріалів, типів крайових умов на поверхнях розмежування матеріалів, усталеного та нестационарного типів динамічних навантажень. Одним з ефективних способів розв'язування таких задач є їх зведення до гранично-інтегральних рівнянь (ГІР) із тотожним задоволенням крайових умов міжфазного контакту за допомогою введення у гранично-інтегральні формулювання функцій Гріна.

У цій роботі наведено огляд результатів дослідження тривимірних задач про динамічне навантаження пружних кусково-однорідних тіл з внутрішніми тріщинами.

✉ stan\_volodja@yahoo.com

Розробці методів розв'язування задач вивчення напружено-деформованого стану тіл з тріщинами присвячено чимало робіт вітчизняних і зарубіжних авторів. Так, дослідження плоских і просторових статичних задач теорії пружності для тіл із дефектами методом сингулярних інтегральних рівнянь детально описано в працях [3, 4, 9, 30, 37, 38 та ін.]. З використанням методу комплексних потенціалів Колосова – Мухелішвілі після задоволення крайових умов відповідні задачі зводяться до систем одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих густин, які характеризують напруження і похідні від зміщень на розрізах. У праці [27] представлено метод розривних розв'язків для статичних і динамічних задач теорії пружності для тіл із дефектами. Відповідні задачі зводились до розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь відносно заданих на дефектах стрибках переміщень і напружень. У подальшому метод розривних розв'язків перенесено на статичні і динамічні задачі з плоскими та криволінійними дефектами у працях [18, 26, 28].

Метод скінченних елементів успішно застосовано для задач статичної і динамічної механіки тріщин у роботах [32, 41, 78, 110]. Підвищення точності числових результатів значень КІН досягалося використанням поблизу контуру тріщини спеціальних скінченних елементів, які враховують сингулярність напружень [47, 71, 82, 127], або з використанням енергетичного методу і визначенні КІН за допомогою об'ємного  $J$ -інтеграла [102, 108, 130]. Переважна більшість отриманих результатів обмежена розглядом статичних і динамічних задач теорії тріщин у двовимірній постановці. Водночас розв'язуванню тривимірних динамічних задач механіки руйнування методом скінченних елементів приділялося недостатньо уваги.

Для дослідження випадків динамічного навантаження кусково-однорідних тіл, які містять тріщини, важливо володіти аналітичними та числовими методами, пристосованими для аналізу тонкостінних дефектів відповідного дослідження. До такого потужного інструментарію відносяться методи на основі гранично-інтегрального формулювання змішаних задач теорії пружності у часовій і частотній областях. Їх ефективність забезпечується можливістю зведення задач до інтегральних рівнянь по поверхні тіла, вимірність якої на одиницю менша від вимірності області визначення вихідних диференціальних рівнянь задачі.

Способи зведення плоских та тривимірних статичних і динамічних задач для тіл з тонкостінними неоднорідностями і тріщинами до ГІР описано у працях [14, 17, 73, 103, 109, 119, 138] та ін. Тоді у рамках прямого формулювання методу ГІР невідомі густини рівнянь мають зміст стрибків переміщень протилежних поверхонь тріщин або стрибків напружень на поверхнях жорстких включень. Для випадку нестационарних навантажень отримані ГІР розв'язували у просторово-часовій області або з використанням інтегральних перетворень Лапласа, або Фур'є за часом.

Переважна більшість відомих розв'язків задач, присвячених дослідженню статичного та динамічного напружено-деформованого станів композитів біматеріальної та шаруватої структур з внутрішніми тріщинами, обмежені випадками класичних крайових умов ідеального контакту на поверхнях поділу матеріалів. Водночас, у багатьох практичних ситуаціях спостерігається порушення адгезійних зв'язків компонент композита, виникнення розподілених мікропошкоджень у вигляді міжфазних тріщин, областей деламінації і тонких контактних неоднорідностей. Тонкі прошарки можуть вводиться у композитну систему також технологічно для оптимального перенесення зусиль і хвильової енергії. Математичне моделювання відповідних задач передбачає формулювання певних крайових умов [39], які адекватно описують фізичні умови контакту на інтерфейсах.

У динамічній механіці композитів з тріщинами до ключових розрахункових функцій відноситься стрибок зміщень протилежних поверхонь тріщин у часовій і частотній областях. За вказаними зміщеннями можна не

лише визначати ДКІН в околі дефектів, а й параметри загального хвильового поля переміщень і напружень у композиті. У цьому аспекті актуальним є опис задач гранично-інтегральними моделями з ключовими функціями динамічного розкриття поверхонь дефектів і відображенням у регулярних ядрах інтегральних рівнянь динамічної взаємодії внутрішніх тріщин між собою та з міжфазними поверхнями за умов ідеального та різнотипного неідеального контакту на них. Так, у роботах [88, 118] проведено аналіз двовимірних динамічних задач для кусково-однорідних з ідеальним контактом компонент тіл з тріщинами в умовах антиплоскої і плоскої деформацій. Методом ГІР також отримано результати для випадку усталеного коливання пружного біматеріалу з круговою та еліптичною підповерхневою тріщиною відриву [22, 105], перпендикулярною до до поверхні поділу (рис. 1). Частковим випадком неідеального контакту компонент кусково-однорідних тіл є наявність проковзування на поверхні спряження матеріалів. Ковзний контакт на вказаній поверхні враховували у роботі [53] при дослідженні статичного поля напружень від системи дислокацій уздовж поверхні контакту та в [132] – для міжфазної тунельної тріщини в анізотропному біматеріалі. Відповідні динамічні задачі обмежувалися питаннями впливу проковзування уздовж згаданої поверхні на поширенні пружних хвиль у композиті та визначенні параметрів хвильового поля [25].

У праці [23] проаналізовано тривимірну динамічну задачу про усталені коливання пружного ізотропного біматеріалу з круговою тріщиною відриву (рис. 1). Розглядався випадок навантаження протилежних поверхонь  $S_1^\pm$  тріщини самозрівноваженими усталеними в часі  $t$  зусиллями

$$\mathbf{N}_3^+(\mathbf{x}_1, t) = -\mathbf{N}_3^-(\mathbf{x}_1, t) = \mathbf{N}_3(\mathbf{x}_1, \omega) \exp(-i\omega t)$$

із заданими частотою  $\omega$  та амплітудою  $\mathbf{N}_3(\mathbf{x}_1, \omega)$  (для випадку нестационарних навантажень вони ототожені з параметром і трансформантою інтегрального перетворення Фур'є). Слід відмітити, що задання навантажень на поверхнях тріщин дозволяє досліджувати ДКІН також для випадку довільного хвильового збурення композита після застосування принципу суперпозиції зі складовою, що відповідає за відомий розподіл напружень в аналогічній структурі без наявності тріщин.

Дослідження напружено-деформованого стану розглянутого композитного тіла у частотній області після вилучення спільного гармонічного за часом часового множника  $\exp(-i\omega t)$  зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь руху щодо амплітуд векторів переміщень  $\mathbf{u}^C(\mathbf{x}, \omega)$ ,  $C = A, B$ , у кожній із компонент, які для випадку пружних півпросторів з тріщиною мають вигляд

$$k_{1C}^{-2} \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}^C) - k_{2C}^{-2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^C) + \mathbf{u}^C = 0, \quad C = A, B, \quad (1)$$

де  $\nabla$  – тривимірний набла-оператор,  $k_{1C} = \omega/c_{1C}$ ,  $k_{2C} = \omega/c_{2C}$  – хвильові числа,  $c_{1C}$  і  $c_{2C}$  – швидкості поширення в матеріалі  $C$  поздовжніх і поперечних пружних хвиль.

Різнотипні умови спряження пружних компонент тіла на поверхні контакту  $S_0$  за наявності проковзування описуються крайовими умовами стосовно амплітудних значень напружень і переміщень

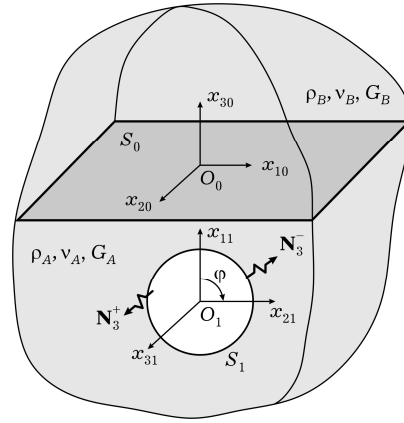


Рис. 1

– для ідеального механічного контакту компонент:

$$\begin{aligned}\sigma_{j3}^A(\mathbf{x}, \omega) &= \sigma_{j3}^B(\mathbf{x}, \omega), \\ u_j^A(\mathbf{x}, \omega) &= u_j^B(\mathbf{x}, \omega), \quad j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x}(x_1, x_2, 0) \in S_0,\end{aligned}\quad (2)$$

– для неідеального контакту:

$$\begin{aligned}\sigma_{33}^A(\mathbf{x}, \omega) &= \sigma_{33}^B(\mathbf{x}, \omega), \quad u_3^A(\mathbf{x}, \omega) = u_3^B(\mathbf{x}, \omega), \\ \sigma_{j3}^D(\mathbf{x}, \omega) &= 0, \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x}(x_1, x_2, 0) \in S_0,\end{aligned}\quad (3)$$

Замкнутість постановки задачі передбачає також крайові умови на поверхнях тріщини і виконання умов випромінювання Зоммерфельда на безмежності.

Подальше гранично-інтегральне формулювання задач полягає у використанні напівпрямого методу ГІР і представленні подань пружних переміщень і напружень у вигляді потенціалів Гельмгольца з невідомими густинами  $u_{s_0}^C$  уздовж поверхні контакту та (для випадку півпростору  $A$ ) відомої комбінації потенціалів з невідомою густиною  $\Delta u_3^A$ , що характеризує розкриття тріщини в процесі навантаження і описує випадок однорідного тіла:

$$\begin{aligned}u_j^C(\mathbf{x}, \omega) &= \iint_{S_0} \sum_{s=1}^3 u_{s_0}^C(\boldsymbol{\xi}, \omega) \sum_{p=1}^2 \mathcal{D}_{js01}^{(p)C} \Phi_p^C(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} + \\ &+ \delta_{AC} \iint_{S_1} \Delta u_3^A(\boldsymbol{\xi}, \omega) \sum_{p=1}^2 \mathcal{D}_{j311}^{(p)A} \Phi_p^A(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}}, \\ j &= 1, 2, 3, \quad C = A, B,\end{aligned}\quad (4)$$

де

$$\Phi_p^C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\exp(ik_{pC}|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}, \quad |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2},$$

$\delta$  – символ Кронекера,  $\mathcal{D}$  – відомі диференціальні оператори [23]. Задоволенням крайових умов (2), (3) на поверхні контакту отримано подання невідомих густин  $u_{s_0}^C$  потенціалів уздовж зазначеної поверхні через невідому функцію  $\Delta u_3^A$  розкриття поверхонь дефекту. Подальшим задоволенням крайових умов в області розташування тріщини задачу зведено до розв'язання одного двовимірного ГІР:

$$\iint_{S_1} \Delta u_3^A(\boldsymbol{\xi}, \omega) [K(|\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\xi}|, \omega) + F(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}, \omega)] dS_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{k_{2A}^2}{4G_A} N_0, \quad \mathbf{x}_1 \in S_1, \quad (5)$$

де  $N_0 = \mathbf{N}_3(\mathbf{x}_1, \omega) = \text{const}$ , ядро  $K$  описує випадок тріщини в однорідному тілі з пружними параметрами півпростору  $A$ , а ядро

$$F(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \int_0^{\infty} \frac{\tau}{R_{St}(\tau)} T(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}, \tau) d\tau \quad (6)$$

є модифікованою функцією Гріна, що описує динамічну взаємодію тріщини з міжфазною поверхнею. Тут  $R_{St}$  – функція Стоунлі, яка характеризує можливість виникнення у біматеріалі поверхневої хвилі за певних співвідношень пружних параметрів матеріалів композита. Оператор  $T$  містить

функції Бесселя та експоненціальні функції з аргументами, залежними від параметрів розташування тріщини у півпросторі  $A$ . Конкретний вигляд  $R_{St}$  і  $T$  продиктований типом крайових умов (2), (3) на контактній поверхні та виписаний в роботах [12, 23, 105].

Регулярне ядро  $F$  характеризується спадною поведінкою підінтегральної функції. У частотній (спектральній щодо інтегрального перетворення Фур'є за часом) області запропоновано ефективні аналітично-числові методи розв'язування отриманого ГІР на основі його регуляризації та гранично-елементної дискретизації із застосуванням відповідного умовам випромінювання вибору значень комплекснозначних функцій Гріна і спеціальних квадратур Гаусса та Лагерра для досягнення збіжності результатів числового інтегрування. Розроблені для випадку однорідного тіла з тріщиною гранично-елементні алгоритми визначення динамічного розкриття тріщини та пов'язані з ними ДКІН перенесено на випадок пружного біматеріалу.

Числовий аналіз отримано для випадку гармонічного навантаження за однакових значень густин  $\rho_A = \rho_B$  і коефіцієнтів Пуассона  $\nu_A = \nu_B = 0.3$  матеріалів композита. Зафіксовано, що для кругової тріщини відриву у біматеріалі з двох півпросторів з проковзуванням на міжфазній поверхні, перпендикулярній до цієї поверхні, у низькочастотній області амплітуди ДКІН досягають двох пікових значень з переважанням першого, який більший від ДКІН у випадку ідеального контакту компонент (рис. 2). Також збільшення жорсткості матеріалу з тріщиною супроводжується зменшенням піків ДКІН, що є протилежною закономірністю щодо аналогічного біматеріалу з ідеальним контактом на поверхні спряження. Підсилення впливу контрастності жорсткостей матеріалів композита на ДКІН проявляється більш виразно за наявності декількох взаємодіючих тріщин.

Стосовно подальшого вивчення впливу неідеального контакту з проковзуванням компонент композита на динамічну міцність тіл за наявності у них тріщин, то такі дослідження у літературі відсутні.

У процесі експлуатації композитів часто спостерігається порушення адгезійних зв'язків компонент композита та виникнення розподілених мікропошкоджень. Для виявлення таких пошкоджень використовують ультразвуковий неруйнівний контроль [46, 63, 85, 86], який ґрунтується на аналізі параметрів розсіяних пружних хвиль структурними дефектами. Опис адекватної поведінки пружного середовища з відшаруванням на спряженні передбачає наявність вірогідної інформації стосовно ступеня пошкодженості розглядуваної області, обумовленого кількістю, формою, розмірами та розподілом мікротріщин у ньому. У працях [46, 96] в рамках квазістатичної моделі авторами запропоновано феномен зменшення жорсткості пошкодженого інтерфейсу замінити рівномірно розподіленими міжфазними пружинами. Такий підхід у термінах неklasичних крайових умов отримав назву *пружинних крайових умов*. Сформульовані ефективні крайові умови на поверхні поділу матеріалів постулюють пропорційність напружень стрибкам переміщень із коефіцієнтами, залежними від властивостей чи якості поверхні спряження. У подальшому низкою дослідників у працях [89, 113, 129] було показано ефективність пружинної моделі стосовно моделювання неідеального контакту на міжфазній поверхні матеріалів, експериментальне підтвердження результатів наведено в [96]. У праці [123] пружинні крайові умови використано у низькочастотному спектрі, коли довжини згенерованих пружних хвиль набагато перевищують товщину пошкодженої поверхні

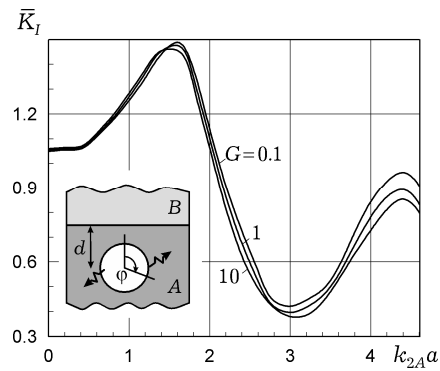


Рис. 2

контакту. Із точки зору математичного моделювання, пружинні крайові умови простіші та ефективніші порівняно з випадком точної постановки задачі з урахуванням міжфазних тріщин. У роботі [42] на основі проведених досліджень дифракції плоских хвиль на пошкодженій поверхні контакту було отримано добру узгодженість у значеннях амплітуд коефіцієнтів відбиття, отриманих з використанням усереднених підходів та періодичної системи тріщин. На основі отриманих в роботах [100, 101] результатів показано незначне розходження амплітуд згаданих коефіцієнтів у дальній зоні для різного закону розподілу тріщин з однаковим ступенем пошкодження міжфазної поверхні. В подальших дослідженнях [112] пружинні крайові умови застосовано для ультразвукової ідентифікації порушення адгезивних зв'язків, у роботі [83] досліджено дифракцію пружних хвиль на включенні за наявності відшарування між його поверхнею і матрицею. Сформульованими вище неklasичними крайовими умовами можна оперувати для опису клейових з'єднань.

Точність числових результатів, отриманих у рамках застосування пружинних крайових умов значно залежить від достовірних параметрів товщини і жорсткості пошкодженої поверхні контакту матеріалів. У працях [49, 50, 64, 65, 84, 90, 91] ефективні крайові умови в низькочастотному спектрі коливань використано для аналізу дифрагованого на неklasичному інтерфейсі хвильового поля, окремий аспект досліджень спрямовано на встановленні кореляції між жорсткісними характеристиками пружин та геометрією, розмірами і щільністю розподілу міжфазних тріщин.

Значний інтерес становлять задачі дослідження динамічної взаємодії пошкоджених поверхонь спряження із внутрішніми тріщинами. У працях [107, 122] методом ГР з використанням пружинних крайових умов розглянуто задачі про усталені коливання біматеріалу з підповерхневими тріщинами і показано суттєвий вплив тонкого міжфазного прошарку на динамічні КІН в околі контуру дефектів. Так, для гармонічно навантаженої кругової тріщини відриву (рис. 1) відображення наявності прошарку з малою щодо довжини згенерованих хвиль товщиною  $h$  та власними пружинними параметрами  $\nu_0$ ,  $G_0$ ,  $G_0 \ll G_A, G_B$ , описується пружинними крайовими умовами на серединній поверхні  $S_0$  прошарку:

$$\begin{aligned}\sigma_{33}^A(\mathbf{x}, \omega) &= 2G_0[(1 - \nu_0)/(1 - 2\nu_0)][u_3^A(\mathbf{x}, \omega) - u_3^B(\mathbf{x}, \omega)]/h, \\ \sigma_{m3}^A(\mathbf{x}, \omega) &= G_0[u_m^A(\mathbf{x}, \omega) - u_m^B(\mathbf{x}, \omega)]/h, \quad m = 1, 2, \\ \sigma_{j3}^A(\mathbf{x}, \omega) &= \sigma_{j3}^B(\mathbf{x}, \omega), \quad j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in S_0.\end{aligned}\tag{7}$$

Тотожним задоволенням крайових умов (7) на неklasичній поверхні контакту та крайових умов в області розташування тріщини задачу зведено до розв'язання одного ГР типу (5) з модифікованою функцією Гріна, явний вигляд компонентів якої виписано в [107].

Числовий аналіз виконано для випадку гармонічного навантаження поверхонь тріщини відриву в одному з двох однакових півпросторів, розмежованих тонким податливим прошарком іншої контрастності. Спостерігається, що в низькочастотному спектрі коливань збільшення піків ДКІН відбувається зі зменшенням жорсткості прошарку, при цьому амплітуди ДКІН обмежені знизу/зверху своїми аналогами для однорідного простору/вільного півпростору з дефектом.

У роботі [122] досліджено випадок гармонічно навантаженої кругової тріщини скруту, паралельної до податливого прошарку між двома різнорідними півпросторами (рис. 3). Задачу зведено до системи двох незв'язаних ГР відносно тангенціальних зміщень поверхонь дефекту. На основі отриманих числових результатів встановлено, що існує діапазон частоти прикладеного навантаження, при якому спостерігається зменшення піків амплітуд

КІН порівняно з аналогами для випадку тріщини в композиті без прошарку (виявлено ефект екранування динамічних напружень або зміцнення біматеріалу тонким прошарком). Для тріщини у жорсткішій компоненті амплітуди КІН у низькочастотній області досягають двох пікових значень з переважанням другого, зазначена тенденція якісно відрізняється від аналогічного біматеріалу з ідеальним контактом на поверхні спряження. Для тріщини у жорсткішій компоненті виявлено спеціальні частоти, за яких амплітуди ДКІН не залежать від матеріалів прилеглих компонент, що свідчить про відсутність відбитих хвиль і повне перенесення хвильової енергії через міжфазні поверхні на цих частотах.

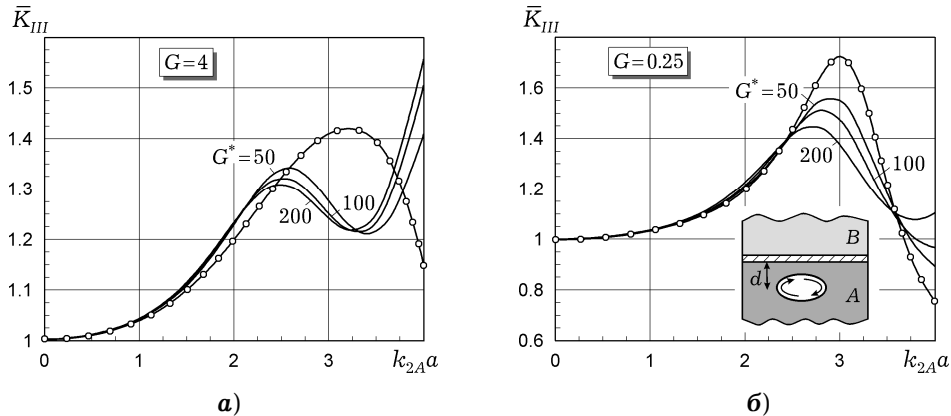


Рис. 3

Значна увага дослідників приділяється дослідженню міжфазних тріщин як часткового випадку пошкодження інтерфейсної поверхні кусково-однорідних тіл. У піонерській роботі [133] було виявлено осцилюючу особливість в околі вершини тріщини, породжену зміною крайових умов розкриття дефекту та жорсткого контакту матеріалів. Було встановлено, що у вказаній області поверхні тріщини безмежну кількість разів перекриваються, а напруження у площині продовження дефекту багаторазово змінюють свій знак. У подальшому у роботах [59, 61] на основі отриманих результатів для кусково-однорідної площини з міжфазним розрізом було показано, що осцилюючий феномен переміщень і напружень спостерігається на малих порівняно з довжиною тріщини відрізках. Логічним продовженням вказаних досліджень є роботи [15, 93] з оцінюванням зон осцилюючого контакту. У них показано, що в полі зсувних навантажень розміри вказаних зон можуть бути достатньо великими стосовно розмірів тріщини.

Для подолання фізичної осциляційної неузгодженості в низці робіт запропоновано альтернативні моделі міжфазної тріщини. Наприклад, у праці [31] розглянуто тріщину за наявності в околі її вершини ділянок контакту і відшарувань, в роботі [21] розрив властивостей пружних параметрів матеріалів замінено їх плавною зміною поблизу міжфазної поверхні. Значного поширення набули моделі міжфазної тріщини, які враховують наявність проміжної зони на межі областей розкриття дефекту та жорсткого контакту. Зокрема, у праці [15] модель передбачає у вказаній зоні контактні умови ковзання та розриву зсувних переміщень, а модель в [16, 21] – умови пластичності та розриву нормальних переміщень. У роботах [45, 87] розглядали відповідні задачі теорії тріщин з урахуванням тертя у вказаних зонах зчеплення. Переважна більшість проведених досліджень стосувалася випадку статичного навантаження тіл.

У тривимірній постановці задач з використанням апарату ГР зазначені дослідження відображено у роботах [13, 99], які стосуються динамічно навантажених тріщин на поверхні розмежування двох різнорідних півпросторів, зокрема з допущенням фізично коректного налягання протилежних

поверхонь тріщин. У цих роботах умови динамічного контакту півпросторів поза міжфазною тріщиною задовольняються наближено через їх нехтування у віддаленій від тріщини зоні. Варто зазначити, що питанням динамічної взаємодії внутрішніх і міжфазних тріщин у кусково-однорідних тілах уваги не приділялося.

Окремими елементами кусково-однорідних тіл можуть бути рідинні компоненти. У роботах [7, 11, 29] вивчали поширення пружних хвиль і проводили аналіз отриманих дисперсійних рівнянь в композитних матеріалах, що містять шари рідини. У працях [33–35] на прикладі біматеріалу зі спряжених рідкого та пружного з тріщинами відриву півпросторів в полі устаєних коливань досліджували вплив рідинних складових на динамічну концентрацію напружень в околі дефектів. Диференціальні рівняння руху для півпростору  $B$  (рис. 1) із нестисливої рідини трансформуються до системи рівнянь відносно амплітуд векторів переміщень  $\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, \omega)$ :

$$k_f^{-2} \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}_f) + \mathbf{u}_f = 0, \quad (8)$$

де  $k_f = \omega/c_f$  – хвильове число для рідини,  $c_f$  – швидкість поширення звуку у рідині. Крайові умови контакту на поверхні розмежування твердої і рідинної фаз описуються співвідношеннями

$$\begin{aligned} u_3^A(\mathbf{x}, \omega) &= u_{3f}^A(\mathbf{x}, \omega), & \sigma_{33}^A(\mathbf{x}, \omega) &= p_f(\mathbf{x}, \omega), \\ \sigma_{j3}^A(\mathbf{x}, \omega) &= 0, & \mathbf{x} \in S_0, & \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $u_{3f}$ ,  $p_f$  – відповідно амплітуди переміщення і гідростатичного тиску у рідині.

Задоволенням крайових умов (9) на поверхні розмежування фаз і крайових умов в області розташування тріщин задачу зведено до розв'язання одного ГРП вигляду (5) з модифікованою функцією Гріна, наведеною в [33–35]. Характерною особливістю розглядуваної комбінації матеріалів є поява локалізованої поблизу інтерфейсу поверхневої хвилі, яка характеризується відповідною функцією Стоунлі.

Числовий аналіз отримано для випадку гармонічного навантаження поверхонь однієї і двох кругових тріщин відриву у твердій компоненті (рис. 4). Показано, що наявність рідинної компоненти підсилює динамічні КІН. У низькочастотному діапазоні хвильових чисел амплітуди ДКІН досягають двох локальних максимумів, перший з яких спостерігається за меншого значення частоти порівняно з випадком безмежного однорідного тіла з тріщинами і мажорований своїми аналогами для випадку тріщин у безмежному однорідному тілі (маркована колами крива) та у півпросторі (маркована квадратами крива).

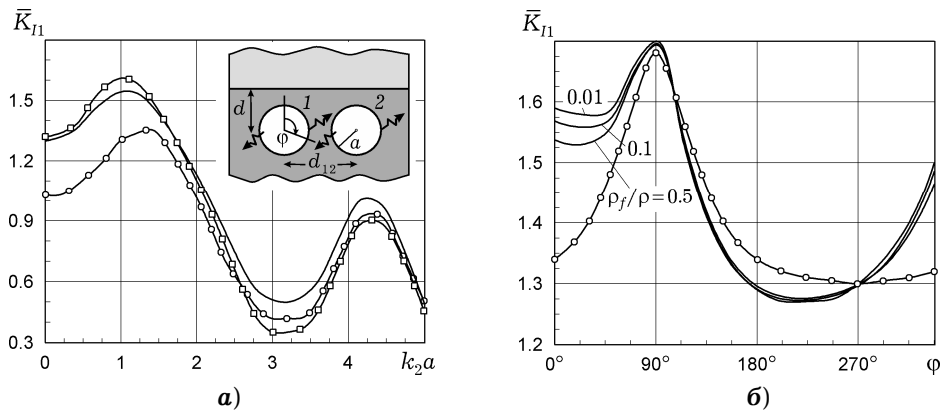


Рис. 4



Другий локальний максимум ДКІН перевищує зазначені аналоги. Зменшення густини рідини супроводжується збільшенням ДКІН відриву, що найбільш відчутно у близьких до рідинної складової точках контуру тріщини. Подальші цілеспрямовані дослідження впливу рідинних складових композитів на міцність тіл за наявності у них тріщин не проводилися.

Окрему зацікавленість викликають динамічні задачі стосовно вивчення хвильових явищ у тілах із тонкими покриттями як факторами динамічного зміцнення структури. Результати таких досліджень становлять практичний інтерес із точки зору створення сенсорів моніторингу температури, вологості, тиску, приладів визначення товщини покриття і характеристик жорсткості підкладки, нанесення антикорозійних і теплоізоляційних покриттів. Ефективне моделювання тонких шарів та плівок є важливим у сфері обробки сигналів, зокрема для SAW-фільтрів, робота яких ґрунтується на обробці поверхневих акустичних хвиль. Отримання аналітичних розв'язків для тіл із пружними покриттями в загальному тривимірному випадку пов'язане зі значними математичними труднощами, починаючи від постановки задачі. Отримана хвильова картина в таких об'єктах характеризується складними дисперсійними явищами [63, 76, 77, 112, 123]. У праці [126] на підставі аналізу пружних поверхневих хвиль, ініційованих тонкими плівками на підкладці, запропоновано трактувати ефект покриття як специфічну крайову умову на підкладці. У роботі [51] показано прийнятність такої ідеї у рамках довгохвильової відносно товщини покриття асимптотики. У працях [54, 55] під час дослідження хвильових процесів у півпросторі з пружною накладкою, ініційованих рухомим та імпульсним в часі на поверхні вантажем, сформульовано ефективні крайові умови. Ці умови передбачають врахування покриття певними диференціальними залежностями між напруженнями та переміщеннями на поверхні основного матеріалу з урахуванням пружних параметрів матеріалу покриття. Варто зазначити, що питанням сусідства тріщин з тонкими покриттями композитних тіл за динамічних навантажень уваги у літературі не приділялося.

Для моделювання покриття в гранично-інтегральних формулюваннях використано ефективні крайові умови, які на основі довгохвильової відносно товщини  $h$  покриття асимптотики з урахуванням інерційності матеріалу  $B$  накладки мають вигляд [55]

$$\sigma_{j3}^A(\mathbf{x}) = \rho_B h \left\{ -\omega^2 u_j^A - c_{2B}^2 \left[ \frac{\partial^2 u_j^A(\mathbf{x})}{\partial x_{3-j}^2} + 4 \left( 1 - \frac{c_{2B}^2}{c_{1B}^2} \right) \frac{\partial^2 u_j^A(\mathbf{x})}{\partial x_j^2} + \left( 3 - 4 \frac{c_{2B}^2}{c_{1B}^2} \right) \frac{\partial^2 u_{3-j}^A(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\},$$

$$\sigma_{33}^A(\mathbf{x}) = -\rho_B h \omega^2 u_3^A, \quad \mathbf{x}(x_1, x_2, 0) \in S_0, \quad j = 1, 2. \quad (10)$$

Умови (10) характеризують наявність мембрани на поверхні півпростору та створений нею натяг.

У роботі [106] розглянуто задачу про гармонічне навантаження поверхонь кругової тріщини скруту, паралельної до поверхні півпростору з тонким покриттям (рис. 5). З аналізу отриманих числових результатів випливає, що в низькочастотному діапазоні хвильового числа збільшення жорсткості покриття супроводжується спаданням амплітуд ДКІН, які є меншими від свого аналога за відсутності покриття (випадок вільного півпростору), тобто покриття відіграє екрануючу роль для динамічних напружень в околі тріщин.

У багатьох галузях техніки використовують композити шаруватої структури (ламінати), що спричинено насамперед їх підвищеною міцністю і спеціальними теплоізоляційними властивостями [56, 66]. До шаруватих середовищ також можна віднести літосферні плити (задачі геофізики) з до-

вільно розташованими тріщинами у вигляді розломів, при цьому хвильові поля у тілі можуть породжуватися вібраціями поверхонь вказаних дефектів. Врахування біматеріальної і багатошарової структури динамічно навантажених тіл призводить до дифракційного хвильового перерозподілу параметрів напружено-деформованого стану між компонентами тіла з можливістю виникнення поверхневих хвиль, резонансних і дисперсійних явищ [10, 48, 69, 79, 92, 111, 124, 128, 131, 142]. Динамічні задачі теорії тріщин для пружних тіл шаруватої структури з внутрішніми неоднорідностями різної природи на сьогоднішній день ще мало вивчені. Більшість робіт обмежена розглядом дефектів в ізо-тропних біматеріальних тілах [1, 2, 8, 24, 40].

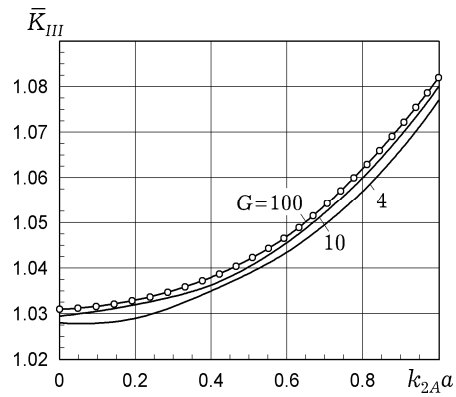


Рис. 5

У випадку композита шаруватої структури хвильове поле переміщень і напружень у частотному режимі навантаження визначається багатократним перевідбиттям пружних хвиль на поверхнях поділу матеріалів. Проведення досліджень динамічних процесів у середовищах шаруватої структури вимагає побудови ядер систем відповідних інтегральних рівнянь. Збільшення кількості шаруватих компонент з відповідними на їх поверхнях крайовими умовами призводить до зростання розмірності системи лінійних рівнянь і труднощів обчислювального характеру, спричинених, зокрема, наявністю експоненційних складових у фундаментальних розв'язках. Для подолання згаданих проблем запропоновано низку підходів. Так, наприклад, у роботах [5, 6] стійкість методу побудови матриць Гріна для пружних і термоелектропружних багатошарових середовищ забезпечена виділенням експоненційних складових. У випадку великої кількості шарів дисперсійні співвідношення отримують за допомогою методу передаточних матриць [70, 125], методу глобальної матриці [80, 95], а для періодично-шаруватого композита – методу з використанням теореми Флоке [29, 72, 134].

З огляду на комплексну оцінку умов руйнування таких композитів необхідно вводити у розгляд задачі про наявність в них тріщин. У роботах [43, 74, 75, 81, 98, 114] розглянуто статичні плоскі задачі для двоперіодичного шаруватого композита з тріщиною, у роботі [117] – із системою міжфазних тріщин. Водночас динамічним задачам для композитів періодично шаруватої структури з тріщинами у літературі приділялося недостатньо уваги. Зокрема, у праці [135] в операторній формі (з відсутністю числового аналізу) отримано ГІР задачі про гармонічне навантаження поодинокі тріщини у багатошаровому сендвіч-композиті з дзеркальною стосовно дефекту площиною симетрії, а в [104] проведено аналіз ДКІН для тріщини скруту у трикомпонентному композиті.

У роботі [36] для випадку двокомпонентного періодично шаруватого композита з гармонічно навантаженими тріщинами скруту на серединних поверхнях шарів задачу зведено до гранично-інтегрального формулювання стосовно двошарового репрезентативного елемента (рис. 6) з крайовими умовами такого вигляду на поверхнях контакту:

$$u_j^A(\mathbf{x}) = u_j^B(\mathbf{x}), \quad \sigma_{3j}^A(\mathbf{x}) = \sigma_{3j}^B(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_2^A \cup S_1^B, \quad (11)$$

$$u_j^A(\mathbf{x}) = u_j^B(\mathbf{x}), \quad \sigma_{3j}^A(\mathbf{x}) = \sigma_{3j}^B(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_1^A \cup S_2^B, \quad (12)$$

де умови (11) визначають ідеальний контакт шарів, а умови (12) характеризують періодичність структури композита.

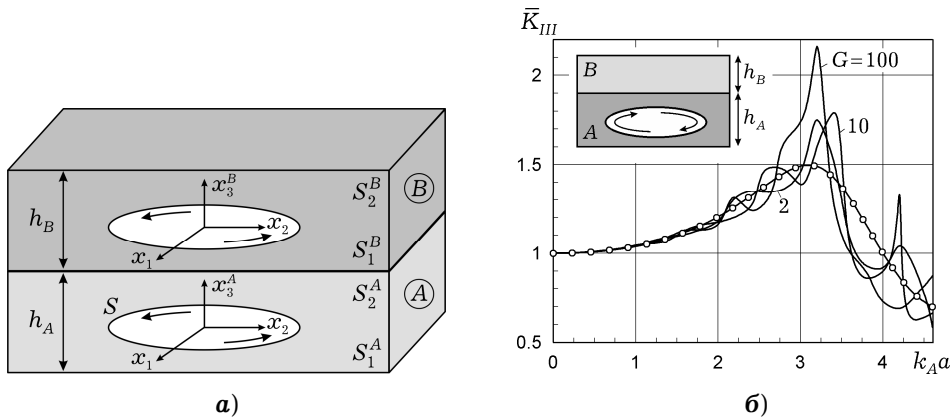


Рис. 6

Розглядувану задачу зведено до розв'язування системи чотирьох двовимірних ГР відносно невідомих функцій тангенціальних зміщень поверхонь тріщин. Модифікована функція Гріна, що входить в інтегральні рівняння, описує взаємодію системи тріщин та поверхонь спряження. Числовий аналіз проведено для тріщин скруту, розташованих в одній з компонент композита з однаковими значеннями густин  $\rho_A = \rho_B$  матеріалів. Поведінка частотної залежності ДКІН в околі вістря тріщини набуває складного характеру. Для розташованих у жорсткіших матеріалах композита тріщин резонансний вплив взаємодіючих періодично розміщених тріщин та поверхонь поділу матеріалів проявляється множинністю осциляцій амплітуд ДКІН. Зростання жорсткості шарів із тріщинами супроводжується появою додаткових резонансних частот і збільшенням абсолютних пікових значень ДКІН, які перевищують свої аналоги для випадку біматеріалу з двох півпросторів.

Окремий пласт досліджень становлять функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) – тип композитів, які характеризуються плавною зміною фізичних параметрів (одного або декількох) у певних напрямках, тобто градієнтністю механічних (термомеханічних) характеристик [19, 94, 115]. На початкових етапах створення ФГМ було пов'язане з потребами авіаційної промисловості у матеріалах, які б одночасно мали високу міцність, теплоізоляційні властивості та відносно невелику масу. Таким вимогам відповідали композити, що поєднували кераміку та метал. На сьогодні ФГМ широко використовують у літако- та ракетобудуванні, у військовій промисловості для бронетехніки, стоматології тощо. Для математичного моделювання градієнтності зміни властивостей матеріалу використовують два підходи. Перший полягає у моделюванні матеріалу шаруватою структурою, де кожний наступний шар є однорідний із відмінними механічними властивостями. У результаті отримуємо ФГМ з кусково-розривними вздовж певних напрямків властивостями механічних параметрів. Напружено-деформований стан кожного шару описується відносно простими диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами. Недоліком зазначеного підходу є необхідність задоволення великої кількості крайових умов на поверхнях спряження, що з фізичної точки зору призводить до складної хвильової картини в тілі – виникнення поверхневих хвиль із дисперсійними феноменами, концентрацією напружень на поверхнях контакту матеріалів. Другий підхід полягає у заданні плавної зміни об'ємних часток одного матеріалу в матриці з іншого матеріалу. Напружено-деформований стан такого ФГМ описується диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами (зазвичай градієнтність зміни коефіцієнта Пуассона, густини матеріалу, модуля Юнга описують степеневим або експоненціальним законом). Другий підхід дає можливість уникнути інтерфейсних явищ, але вимагає залу-

чення складнішого математичного апарату для моделювання. Окрім сказаного, другий підхід сприяє створенню ФГМ з відповідними властивостями під конкретні потреби.

Вивчення граничного стану ФГМ під статичними і динамічними навантаженнями за наявності в них тріщин вимагають потужних та ефективних математичних інструментів досліджень. Аналіз напружено-деформованого стану ФГМ з тріщинами виконували з залученням методів сингулярних інтегральних рівнянь [52, 57, 60, 62, 116], методу граничних елементів [58, 136, 137, 139–141], методу скінченних елементів [44, 67, 68, 97, 143], Петрова – Гальоркіна [120, 121]. Отримані числові результати [20, 139, 141] показали домінуючий вплив на пікові значення статичних і динамічних КІН модуля пружності матеріалу та орієнтації тріщин відносно напрямку градації властивостей ФГМ.

Основний акцент у цій роботі приділено випадку гармонічного навантаження. При цьому отримані розв'язки відповідних гармонічних задач для кусково-однорідних тіл з тріщинами розглядаються як проміжний етап побудови розв'язків нестационарних задач. Результати досліджень окреслених задач є важливим етапом для подальшого розв'язування обернених задач, які мають важливе прикладне застосування у неруйнівному контролі, сейсмології тощо.

Аналіз літературних джерел свідчить, що розробка ефективних моделей і методів розв'язання тривимірних задач теорії тріщин у кусково-однорідних тілах складної конфігурації і за змінних в часі просторових навантажень є злободенною і недостатньо вивченою науково-технічною проблемою. Для вирішення кола зазначених завдань необхідне залучення сучасних потужних математичних методів, одним з яких є метод ГІР.

1. Александров В. М., Пожарский Д. А. К задаче о кольцевой трещине на границе раздела упругих слоя и полупространства // Прикл. математика и механика. – 2000. – **64**, № 3. – С. 476–483.  
Te same: Alexandrov V. M., Pozharskii D. A. To the problem of a crack on the elastic strip–half-plane interface // Mech. Solids. – 2001. – **36**, No. 1. – P. 70–76.
2. Александров В. М., Пожарский Д. А. К задаче о трещине на границе раздела упругих полосы и полуплоскости // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2001. – № 1. – С. 86–93.
3. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. – Москва: Физматлит, 1993. – 224 с.
4. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 348 с.
5. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. В. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. – Москва: Наука, 1989. – 344 с.
6. Бабешко В. А., Сыромятников П. В. Метод построения символа Фурье матрицы Грина многослойного электроупругого полупространства // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 5. – С. 35–47.  
Te same: Babeshko V. A., Syromyatnikov P. V. A method for the construction of the Fourier symbol of the Green matrix for multi-layered electroelastic half-space // Mech. Solids. – 2002. – **37**, No. 5. – P. 27–37.
7. Вагно А. М. Дисперсионный спектр волнового процесса в системе слой идеальной жидкости – сжимаемый упругий слой // Прикл. механика. – 2015. – **51**, № 6. – С. 52–60.  
Te same: Vagno A. M. The dispersion spectrum of a wave process in a system consisting of an ideal fluid layer and a compressible elastic layer // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, No. 6. – P. 648–653.
8. Бакиров В. Ф., Гольдштейн Р. В. Модель Леонова–Панасюка–Дагдейла для трещины на границе соединения материалов // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, № 1. – С. 170–179.  
Te same: Bakirov V. F., Gol'dshtein R. V. The Leonov–Panasyuk–Dugdale model for a crack at the interface of the joint of materials // J. Appl. Math. Mech. – 2004 – **68**, No. 1. – P. 153–161.

9. *Бережницький Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. – Киев: Наук. думка, 1983. – 288 с.
10. *Глухов А. Ю.* Вісесиметричні хвилі в шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів // Доп. НАН України. – 2016. – № 10. – С. 42–46.
11. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Поверхностные волны в системе упругий слой на жидком полупространстве // Акуст. вісн. – 2005. – 8, № 4. – С. 38–45.
12. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
13. *Гузь А. Н., Гузь И. А., Меньшиков А. В., Меньшиков В. А.* Пространственные задачи динамической механики разрушения материалов с трещинами в границе раздела (обзор) // Прикл. механика. – 2013. – 49, № 1. – С. 63–68.  
Te same: *Guz A. N., Guz I. A., Men'shikov A. V., Men'shikov V. A.* Three-dimensional problems in the dynamic fracture mechanics of materials with interface cracks (review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, No. 1. – P. 1–61.
14. *Гузь А. Н., Зозуля В. В.* Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках. – Киев: Наук. думка, 1993. – 236 с. – Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. – Т. 4.
15. *Дундурс Дж., Комниноу М.* Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композиц. материалов. – 1979. – № 3. – С. 387–396.
16. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А.* О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 1. – С. 63–68.
17. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциала в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 283 с.
18. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Межфазные туннельные трещины в составном анизотропном пространстве // Прикл. математика и механика. – 2008. – 72, № 4. – С. 689–700.
19. *Кушнір Р. М., Жидик У. В., Флячок В. М.* Термопружний аналіз функціонально-градієнтних циліндричних оболонок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 3. – С. 45–53.  
Te same: *Kushnir R. M., Zhydyk U. V., Flyachok V. M.* Thermoelastic analysis of functionally graded cylindrical shells // J. Math. Sci. – 2021. – 254, No. 1. – P. 46–58. – <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05287-5>.
20. *Кушнір Р., Николишин Т., Ростун М.* Гранична рівновага виготовленої з функціонально-градієнтного матеріалу циліндричної оболонки з поверхневою тріщиною // Машинознавство. – 2006. – № 5. – С. 3–7.
21. *Ларкина В. В., Твардовский В. В.* К задаче о межфазной трещине на границе раздела двух полуплоскостей // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 8. – С. 71–77.
22. *Михаськів В. В., Сладек Я., Сладек В., Степанюк А. И.* О концентрации напряжений возле эллиптической трещины на границе раздела упругих тел при установившихся колебаниях // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 6. – С. 81–89.  
Te same: *Mikhas'kiv V. V., Sladek J., Sladek V., Stepanyuk O. I.* Stress concentration near an elliptic crack in the interface between elastic bodies under steady-state oscillations // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, No. 6. – P. 664–671.
23. *Михаськів В. В., Станкевич В. З., Глушков Є. В., Глушкова Н. В.* Динамічні напруження у складеному тілі з круговою тріщиною за ковзного контакту його компонент // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 1. – С. 80–87.  
Te same: *Mykhas'kiv V. V., Stankevych V. Z., Glushkov E. V., Glushkova N. V.* Dynamic stresses in a compound body with circular crack under sliding contact on an interface // J. Math. Sci. – 2011. – 176, No. 4. – P. 590–599. – <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0424-5>.
24. *Нижкишин В. С.* Осесимметричные контактные задачи для двухслойного упругого полупространства с кольцевой или круговой трещиной на границе раздела слоев // Прикл. математика и механика. – 2002. – 66, № 4. – С. 67–81.
25. *Панасюк О. Н.* Анализ влияния граничных условий на распространение волн в слоистых композитных материалах // Прикл. механика. – 2014. – 50, № 4. – С. 52–58.  
Te same: *Panasjuk O. N.* Influence of interface conditions on wave propagation in composite laminates // Int. Appl. Mech. – 50, No. 4. – P. 399–405.

26. Попов В. Г., Улановский А. Э. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995. – № 4. – С. 99–109.
27. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 344 с.
28. Попов Г. Я., Вайсфельд Н. Д., Морозов Ю. С. К решению динамических задач о концентрации упругих напряжений возле дефектов на цилиндрических поверхностях // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 6. – С. 28–34.
29. Роганов Ю. В., Роганов В. Ю. Распространение волн в периодических жидко-твердых слоистых средах // Геофиз. журн. – 2016. – **38**, № 6. – С. 101–117.
30. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 323 с.
31. Салганик Р. Л. О хрупком разрушении склеенных тел // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, № 5. – С. 957–962.
32. Сиратори М., Миеси Т., Маццусита Х. Вычислительная механика разрушения. – Москва: Мир, 1986. – 334 с.
33. Станкевич В. З. Взаємодія тріщин у пружному тілі, що омивається рідиною, за гармонічних навантажень // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 1. – С. 130–135.
34. Станкевич В. З. Гранично-інтегральне формулювання динамічної задачі про взаємодію тріщин у біматеріальному об'єкті «пружне тіло – рідина» // Доп. НАН України. – 2005. – № 4. – С. 54–58.
35. Станкевич В. З. Напруження біля тріщини в півпросторі, що контактує з рідиною, під гармонічним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41**, № 3. – С. 96–100.  
Te same: Stankevych V. Z. Stresses formed near a crack in half space in contact with liquid under harmonic loading // Mater. Sci. – 2005. – **41**, No. 3. – P. 388–394.
36. Станкевич В. З., Михаськів В. В. Інтенсивність динамічних напружень поздовжнього зсуву у періодично шаруватому композиті з круговими тріщинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 3. – С. 46–54.
37. Стащук Н. Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. – Киев: Наук. думка, 1993. – 358 с.
38. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-видавн. центр НТШ, 2007. – 716 с.
39. Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З. Умови контактної взаємодії (огляд) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 110–125.
40. Тихомиров В. В. Напряженное состояние кусочно-однородного слоя с симметричной полубесконечной трещиной // Прикл. механика. – 1992. – **28**, № 2. – С. 21–27.
41. Эрдоган Ф., Кобаяси А., Атлури С., Фрэнк Л., Накагаки М., Нисиока Т., Ньюмен Дж., мл., Раджу И., Сведлоу Дж. Вычислительные методы в механике разрушения. – Москва: Мир, 1990. – 392 с.
42. Achenbach J. D., Li Z. L. Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens // Wave Motion. – 1986. – **8**, No. 3. – P. 225–234.
43. Ang W. T., Clements D. L. Hypersingular integral equations for periodic arrays of planar cracks in a periodically layered anisotropic elastic space under antiplane shear stress // Acta Math. Sci. – 1999. – **19**, No. 3. – P. 343–355.
44. Anlas G., Santare M. H., Lambros J. Numerical calculation of stress intensity factors in functionally graded materials // Int. J. Fract. – 2000. – **104**, No. 2. – P. 131–143.
45. Audoly B. Asymptotic study of the interfacial crack with friction // J. Mech. Phys. Solids. – 2000. – **48**, No. 9. – P. 1851–1864.
46. Baik J.-M., Thompson R. B. Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: A quasi-static model // J. Nondestr. Eval. – 1984. – **4**, No. 3-4. – P. 177–196.
47. Barsoum R. S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1976. – **10**, No. 1. – P. 23–37.
48. Bingol O. R., Schiefelbein B., Grandin R. J., Holland S. D., Krishnamurthy A. An integrated framework for solid modeling and structural analysis of layered composites with defects // Computer-Aided Design. – 2018. – **106**. – P. 1–12.

49. *Boström A., Golub M.* Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modeled by spring boundary conditions // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 2009. – **62**, No. 1. – P. 39–52.
50. *Boström A., Wickham G.* On the boundary conditions for ultrasonic transmission by partially closed cracks // *J. Nondestr. Eval.* – 1991. – **10**, No. 4. – P. 139–149.
51. *Bovik P.* A comparison between the Tiersten model and O(h) boundary conditions for elastic surface waves guided by thin layers // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1996. – **63**, No. 1. – P. 162–167. – <https://doi.org/10.1115/1.2787193>.
52. *Chan Y. S., Paulino G. H., Fannjiang A. C.* The crack problem for nonhomogeneous materials under antiplane shear loading – A displacement based formulation // *Int. J. Solids Struct.* – 2001. – **38**, No. 17. – P. 2989–3005.
53. *Chen B. T., Hu C. T., Lee S.* Dislocations near a sliding interface // *Int. J. Eng. Sci.* – 1998. – **36**, No. 9. – P. 1011–1034.  
– [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(98\)00004-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(98)00004-4).
54. *Craster R. V., Kaplunov J.* Dynamic localization phenomena in elasticity, acoustics and electromagnetism. – Wien etc.: Springer, 2013. – 260 p.
55. *Dai H.-H., Kaplunov J., Prikazchikov D. A.* A long-wave model for the surface elastic wave in a coated half-space // *Proc. R. Soc. London. A.* – 2010. – **466**, No. 2122. – P. 3097–3116. – <https://doi.org/10.1098/rspa.2010.0125>.
56. *Datta S. K., Shah A. H.* Elastic waves in composite media and structures with applications to ultrasonic nondestructive evaluation. – CRC Press, 2009. – 321 p.
57. *Delale F., Erdogan F.* The crack problem for a nonhomogeneous plane // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1983. – **50**, No. 3. – P. 609–614.  
– <https://doi.org/10.1115/1.3167098>.
58. *Ekhlov A. V., Khay O. M., Zhang Ch., Sladek J., V. Sladek V.* A BDEM for transient thermoelastic crack problems in functionally graded materials under thermal shock // *Comput. Mater. Sci.* – 2012. – **57**. – P. 30–37.  
– <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2011.06.019>.
59. *England A. H.* A crack between dissimilar media // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1965. – **32**, No. 2. – P. 400–402. – <https://doi.org/10.1115/1.3625813>.
60. *Erdogan F.* Fracture mechanics of functionally graded materials // *Compos. Eng.* – 1995. – **5**, No. 7. – P. 753–770. – [https://doi.org/10.1016/0961-9526\(95\)00029-M](https://doi.org/10.1016/0961-9526(95)00029-M).
61. *Erdogan F.* Stress distribution in nonhomogeneous elastic plane with cracks // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1963. – **30**, No. 2. – P. 232–236.  
– <https://doi.org/10.1115/1.3636517>.
62. *Erdogan F.* The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1985. – **52**, No. 4. – P. 823–828. – <https://doi.org/10.1115/1.3169153>.
63. *Fu Y. B.* Linear and nonlinear wave propagation in coated elastic half-spaces // *Waves in Nonlinear Pre-Stressed Materials: CISM Courses and Lectures / M. De-strade, G. Saccomandi (Eds).* – Vienna: Springer, 2007. – Vol. 495. – P. 103–127.
64. *Golub M. V., Boström A.* Interface damage modeled by spring boundary conditions for in-plane elastic waves // *Wave Motion.* – 2011. – **48**, No. 2. – P. 105–115.  
– <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2010.09.003>.
65. *Golub M. V., Doroshenko O. V., Boström A.* Effective spring boundary conditions for a damaged interface between dissimilar media in three-dimensional case // *Int. J. Solids Struct.* – 2016. – **81**. – P. 141–150.  
– <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.11.021>.
66. *Gopalakrishnan S.* Wave propagation in materials and structures. – Boca Raton: CRC Press, 2016. – 971 p.
67. *Gu P., Asaro R. J.* Cracks in functionally graded materials // *Int. J. Solids Struct.* – 1997. – **34**, No. 1. – P. 1–17. – [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00289-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00289-8).
68. *Gu P., Dao M., Asaro R. J.* A simplified method for calculating the crack tip field of functionally graded materials using the domain integral // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1999. – **66**, No. 1. – P. 101–108. – <https://doi.org/10.1115/1.2789135>.
69. *Guz I. A., Menshykova M., Soutis C.* Internal instability as a possible failure mechanism for layered composites // *Phil. Trans. R. Soc. London. A.* – 2016. – **374**, No. 2071. – Art. 20160019. – <http://doi.org/10.1098/rsta.2016.0019>.
70. *Haskell N. A.* The dispersion of surface waves on multilayered media // *Bull. Seis-mol. Soc. Am.* – 1953. – **43**, No. 1. – P. 17–34.  
– <https://doi.org/10.1785/BSSA0430010017>.

71. *Hilton P. D.* A specialized finite element approach for three-dimensional crack problems // *Mechanics of fracture*. – V. 3. Plates and shells with cracks / Ed. G. C. Sih. – Leyden: Noordhoff Int. Publ. – 1977. – P. 273–298.
72. *Hvatov A., Sorokin S.* Assessment of reduced-order models in analysis of Floquet modes in an infinite periodic elastic layer // *J. Sound Vib.* – 2018. – **440**. – P. 332–345. – <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.10.034>.
73. *Jia Z. H., Shippy D. J., Rizzo F. J.* Boundary-element analysis of wave scattering from cracks // *Commun. Appl. Num. Methods*. – 1990. – **6**, No. 8. – P. 591–601.
74. *Kaczynski A., Matysiak S. J., Pauk V. J.* Griffith crack in a laminated elastic layer // *Int. J. Fract.* – 1994. – **67**, No. 4. – P. R81–R86. – <https://doi.org/10.1007/BF00032505>.
75. *Kaczynski A., Matysiak S.* On crack problems in periodic two-layered elastic composites // *Int. J. Fract.* – 1988. – **37**, No. 1. – P. 31–45. – <https://doi.org/10.1007/BF00017821>.
76. *Kaplnov J., Prikazchikov D., Sultanova L.* Rayleigh-type waves on a coated elastic half-space with a clamped surface // *Phil. Trans. R. Soc. London. A*. – 2019. – **377**, No. 2156. – Art. 20190111. – <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2019.0111>.
77. *Kaplnov J., Zakharov A., Prikazchikov D.* Explicit models for elastic and piezoelectric surface waves // *IMA. J. Appl. Math.* – 2006. – **71**, No. 5. – P. 768–782. – <https://doi.org/10.1093/imamat/hxl012>.
78. *Kattan P. I., Voyiadjis G. Z.* Damage mechanics with finite elements. Practical applications with computer tools. – Berlin etc.: Springer, 2002. – x+113 p.
79. *Khanna A., Kotousov A.* The stress field due to an interfacial edge dislocation in a multi-layered medium // *Int. J. Solids Struct.* – 2015. – **72**, No. 1. – P. 1–10. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.06.030>.
80. *Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems // *Bull. Seismol. Soc. Am.* – 1964. – **54**, No. 1. – P. 431–438. – <https://doi.org/10.1785/BSSA0540010431>.
81. *Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S. J.* Stress singularities in a periodically layered composite near interface crack tips // *Int. J. Fract.* – 2007. – **143**, No. 3. – P. 277–286. – <https://doi.org/10.1007/s10704-007-9064-7>.
82. *Kumar S., Singh I. V., Mishra B. K., Singh A.* New enrichments in XFEM to model dynamic crack response of 2-D elastic solids // *Int. J. Impact Eng.* – 2016. – **87**. – P. 198–211. – <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2015.03.005>.
83. *Kunets Y. I., Matus V. V., Mishchenko V. O., Porochov'skyj V. V.* SH-wave scattering by elastic inclusion with a thin interface layer of low rigidity // *DIPED-2014: Proc. XIXth Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory*. – Tbilisi, 2014. – P. 157–159.
84. *Kvasha O. V., Boström A., Glushkova N. V., Glushkov E. V.* The propagation of in-plane P-SV waves in a layered elastic plate with periodic interface cracks: exact versus spring boundary conditions // *Waves in Random & Complex Media*. – 2011. – **21**, No. 3. – P. 515–528. – <https://doi.org/10.1080/17455030.2011.593586>.
85. *Lavrentyev A. I., Rokhlin S. I.* Models for ultrasonic characterization of environmental degradation of interfaces in adhesive joints // *J. Appl. Phys.* – 1994. – **76**, No. 8. – P. 4643–4650. – <https://doi.org/10.1063/1.357301>.
86. *Lavrentyev A. I., Rokhlin S. I.* Ultrasonic spectroscopy of imperfect contact interfaces between a layer and two solids // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1998. – **103**, No. 2. – P. 657–664. – <https://doi.org/10.1121/1.423235>.
87. *Leguillon D. L.* Interface crack tip singularity with contact and friction // *C. R. Acad. Sci. Ser. B*. – 1999. – **327**, No. 5. – P. 437–442.
88. *Lei J., Wang Y. S., Gross D.* Dynamic interaction between a sub-interface crack and the interface in a bi-material: time-domain BEM analysis // *Archive Appl. Mech.* – 2003. – **73**, No. 3-4. – P. 225–240. – <https://doi.org/10.1007/s00419-003-0281-x>.
89. *Leiderman R., Barbone A. M. B., Braga P. E.* Scattering of ultrasonic waves by defective adhesion interfaces in submerged laminated plates // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2005. – **118**, No. 4. – P. 2154–2166. – <https://doi.org/10.1121/1.2036147>.
90. *Lekesiz H., Katsube N., Rokhlin S. I., Seghi R. R.* Effective spring stiffness for a planar periodic array of collinear cracks at an interface between two dissimilar isotropic materials // *Mech. Mater.* – 2011. – **43**, No. 2. – P. 87–98. – <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2010.12.004>.
91. *Lekesiz H., Katsube N., Rokhlin S. I., Seghi R. R.* Effective spring stiffness for a periodic array of interacting coplanar penny-shaped cracks at an interface



- between two dissimilar isotropic materials // *Int. J. Solids Struct.* – 2013. – **50**, No. 18. – P. 2817–2828. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.04.006>.
92. Liu Y., Lin S., Li Y., Li Ch., Liang Y. Numerical investigation of Rayleigh waves in layered composite piezoelectric structures using the SIGA-PML approach // *Compos. Part B-Eng.* – 2018. – **158**. – P. 230–238.
  93. Loboda V. V. Analytical derivation and investigation of the interface crack models // *Int. J. Solids Struct.* – 1998. – **35**, No. 33. – P. 4477–4489. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00255-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00255-2).
  94. Mahamood R. M., Akinlabi E. T. *Functionally graded materials.* – Cham: Springer, 2017. – xxi+103 p.
  95. Mal A. K., Knopoff L. A differential equation for surface waves in layers with varying thickness // *J. Math. Anal. Appl.* – 1968. – **21**, No. 2. – P. 431–441.
  96. Margetan F. J., Thompson R. B., Gray T. A. Interfacial spring model for ultrasonic interactions with imperfect interfaces: Theory of oblique incidence and application to diffusion-bonded butt joints // *J. Nondestruct. Eval.* – 1988. – **7**, No. 3-4. – P. 131–152. – <https://doi.org/10.1007/BF00565998>.
  97. Marur P. R., Tippur H. V. Numerical analysis of crack-tip fields in functionally graded materials with a crack normal to the elastic gradient // *Int. J. Solids Struct.* – 2000. – **37**, No. 38. – P. 5353–5370.
  98. Matysiak S. J., Perkowski D. M. Crack normal to layered elastic periodically stratified space // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2008. – **50**, No. 3. – P. 220–225.
  99. Menshykov O. V., Menshykova M. V., Guz I. A. 3-D elastodynamic contact problem for an interface crack under harmonic loading // *Eng. Fract. Mech.* – 2012. – **80**. – P. 52–59. – <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.12.010>.
  100. Mikata Y. SH-waves in a medium containing a disordered periodic array of cracks // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1995. – **62**, No. 2. – P. 312–319. – <https://doi.org/10.1115/1.2895933>.
  101. Mikata Y., Achenbach J. D. Interaction of harmonic waves with a periodic array of inclined cracks // *Wave Motion.* – 1988. – **10**, No. 1. – P. 59–72. – [https://doi.org/10.1016/0165-2125\(88\)90006-6](https://doi.org/10.1016/0165-2125(88)90006-6).
  102. Murakami T., Sato T. Three-dimensional *J*-integral calculations of part-through surface crack problems // *Comput. Struct.* – 1983. – **17**, No. 5-6. – P. 731–736. – [http://doi.org/10.1016/0045-7949\(83\)90087-1](http://doi.org/10.1016/0045-7949(83)90087-1).
  103. Mikhas'kiv V. V. Opening-function simulation of the threedimensional nonstationary interaction of cracks in an elastic body // *Int. J. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, No. 1. – P. 75–84. – <https://doi.org/10.1023/a:1011364214291>.
  104. Mykhas'kiv V., Stankevych V. Elastodynamic problem for a layered composite with penny-shaped crack under harmonic torsion // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2019. – **99**, No. 5. – Art. e201800193. – <https://doi.org/10.1002/zamm.201800193>.
  105. Mykhas'kiv V. V., Stepanyuk O. I. Boundary integral analysis of the symmetric dynamic problem for an infinite bimaterial solid with an embedded crack // *Meccanica.* – 2001. – **36**, No. 4. – P. 479–495. – <https://doi.org/10.1023/A:1015097108811>.
  106. Mykhas'kiv V., Stankevych V., Kaplunov J., Prikazchikov D. Mode-III dynamic stress intensity factor of penny-shaped crack in a coated elastic half-space // *Сучасні проблеми механіки і математики: зб. праць [Матеріали міжнар. наук. конф., Львів, 22–25 травня 2018].* – Львів, 2018. – Том 2. – С. 109–110.
  107. Mykhas'kiv V., Stankevych V., Zhabdynskiy I., Zhang C. 3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces // *Int. J. Fract.* – 2009. – **159**. – P. 137–149. – <https://doi.org/10.1007/s10704-009-9390-z>.
  108. Nikishkov G. P., Atluri S. N. Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the “equivalent domain integral” method // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1987. – **24**, No. 9. – P. 1801–1821. – <https://doi.org/10.1002/nme.1620240914>.
  109. Pasternak Ia., Sulym H., Ilchuk N. Boundary element analysis of 3D shell-like rigid electrically conducting inclusions in anisotropic thermomagnetoelastic solids // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2019. – **99**, No. 7. – Art. e201800319. – <https://doi.org/10.1002/zamm.201800319>.
  110. Pommier S., Gravouil A., Combescure A., Moes N. *Extended finite element method for crack propagation.* – Wiley-ISTE Ltd., 2011. – xxiv+254 p.

111. *Pozharskii D. A., Sobol B. V., Vasiliev P. V.* Periodic crack system in a layered elastic wedge // *Mech. Adv. Mater. Struct.* – 2020. – **27**, No. 4. – P. 318–324.  
– <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1472346>.
112. *Qian Z.-H., Jin F., Lu T.-J., Kishimoto K.* Transverse surface waves in a functionally graded piezoelectric substrate coated with a finite-thickness metal waveguide layer // *Appl. Phys. Lett.* – 2009. – **94**, No. 2. – Art. 023501.  
– <https://doi.org/10.1063/1.3070540>.
113. *Rokhlin S. I., Huang W.* Ultrasonic wave interaction with a thin anisotropic layer between two anisotropic solids: Exact and asymptotic-boundary-condition methods // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1992. – **92**, No. 3. – P. 1729–1742.  
– <https://doi.org/10.1121/1.403912>.
114. *Ryvkin M.* A mode I crack parallel to the interfaces in a periodically layered medium // *Int. J. Fract.* – 1999. – **99**, No. 3. – P. 173–188.  
– <https://doi.org/10.1023/A:1018677325624>.
115. *Shen H.-S.* Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. – CRC Press, 2016. – 280 p.
116. *Sheng-Hu Ding, Xing Li.* The fracture analysis of an arbitrarily oriented crack in the functionally graded material under in-plane impact loading // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2013. – **66**. – P. 26–32.
117. *Shi P. P.* Interaction between the doubly periodic interfacial cracks in a layered periodic composite: Simulation by the method of singular integral equation // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2015. – **78**. – P. 25–39.  
– <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2015.04.003>.
118. *Shul C. W., Lee K. Y.* Dynamic response of subsurface interface crack in multi-layered orthotropic half-space under anti-plane shear impact loading // *Int. J. Solids Struct.* – 2001. – **38**, No. 20. – P. 3563–3574.  
– [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00216-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00216-X).
119. *Sladek J., Sladek V.* Dynamic stress intensity factors studied by boundary integrodifferential equations // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1986. – **23**, No. 5. – P. 919–928. – <https://doi.org/10.1002/nme.1620230512>.
120. *Sladek J., Sladek V., Solek P.* Elastic analyses in 3D anisotropic functionally graded solids by the MLPG // *Comput. Model. Eng. & Sci.* – 2009. – **43**. – P. 223–251.  
– <https://doi.org/10.3970/cmescs.2009.043.223>.
121. *Sladek J., Sladek V., Zhang Ch.* A local integral equation method for dynamic analysis in functionally graded piezoelectric materials // *Proc. 8th Int. Conf. on Boundary Element Techniques (BeTeq 2007), Naples, Italy, 24-26 July 2007 / Eds: V. Minutolo, M. H. Aliabadi.* – EC Ltd, 2007 – P. 141–148.
122. *Stankevych V. Z., Zhabdys'kyi I. Ya., Tereshchak Yu. V.* Interaction of the crack and thin elastic layer in the solid under the action of time-harmonic loading // *DIPED-2019: Proc. XXIVth Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory, Lviv, Sept. 12-14, 2019.* – Lviv, 2019. – P. 172–176.
123. *Steigmann D. J., Ogden R. W.* Surface waves supported by thin-film/substrate interactions // *IMA. J. Appl. Math.* – 2007. – **72**, No. 6. – P. 730–747.  
– <https://doi.org/10.1093/imamat/hxm018>.
124. *Suiker A. S. J., Fleck N. A.* Crack tunneling and plane-strain delamination in layered solids // *Int. J. Fract.* – 2004. – **125**, No. 1-2. – P. 1–32.  
– <https://doi.org/10.1023/B:FRAC.0000021064.52949.e2>.
125. *Thomson W.* Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // *J. Appl. Phys.* – 1950. – **21**, No. 2. – P. 89–93.  
– <https://doi.org/10.1063/1.1699629>.
126. *Tiersten H. F.* Elastic surface waves guided by thin films // *J. Appl. Phys.* – 1969. – **40**, No. 2. – P. 770–789. – <https://doi.org/10.1063/1.1657463>.
127. *Trace D. M.* 3-D elastic singularity element for evaluation of K along an arbitrary crack front // *Int. J. Fract.* – 1973. – **9**, No. 3. – P. 340–343.  
– <https://doi.org/10.1007/BF00049217>.
128. *Turchyn I., Turchyn O.* Transient plane waves in multilayered half-space // *Acta mechanica et automatica.* – 2013. – **7**, No. 1. – P. 53–57.  
– <https://doi.org/10.2478/ama-2013-0010>.
129. *Ueda S., Biwa S., Watanabe K., Heuer R., Pecorari C.* On the stiffness of spring model for closed crack // *Int. J. Eng. Sci.* – 2006. – **44**, No. 13-14. – P. 874–888.  
– <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2006.06.002>.

130. Walters M. C., Paulino G. H., Dodds R. H. (Jr.) Stress-intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**, No. 3-4. – P. 1081–1118.
131. Wang B. L., Han J. C., Du S. Y. Cracks problem for non-homogeneous composite material subjected to dynamic loading // Int. J. Solids Struct. – 2000. – **37**, No. 9. – P. 1251–1274. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(98\)00292-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00292-3).
132. Wang X., Zhong Zh. A cracked sliding interface between anisotropic bimetals // Mech. Res. Commun. – 2003. – **30**, No. 4. – P. 387–393.
133. Willis J. R. Fracture mechanics of interfacial crack // J. Mech. Phys. Solids. – 1971. – **19**, No. 6. – P. 353–368. – [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(71\)90004-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(71)90004-4).
134. Yan Z., Wei C., Zhang C. Elastic SH wave propagation in periodic layered composites with a periodic array of interface cracks // Acta Mech. Solida Sin. – 2015. – **28**, No. 5. – P. 453–463. – [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(15\)30041-0](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(15)30041-0).
135. Yu H. Y., Cooper K. P. Dynamic penny-shaped cracks in multilayer sandwich composites // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2009. – **51**, No. 3. – P. 181–188.
136. Yue Z. Q., Xiao H. T., Tham L. G. Boundary element analysis of crack problems in functionally graded materials // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40**, No. 13-14. – P. 3273–3291. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00094-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00094-5).
137. Zhang Ch., Cui M., Wang J., Gao X. W., Sladek J., Sladek V. 3D crack analysis in functionally graded materials // Eng. Fract. Mech. – 2011. – **78**, No. 3. – P. 585–604. – <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.05.017>.
138. Zhang Ch., Gross D. On wave propagation in elastic solids with cracks. – Southampton – Boston: Comput. Mech. Publ., 1998. – 267 p.
139. Zhang Ch., Sladek J., Sladek V. Antiplane crack analysis of a functionally graded material by a BIEM // Comput. Mater. Sci. – 2005. – **32**, No. 3-4. – P. 611–619.
140. Zhang Ch., Sladek J., Sladek V. Effects of material gradients on transient dynamic mode-III stress intensity factors in a FGM // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40**, No. 20. – P. 5251–5270. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00243-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00243-9).
141. Zhang Ch., Sladek J., Sladek V. Numerical analysis of cracked functionally graded materials // Key Eng. Mater. – 2003. – **251-252**. – P. 463–472.
142. Zhang G. Y., Gao X.-L., Ding S. R. Band gaps for wave propagation in 2-D periodic composite structures incorporating microstructure effects // Acta Mechanica. – 2018. – **229**, No. 10. – P. 4199–4224. – <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2207-2>.
143. Zou Z. Z., Wu S. X., Li C. Y. On the multiple isoparametric finite element method and computation of stress intensity factor for cracks in FGMs // Key Eng. Mater. – 2000. – **183-187**. – P. 511–516.

#### ANALYSIS OF 3-D PROBLEMS OF DYNAMIC LOADING OF ELASTIC PIECEWISE-HOMOGENEOUS BODIES WITH INTERNAL CRACKS

*A review of the state of research on problems of dynamic loading of elastic piecewise homogeneous bodies with plane-parallel interfaces of materials and internal cracks is carried out. Using the boundary-integral formulation of these 3-D problems, the effects of different types of contact boundary conditions on interfaces, bimaterial and layered structures of composites on the dynamic stress intensity factors in the vicinity of defects are described.*

**Key words:** *3-D dynamic problems, piecewise homogeneous bodies, plane-parallel boundary surfaces of materials, nonclassical contact boundary conditions, internal plane cracks, dynamic stress intensity factors, boundary integral equation method.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,  
Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів

Одержано  
12.11.20