

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМІВНИХ ТЕРМОПРУЖНИХ НИТКОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ В ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

На основі застосування принципу спряження континуумів різної вимірності запропоновано підхід до математичного моделювання деформівних ниткових неоднорідностей. Цей підхід полягає в умовному розбитті такої задачі на три частково пов'язані підзадачі: **а) зовнішню** для середовища з умовно заданими (наперед невідомими) на просторових кривих L функціях впливу; **б) проміжну** у вигляді умов контактної взаємодії середовища з неоднорідністю; **в) внутрішню**, що полягає у побудові математичної моделі неоднорідності, яка пов'язує функцію впливу безпосередньо на поверхні включення із розподілом фізико-механічних полів усередині нього. Для випадку ідеальної термомеханічної взаємодії неоднорідності та середовища побудовано інтегральні співвідношення зовнішньої задачі та математичні моделі ниткових неоднорідностей, що враховують їхню теплопровідність та деформування. У випадку прямолінійних неоднорідностей запропоновано метод розв'язування побудованих систем інтегральних рівнянь на основі використання скінченних сум рядів за поліномами Лежандра для шуканих функцій впливу ниткового включення. Здійснено числовий аналіз і з'ясовано вплив відносних теплопровідності, податності та лінійного теплового розширення матеріалу неоднорідності на функції впливу, а також термомеханічні поля поблизу вершини включення.

Ключові слова: ниткове деформівне включення, математична модель, числовий аналіз, термопружність.

Вступ. Вивчення впливу тонких ниткових включень у матеріалі має значний інтерес з огляду на зростання ролі композитних матеріалів у сучасних машино-, авіа-, ракетобудуванні та будівництві, що зумовлює потребу у побудові обчислювальних методів розрахунку термонапруженого стану та ефективних термомеханічних характеристик таких новітніх матеріалів (див., наприклад, [11]). Окремо слід згадати наповнення у вигляді нано-дротиків та нано-трубок (зокрема, карбонових), що істотно покращують функціональні властивості композитів [6].

Проте побудови математичних моделей ниткових чи голкових включень стосуються лише поодинокі роботи [1, 2], у яких розв'язок задачі будується із використанням процедури граничного переходу від еліпсоїдального чи сфероїдального включення до голки малої чи навіть нульової товщини. Незважаючи на те, що такий підхід дає можливість для такого окремішнього деформівного включення у певних випадках отримати простий аналітичний розв'язок, однак, це буде коректним у випадку довільного закону поперечної зміни площі поперечного перерізу волокна (зокрема, й сталого значення) лише для матеріалу з його абсолютною податністю чи жорсткістю. Це зумовлено тим, що усереднені механічні і теплофізичні властивості волокон істотно залежать не лише від характеристик матеріалу, але й від законів зміни площі й форми його поперечних перерізів. Тому, якщо тонке деформівне чи теплопровідне волокно належить до класу голкових, але не має в цілому еліпсоїдальної форми, то цей підхід на основі теорії J. D. Eshelby [5] вже не буде коректним, і закон зміни площі його поперечного перерізу для всіх класів ниткових включень обов'язково треба враховувати нарівні із властивостями матеріалу.

Перші кроки у цьому напрямі були зроблені у працях [8, 10], де при математичному моделюванні ідеально теплопровідних і недеформівних неоднорідностей запропоновано підхід, у якому розв'язування задачі зводить-

✉ iaroslav.m.pasternak@gmail.com

ся до визначення розподілених на серединній лінії (осі включення) $\mathbf{x} \in L$ функцій впливу (джерел тепла $\gamma(\mathbf{x})$ і зусиль $\mathbf{p}(\mathbf{x})$) без необхідності граничних переходів, адже включення (з огляду на його тонкість) замінюється лінією лише для середовища, що його містить, проте саме воно вважається геометричним об'єктом певної товщини, що таким чином не накладає жодних обмежень на математичну модель такої неоднорідності. Подібний підхід було використано у скінченноелементній бінарній моделі [4, 9] текстильних композитів при визначенні їхніх ефективних характеристик, де були поєднані просторові (середовище) та лінійні (волокна) скінченні елементи. Однак у цих працях розглядалися суто пружні (а не термопружні) задачі, а також не надано належної оцінки збіжності та достовірності отриманого числового розв'язку.

Щодо розгляду математичних моделей деформівних у довільний спосіб теплопровідних ниткових неоднорідностей, слід зазначити, що подібно, як у випадку моделей недеформівних та ідеально теплопровідних включень [8, 10] чи, як і в базовому методі функцій стрибка для тонких включень розмірності на одиницю меншою від розмірності базової структури [3], задачу для деформівного ниткового включення (розмірність менша на дві одиниці) можна умовно розбити на три частково пов'язані підзадачі: **а) зовнішню** – для середовища з умовно заданими (наперед невідомими) на просторових кривих L функціями впливу; **б) проміжну** у вигляді умов контактної взаємодії середовища з неоднорідністю; **в) внутрішню**. Остання задача (*внутрішня*) полягає у побудові більш чи менш адекватної математичної моделі неоднорідності, у якій виявляється зв'язок між поверхневими функціями впливу (на поверхні волокна) та поведінкою (деформуванням, теплопровідністю тощо) осі L ниткового включення і його поперечних перерізів. *Проміжна* задача пов'язує між собою згадані поверхневі функції впливу *внутрішньої* і функції впливу *зовнішньої* задач за допомогою умов взаємодії. Результатом цього є конкретна повна система інтегральних рівнянь (чи нерівностей) задачі з урахуванням характеру контакту між включенням і середовищем – ідеального чи неідеального. У випадку ідеального контакту відповідні функції впливу *зовнішньої* і *внутрішньої* задач повинні бути тотожними за модулем і протилежними за напрямом дії.

1. Зовнішні температурна і термопружна задачі для ізотропного лінійно-пружного середовища. Тоді, якщо вважати, що ниткове включення чинить опір лише поздовжньому розтягу-стиску і поздовжній передачі тепла, то й у цьому випадку інтегральні залежності зовнішньої задачі, отримані в попередніх публікаціях [8, 10], де розглядалися недеформівні ідеально теплопровідні ниткові неоднорідності, залишаються без змін. Це означає, що у задачі теплопровідності відповідне інтегральне співвідношення має вигляд

$$\int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) [\gamma(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x}_0)] dL(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{x}_0) \left[\int_{L \setminus L_\varepsilon} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}_0) \right] = \theta(\mathbf{x}_0) - \theta^\infty(\mathbf{x}_0), \quad (1)$$

де

$$B(\mathbf{x}_0) = \int_{L_\varepsilon} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi k_t |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (3)$$

k_t – коефіцієнт теплопровідності; $n_i(\mathbf{x}')$ – компоненти вектора одиничної нормалі до поверхні S включення у точці \mathbf{x}' . Відповідна інтегральна залежність термопружного деформування подається як

$$\begin{aligned}
u_i(\mathbf{x}_0) = & \int_L U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)(p_j(\mathbf{x}) - p_j(\mathbf{x}_0)) dL(\mathbf{x}) + \\
& + p_j(\mathbf{x}_0) \left[\int_{L \setminus L_\varepsilon} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) + A_{ij}(\mathbf{x}_0) \right] + \\
& + \int_L V_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + u_i^\infty(\mathbf{x}_0),
\end{aligned} \tag{4}$$

де

$$A_{ij}(\mathbf{x}_0) = \int_{L_\varepsilon} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}), \tag{5}$$

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}}{16\pi\mu(1-\nu)} [(3-4\nu)\delta_{ij} + \tau_i\tau_j],$$

$$V_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{(1+\nu)\alpha}{8\pi(1-\nu)k_t} \tau_i, \tag{6}$$

$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ – компоненти тензора модулів пружності матеріалу; λ , μ – сталі Ляме; $\nu = \lambda/(2(\lambda + \mu))$ – коефіцієнт Пуассона; α – коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу; $\boldsymbol{\tau}$ – напрямні косинуси вектора $\mathbf{x} - \mathbf{y}$; L_ε – малий контур, що огинає точку колокації, причому його радіус ε є регуляризаційним параметром.

При цьому у попередніх працях для внутрішньої задачі щодо ідеально теплопровідного недеформівного ниткового включення, яке перебуває в ідеальному термомеханічному контакті з середовищем, було запропоновано такі математичні моделі теплопровідності:

$$\theta(\mathbf{x}_0) = \theta^0 \tag{7}$$

і термoprужності:

$$u_i(\mathbf{x}_0) = u_i^0 + \varepsilon_{ijk}\omega_j^0 x_{0k}. \tag{8}$$

Тут θ^0 , u_i^0 та ω_j^0 – відповідно температура, переміщення і поворот включення як жорсткого цілого; ε_{ijk} – компоненти тензора Леві – Чівіта.

Очевидно, що при розгляді деформівних за довільними реологічними моделями ниткових неоднорідностей, які можна описати функціями впливу $\gamma(\mathbf{x})$, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, співвідношення (1) і (4) зовнішньої задачі, як і запропонована схема їхнього розв'язування, також не зміняться. Тобто, якщо розв'язати у той чи інший спосіб внутрішню задачу (побудувати адекватні математичні моделі теплопровідності та термoprужності деформівних включень) і використати їх разом із умовами проміжної задачі (умовами контакту) у поданому вище методі розв'язування сформульованих задач, отримаємо повну систему розрахункових співвідношень для аналізу фізико-механічних полів у тілах із деформівними теплопровідними нитковими неоднорідностями.

Важливо звернути увагу на те, що формулювання і побудова співвідношень внутрішньої задачі для матриці того чи іншого класу властивостей здійснюється цілком незалежно від зовнішньої і проміжної задач. Так само із зовнішньою задачею. Це означає, що зовнішня і внутрішня задачі є взаємодоповнювальними, а не взаємозалежними. Їхнє поєднання відбувається за допомогою проміжної задачі.

2. Математична модель теплопровідного ниткового включення і рівняння задач теплопровідності ізотропного середовища з такою неоднорідністю. Розглянемо баланс тепла в утвореній нормальним перерізом через точку \mathbf{x}_0 осі лівій частині ниткового включення (рис. 1). Вважаючи, що

між середовищем (матрицею) і включенням є ідеальний термомеханічний контакт, то функції впливу на лінії L зовнішньої задачі є такими самими, як поверхневі функції впливу на поверхні ниткового включення. Тоді узагальнений вплив середовища на поверхню неоднорідності задається функцією впливу $\gamma^*(\mathbf{x})$, яка є інтегралом нормальної до поверхні включення складової вектора теплового потоку по периметру його поперечного перерізу, заданого координатою $\mathbf{x} \in L$, де L – серединна лінія (вісь) неоднорідності. Тоді балансове співвідношення набуде вигляду

$$H_0(\mathbf{x}_a) + \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_0} \gamma^*(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + h_n(\mathbf{x}_0)S = 0, \quad (9)$$

де $H_0(\mathbf{x}_a)$ – прикладена до лівого торця включення теплота; $h_n(\mathbf{x}_0)$ – усереднений тепловий потік у нормальному перерізі неоднорідності площею S , що для круглих у нормальному перерізі неоднорідностей дорівнює $S = \pi r^2$.

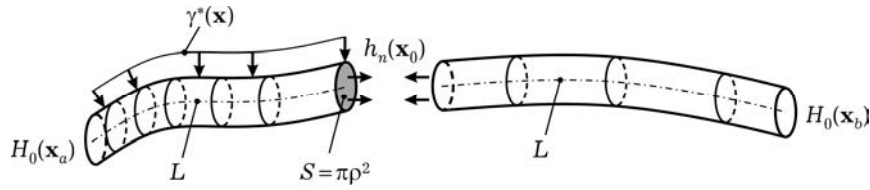


Рис. 1. Тепловий потік через внутрішній нормальний переріз ниткової неоднорідності.

Усреднюючи закон теплопровідності Фур'є у нормальному перерізі неоднорідності, отримаємо, що

$$h_n(\mathbf{x}) = -k_t^i \frac{\partial \theta(\mathbf{x})}{\partial L(\mathbf{x})}, \quad (10)$$

де $\theta(\mathbf{x})$ – усереднена температура у нормальному перерізі ниткової неоднорідності у точці \mathbf{x} ; k_t^i – коефіцієнт теплопровідності матеріалу включення.

Підставивши (10) у (9), отримаємо

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{x})}{\partial L} = \frac{1}{k_t^i S} \left[H_0(\mathbf{x}_a) + \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}} \gamma^*(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) \right]. \quad (11)$$

Інтегрування (11) дає

$$\theta(\mathbf{x}_0) = \theta(\mathbf{x}_a) + \frac{1}{k_t^i S} \left[H_0(\mathbf{x}_a)L(\mathbf{x}_0) + \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_0} \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}} \gamma^*(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) \right], \quad (12)$$

де $\theta(\mathbf{x}_a)$ – температура лівого торця ниткової неоднорідності.

Відповідно до залежності (9) отримаємо також рівняння глобального теплового балансу неоднорідності (коли переріз \mathbf{x}_0 збігається із правим торцем \mathbf{x}_b):

$$H_0(\mathbf{x}_a) + H_0(\mathbf{x}_b) + \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \gamma^*(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) = 0, \quad (13)$$

яке слід обов'язково долучити до рівнянь її математичної моделі.

У випадку ідеально теплопровідного ниткового включення $k_t^i \rightarrow \infty$, і рівняння моделі (12) зводиться до залежності (7).

Коли неоднорідність і середовище перебувають в ідеальному тепловому контакті, функція впливу $\gamma(\mathbf{x})$ включення на матрицю і функція впливу $\gamma^*(\mathbf{x})$ матриці на поверхню неоднорідності є протилежними за знаком ска-

лярними функціями:

$$\gamma^*(\mathbf{x}) = -\gamma(\mathbf{x}). \quad (14)$$

Це дає можливість легко побудувати інтегральні рівняння задачі теплопровідності середовища із нитковим включенням.

Зокрема, для прямолінійного ниткового включення завдовжки $2a$ та апроксимації функції впливу температур, заданої формулою

$$\gamma(\tilde{x}) = \sum_{j=0}^N c_j P_j(\tilde{x}), \quad (15)$$

з урахуванням безрозмірних величин

$$\tilde{x} = \frac{x_1}{a}, \quad \tilde{x}^{(0)} = \frac{x_1^{(0)}}{a}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{a}, \quad (16)$$

рівняння (12) з урахуванням умови ідеального теплового контакту (14) запишемо у вигляді

$$\theta(\tilde{x}_0) = \theta^0 + \frac{a^2}{k_t^i S} \left[\frac{H_0^{(a)}}{a} (\tilde{x}^{(0)} + 1) - \sum_{j=0}^N c_j \int_{-1}^{\tilde{x}^{(0)}} \int_{-1}^{\tilde{x}} P_j(\tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{x} \right], \quad (17)$$

де $\theta^0 = \theta(-1)$ – температура лівого кінця включення. Тут $P_j(\tilde{x})$ – поліноми Лежандра.

З огляду на властивості поліномів Лежандра [7]

$$P_j(x) = \frac{1}{2j+1} \frac{d}{dx} (P_{j+1}(x) - P_{j-1}(x)) \quad (18)$$

і на те, що [7]

$$P_j(-1) = \begin{cases} 1, & j = 2m, \\ -1, & j = 2m + 1, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

інтеграл у правій частині (17) набуде вигляду

$$\int_{-1}^{\tilde{x}^{(0)}} \int_{-1}^{\tilde{x}} P_j(\tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{x} = \frac{P_{j+2}(\tilde{x}^{(0)})}{(2j+1)(2j+3)} - \frac{2P_j(\tilde{x}^{(0)})}{(2j-1)(2j+3)} + \frac{P_{j-2}(\tilde{x}^{(0)})}{(2j-1)(2j+1)}. \quad (20)$$

При цьому у випадку від'ємних індексів у (20) слід вважати, що

$$P_{-j}(\tilde{x}) = -P_{j-1}(\tilde{x}), \quad y > 0. \quad (21)$$

Тоді з урахуванням (21) рівняння математичної моделі (17) прямолінійного ниткового теплопровідного включення набуде вигляду

$$\theta(\tilde{x}_0) = \theta^0 + \frac{a^2}{k_t^i S} \frac{H_0^{(a)}}{a} (\tilde{x}^{(0)} + 1) - \frac{a^2}{k_t^i S} \times \\ \times \sum_{j=0}^N c_j \left[\frac{P_{j+2}(\tilde{x}^{(0)})}{(2j+1)(2j+3)} - \frac{2P_j(\tilde{x}^{(0)})}{(2j-1)(2j+3)} + \frac{P_{j-2}(\tilde{x}^{(0)})}{(2j-1)(2j+1)} \right]. \quad (22)$$

Перетворивши на основі виразів (15), (16) аналогічним чином праву частину інтегральної залежності (1), отримаємо функційні рівняння зовнішньої задачі:

$$\sum_{j=0}^N \left[1 + g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon}) - \frac{e_j}{\pi} \right] c_j P_j(\tilde{x}^{(0)}) + g_x(\tilde{x}^{(0)}) \sum_{j=0}^N c_j P_j(\tilde{x}^{(0)}) = \\ = -4k_t \theta(\tilde{x}^{(0)}) - 4h^0 a P_1(\tilde{x}^{(0)}). \quad (23)$$

У (23) вважаємо, що теплове навантаження середовища задане на

безмежності однорідним тепловим потоком h^0 , спрямованим уздовж осі Ox_1 . Коефіцієнти e_i задовольняють рекурентну формулу

$$e_0 = 0, \quad e_i = e_{i-1} + \frac{2}{i}, \quad i \geq 1. \quad (24)$$

Функції $g_x(\tilde{x})$ і $g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon})$ задані співвідношеннями

$$g_x(\tilde{x}) = \frac{1}{\pi} [\ln(1 + \tilde{x}) + \ln(1 - \tilde{x})], \quad g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon}) = -\frac{2}{\pi} \ln \tilde{\varepsilon}. \quad (25)$$

Підставивши (22) в (23), отримаємо такі функційні залежності задачі теплопровідності середовища із прямолінійним нитковим включенням довільної теплопровідності:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \left[1 + g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon}) - \frac{e_j}{\pi} \right] c_j P_j(\tilde{x}^{(0)}) + g_x(\tilde{x}^{(0)}) \sum_{j=0}^N c_j P_j(\tilde{x}^{(0)}) = & -4k_t \theta^0 P_0(\tilde{x}^{(0)}) - \\ & - \frac{4k_t a^2}{k_t^i S} \frac{H_0^{(a)}}{a} (P_1(\tilde{x}^{(0)}) + P_0(\tilde{x}^{(0)})) - 4h^0 a P_1(\tilde{x}^{(0)}) + \frac{4k_t a^2}{k_t^i S} \times \\ & \times \sum_{j=0}^N c_j \left[\frac{P_{j+2}(\tilde{x}^{(0)})}{(2j+1)(2j+3)} - \frac{2P_j(\tilde{x}^{(0)})}{(2j-1)(2j+3)} + \frac{P_{j-2}(\tilde{x}^{(0)})}{(2j-1)(2j+1)} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Помножимо (26) на $P_i(\tilde{x}^{(0)})$, $i = 0, 1, \dots, N$, та зінтегруємо від -1 до 1 . Із використанням умови ортогональності [7]

$$\int_{-1}^1 P_j(x) P_i(x) dx = \frac{2\delta_{ij}}{2i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (27)$$

отримаємо основну частину системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для визначення коефіцієнтів c_j задачі теплопровідності середовища з прямолінійним нитковим включенням довільної теплопровідності:

$$\begin{aligned} \left[1 + g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon}) - \frac{e_i}{\pi} \right] c_i + \frac{2i+1}{2} \sum_{j=0}^N b_{ij} c_j - \\ - 4\eta \left[\frac{c_{i-2}}{(2i-3)(2i-1)} - \frac{2c_i}{(2i-1)(2i+3)} + \frac{c_{i+2}}{(2i+3)(2i+5)} \right] = \\ = - \left(4k_t \theta^0 + 4 \frac{\eta}{a} H_0^{(a)} \right) \delta_{i0} - \left(4h^0 a + 4 \frac{\eta}{a} H_0^{(a)} \right) \delta_{i1}, \end{aligned} \quad (28)$$

де $\eta = \frac{k_t a^2}{k_t^i S}$ – відносний термоопір перерізу ниткової неоднорідності;

$b_{ij} = \int_{-1}^1 g_x(x) P_i(x) P_j(x) dx$. При цьому з огляду на (21) у випадку появи невідомих c_i з від'ємними індексами їх слід замінити на $-c_{-i-1}$, а невідомі c_i з індексами, більшими від N , з огляду на застосовану процедуру ортогоналізації, можна вважати рівними нулеві.

Відповідно до (15), (27) для прямолінійного ниткового включення рівняння (13) його глобального теплового балансу зведеться до вигляду

$$2ac_0 - H_0^{(a)} - H_0^{(b)} = 0. \quad (29)$$

Співвідношення (28) і (29) формують повну систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів скінченної суми ряду (15) функції впливу $\gamma(\tilde{x})$ ниткової неоднорідності на температурне поле у середовищі. При цьому у випадку неідеально теплопровідної неоднорідності поле темпе-

ратур і теплових потоків у тілі визначається за формулою [10]

$$\begin{aligned}\theta(\mathbf{y}) &= \int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + \theta^\infty(\mathbf{y}) = \\ &= -\frac{1}{4\pi k_t} \sum_{j=0}^N c_j \int_{-1}^1 \frac{P_j(\tilde{x}) d\tilde{x}}{\sqrt{R(\tilde{x})}} + \theta^\infty(\mathbf{y}),\end{aligned}\quad (30)$$

де $R(\tilde{x}) = \tilde{x}^2 - \frac{2\tilde{x}y_1}{a} + \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{a^2}$. Зокрема, на продовженні осі ниткової неоднорідності ($y_1 > a$, $y_2 = y_3 = 0$) інтегральне співвідношення для температури (30) спрощується:

$$\theta(y_1) = -\frac{1}{2\pi k_t} \sum_{j=0}^N c_j Q_j\left(\frac{y_1}{a}\right) + \theta^\infty(y_1),\quad (31)$$

де $Q_j(x)$ – асоційовані функції Лежандра другого роду.

Компоненти вектора теплового потоку поблизу прямолінійної неоднорідності визначаються за такою інтегральною формулою:

$$h_i(\mathbf{y}) = -k_t \frac{\partial \theta}{\partial y_i} = \frac{1}{4\pi a} \sum_{j=0}^N c_j \int_{-1}^1 \left(\tilde{x} \delta_{i1} - \frac{y_i}{a} \right) \frac{P_j(\tilde{x}) d\tilde{x}}{\sqrt{R(\tilde{x})^3}} + h_i^\infty(\mathbf{y}).\quad (32)$$

На продовженні ниткової неоднорідності ($y_1 > a$, $y_2 = y_3 = 0$) вираз (32) спрощується:

$$h_1(y_1) = \frac{1}{2\pi a \left(\left(\frac{y_1}{a} \right)^2 - 1 \right)} \sum_{j=0}^N c_j (j+1) \left[Q_{j+1}\left(\frac{y_1}{a}\right) - \frac{y_1}{a} Q_j\left(\frac{y_1}{a}\right) \right] + h_1^\infty(y_1).\quad (33)$$

3. Базова математична модель термопружного ниткового включення і рівняння термопружності для середовища з такою неоднорідністю. Розглянемо нормальний переріз ниткового включення у точці \mathbf{x}_0 його осі L та пов'яжемо з ним натуральну систему координат $O\tau nb$, де $\boldsymbol{\tau}$ – орт дотичної до L у точці $\mathbf{x}_0 \sim O$; \mathbf{n} та \mathbf{b} – відповідно головна нормаль та бінормаль (рис. 2). Рівняння Дюамеля – Неймана для ізотропного лінійно термопружного тіла запишемо у цій локальній системі координат так [3]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\tau\tau} &= \frac{1}{E^i} [\sigma_{\tau\tau} - \nu^i (\sigma_{nn} + \sigma_{bb})] + \alpha^i \theta, \\ \varepsilon_{nn} &= \frac{1}{E^i} [\sigma_{nn} - \nu^i (\sigma_{\tau\tau} + \sigma_{bb})] + \alpha^i \theta, \\ \varepsilon_{bb} &= \frac{1}{E^i} [\sigma_{bb} - \nu^i (\sigma_{nn} + \sigma_{\tau\tau})] + \alpha^i \theta, \\ \varepsilon_{\tau n} &= \frac{1}{2\mu^i} \sigma_{\tau n}, \quad \varepsilon_{\tau b} = \frac{1}{2\mu^i} \sigma_{\tau b}, \quad \varepsilon_{nb} = \frac{1}{2\mu^i} \sigma_{nb}.\end{aligned}\quad (34)$$

Тут E^i , μ^i , ν^i – відповідно модуль пружності, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу ниткового включення; α^i – коефіцієнт лінійного теплового розширення включення; ε_{ij} – компоненти тензора деформацій, задані у локальній системі координат.

З огляду на рівняння рівноваги, усереднені напруження у нормальному перерізі ниткової неоднорідності визначаються залежностями

$$\sigma_{\tau\tau}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{S} \mathbf{P}(\mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \sigma_{n\tau}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{S} \mathbf{P}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n},$$

$$\sigma_{\tau b}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{S} \mathbf{P}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{x}_0) = -\mathbf{P}^{0(a)} - \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_0} \mathbf{p}^*(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}). \quad (35)$$

Тут $\mathbf{P}^{0(a)}$ – прикладене до лівого торця ниткової неоднорідності зусилля; $\mathbf{p}^*(\mathbf{x})$ – функція механічних впливів середовища на поверхню включення, що дорівнює взятому по периметру нормального у точці \mathbf{x} осі L перерізу включення інтегралу від поверхневого вектора напружень.

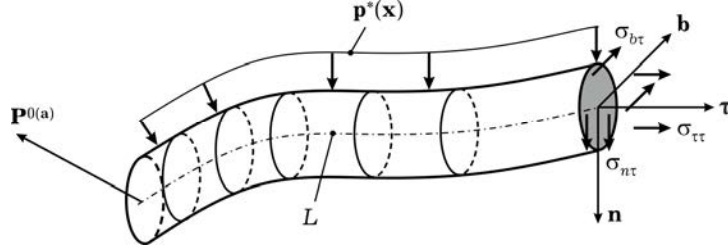


Рис. 2. Проекції вектора напруження на внутрішньому нормальному перерізі ниткової неоднорідності.

Підставивши (35) у (34) і знехтувавши впливом σ_{nn} та σ_{bb} , для усереднених деформацій неоднорідності отримаємо такі подання:

$$\varepsilon_{\tau\tau} = \frac{\partial u_{\tau}}{\partial L} = \frac{\sigma_{\tau\tau}}{E^i} + \alpha^i \theta, \quad \varepsilon_{n\tau} = \frac{\partial u_n}{\partial L} = \frac{\sigma_{\tau n}}{\mu^i}, \quad \varepsilon_{b\tau} = \frac{\partial u_b}{\partial L} = \frac{\sigma_{\tau b}}{\mu^i}. \quad (36)$$

Інтегруючи (36) уздовж осі L ниткового включення отримаємо систему рівнянь його базової математичної моделі:

$$\begin{aligned} u_{\tau}(\mathbf{x}_0) &= u_{\tau}(\mathbf{x}_a) + \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_0} \left[\frac{\sigma_{\tau\tau}(\mathbf{x})}{E^i} + \alpha^i \theta(\mathbf{x}) \right] dL(\mathbf{x}), \\ u_n(\mathbf{x}_0) &= u_n(\mathbf{x}_a) + \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_0} \frac{\sigma_{\tau n}(\mathbf{x})}{\mu^i} dL(\mathbf{x}), \\ u_b(\mathbf{x}_0) &= u_b(\mathbf{x}_a) + \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_0} \frac{\sigma_{\tau b}(\mathbf{x})}{\mu^i} dL(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (37)$$

Усереднена температура $\theta(\mathbf{x})$ перерізу включення окреслена формулою (12).

Згідно з (35) рівняння глобальної рівноваги прикладених до включення зусиль набудуть вигляду

$$\mathbf{P}^{0(b)} + \mathbf{P}^{0(a)} + \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \mathbf{p}^*(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) = 0. \quad (38)$$

Співвідношення (38) також слід долучити до рівнянь математичної моделі тонкої неоднорідності.

У випадку ідеального механічного контакту включення з матрицею функція впливу $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ включення на середовище та функція впливу $\mathbf{p}^*(\mathbf{x})$ середовища на неоднорідність пов'язані таким співвідношенням (*умови ідеальної механічної контактної взаємодії*):

$$\mathbf{p}^*(\mathbf{x}) = -\mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad (39)$$

що дає можливість легко побудувати інтегральні рівняння відповідної задачі.

Зокрема, для прямолінійного ниткового включення довжини $2a$ та за-

даних формулами (15) і

$$p_1(\tilde{x}) = \sum_{j=0}^N d_j P_j(\tilde{x}) \quad (40)$$

апроксимацій скінченними сумами рядів за поліномами Лежандра функцій впливу неоднорідності на температурні та механічні поля, з урахуванням (16) і залежностей (35), на підставі (37), (39) отримаємо

$$u_1(\tilde{x}^{(0)}) = u_1^0 + \frac{a^2}{E^i S} \left[-\frac{P_1^{0(a)}}{a} (\tilde{x}^{(0)} + 1) + \sum_{j=0}^N d_j \int_{-1}^{\tilde{x}^{(0)}} \int_{-1}^{\tilde{x}} P_j(\tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{x} \right] + \alpha \alpha^i \int_{-1}^{\tilde{x}^{(0)}} \theta(\tilde{x}) d\tilde{x}. \quad (41)$$

З урахуванням усередненої температури перерізу неоднорідності (17) маємо

$$u_1(\tilde{x}^{(0)}) = u_1^0 + \frac{a^2}{E^i S} \left[-\frac{P_1^{0(a)}}{a} (\tilde{x}^{(0)} + 1) + \sum_{j=0}^N d_j \int_{-1}^{\tilde{x}^{(0)}} \int_{-1}^{\tilde{x}} P_j(\tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{x} \right] + \alpha \alpha^i \left[\theta^0(\tilde{x}^{(0)} + 1) + \frac{a^2}{k_t^i S} \left[\frac{H_0^{(a)}}{2a} (\tilde{x}^{(0)} + 1)^2 - \sum_{j=0}^N c_j \int_{-1}^{\tilde{x}^{(0)}} \int_{-1}^{\tilde{x}} \int_{-1}^{\tilde{x}} P_j(\tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{x} d\tilde{x} \right] \right]. \quad (42)$$

З огляду на властивості поліномів Лежандра (18) і (20), потрійний інтеграл у (42) можна доволі просто обчислити:

$$\int_{-1}^{\tilde{x}^{(0)}} \int_{-1}^{\tilde{x}} \int_{-1}^{\tilde{x}} P_j(\tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{x} d\tilde{x} = \frac{\tilde{P}_{j+3}(\tilde{x}^{(0)})}{(2j+1)(2j+3)(2j+5)} - \frac{3\tilde{P}_{j+1}(\tilde{x}^{(0)})}{(2j-1)(2j+1)(2j+5)} + \frac{3\tilde{P}_{j-1}(\tilde{x}^{(0)})}{(2j-3)(2j+1)(2j+3)} - \frac{\tilde{P}_{j-3}(\tilde{x}^{(0)})}{(2j-3)(2j-1)(2j+1)}. \quad (43)$$

При цьому у випадку від'ємних індексів у (43) слід скористатися співвідношеннями (21).

Підставивши (20) і (43) у формулу (42), отримаємо основне функційне рівняння математичної моделі ниткового термопружного прямолінійного включення.

Після аналогічного перетворення правої частини інтегральної залежності (4) отримаємо такі функційні рівняння зовнішньої задачі термопружності середовища з лінією впливів неоднорідності:

$$\sum_{j=0}^N \left[1 + g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon}) - \frac{e_j}{\pi} \right] d_j P_j(\tilde{x}^{(0)}) + g_x(\tilde{x}^{(0)}) \sum_{j=0}^N d_j P_j(\tilde{x}^{(0)}) = 4\mu u_1(\tilde{x}^{(0)}) - \frac{(1+\nu)\alpha\mu a}{2\pi(1-\nu)k_t} \sum_{j=0}^N \frac{2c_j}{2j+1} [P_{j-1}(\tilde{x}^{(0)}) - P_{j+1}(\tilde{x}^{(0)})] + \frac{2\alpha a^2 \mu h^0}{3k_t} (P_0(\tilde{x}^{(0)}) + 2P_2(\tilde{x}^{(0)})). \quad (44)$$

Тут, як і в задачі теплопровідності, вважаємо, що на безмежності на середовище діє лише однорідний тепловий потік h^0 , спрямований уздовж осі Ox_1 .

Підставивши (20), (42), (43) у функційне рівняння (44) і застосувавши процедури ортогоналізації з поліномами Лежандра, отримаємо частину СЛАР стосовно d_j для тіла з деформівним термопружним включенням:

$$\begin{aligned}
& \left[1 + g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon}) - \frac{e_i}{\pi} \right] d_i + \frac{2i+1}{2} \sum_{j=0}^N b_{ij} d_j - \\
& - 4\chi \left[\frac{d_{i-2}}{(2i-3)(2i-1)} - \frac{2d_i}{(2i-1)(2i+3)} + \frac{d_{i+2}}{(2i+3)(2i+5)} \right] = \\
& = 4\mu\alpha_1^0 \delta_{i0} + 4\chi \left[-\frac{P_1^{0(a)}}{a} (\delta_{i0} + \delta_{i1}) \right] + \\
& + \beta \left[\theta^0 (\delta_{i0} + \delta_{i1}) + \frac{\eta}{k_t} \left[\frac{H_0^{(a)}}{6a} (4\delta_{i0} + 6\delta_{i1} + 2\delta_{i2}) \right] \right] - \\
& - \frac{\beta\eta}{k_t} \left[\frac{c_{i-3}}{(2i-5)(2i-3)(2i-1)} - \frac{3c_{i-1}}{(2i-3)(2i-1)(2i+3)} \right] - \\
& - \frac{\beta\eta}{k_t} \left[\frac{3c_{i+1}}{(2i-1)(2i+3)(2i+5)} - \frac{c_{i+3}}{(2i+3)(2i+5)(2i+7)} \right] - \\
& - \frac{(1+\nu)\alpha\mu a}{\pi(1-\nu)k_t} \left[\frac{c_{i+1}}{2i+3} - \frac{c_{i-1}}{2i-1} \right] + \\
& + \frac{2\alpha a^2 \mu h^0}{3k_t} (\delta_{i0} + 2\delta_{i2}), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (45)
\end{aligned}$$

де $\chi = \frac{\mu\alpha^2}{E^i S}$ – відносна податність перерізу включення; $\beta = 4\mu\alpha^i$. При цьому з огляду на (21) вважаємо, що у випадку від'ємних значень індексів у d_i та c_i їх слід замінити (окрім останнього рядка у (45)) на $-d_{-i-1}$ та $-c_{-i-1}$ відповідно. Якщо ж значення індексів перевищують N , то, з огляду на застосовану процедуру ортогоналізації, відповідні d_i та c_i слід вважати нульовими.

Згідно з (27) і (35) рівняння глобальної механічної рівноваги неоднорідності набудуть такого вигляду:

$$2ad_0 - (P_1^{0(a)} + P_1^{0(b)}) = 0. \quad (46)$$

Рівняння (45), (46) формують повну СЛАР задачі термопружності для ізотропного лінійно пружного середовища із тонким включенням.

Поле переміщень поблизу ниткової неоднорідності тепер можна обчислити за такою інтегральною формулою:

$$\begin{aligned}
u_i(\mathbf{y}) &= \int_L (U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_j(\mathbf{x}) + V_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma(\mathbf{x})) dL(\mathbf{x}) + u_i^\infty(\mathbf{y}) = \\
&= C_1 \sum_{j=0}^N d_j \int_{-1}^1 \left[C_2 \delta_{i1} + \left(\delta_{i1} \tilde{x} - \frac{y_i}{a} \right) \left(\tilde{x} - \frac{y_1}{a} \right) \frac{1}{R(\tilde{x})} \right] \frac{P_j(\tilde{x}) d\tilde{x}}{\sqrt{R(\tilde{x})}} + \\
&+ \frac{(1+\nu)\alpha a}{8\pi(1-\nu)k_t} \sum_{j=0}^N c_j \int_{-1}^1 \left(\delta_{i1} \tilde{x} - \frac{y_i}{a} \right) \frac{P_j(\tilde{x})}{\sqrt{R(\tilde{x})}} d\tilde{x} + u_i^\infty(\mathbf{y}), \quad (47)
\end{aligned}$$

де $C_1 = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}$ і $C_2 = 3 - 4\nu$. Зокрема, на продовженні осі ниткової неоднорідності

$$u_1(y_1) = \frac{1}{2\pi\mu} \sum_{j=0}^N d_j Q_j \left(\frac{y_1}{a} \right) - \frac{(1+\nu)\alpha a c_0}{4\pi(1-\nu)k_t} + u_1^\infty(y_1). \quad (48)$$

4. Математична модель згину ниткового включення за Кірхгофом. Модель згину включення [3] за теоріями згину стрижнів і пластин Кірхгофа використовувалася для розв'язування задач термопружності тіл зі стрічковими включеннями. Застосуємо її до ниткових включень малої кривини. Відповідно до [3] для осі стрижня повинні виконуватися такі диференціальні співвідношення:

$$\frac{d^2 u_\tau}{dL^2} = -\frac{M(\mathbf{x})}{D}, \quad M(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_0} \varepsilon_{ijm} x_j p_m(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + M(\mathbf{x}_a), \quad (49)$$

де D – згинальна жорсткість стрижня, яка у випадку круглого поперечного перерізу дорівнює $D = \pi E^1 \rho^4 / 4$.

5. Математична модель деформівного абсолютно гнучкого включення. Модель деформівного абсолютно гнучкого ниткового включення легко отримати з (37) приймаючи, що неоднорідність не чинить опору деформуванню у напрямі нормалі та бінормалі до її серединної лінії, а також не враховуючи її згину за моделлю (49).

У розглянутому формулюванні задачі для прямолінійного ниткового включення, з огляду на прикладене навантаження, до розгляду приймається лише та частина моделі неоднорідності, що стосується її осового розтягу (стиску), таким чином, у цьому частковому випадку базова модель і модель гнучкого включення є тотожними.

6. Числові приклади. Розглянемо ізотропне термопружне середовище з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$, що містить прямолінійне деформівне ниткове включення довжини $2a$. Напрямок однорідного потоку тепла інтенсивністю h^0 є паралельним до осі неоднорідності. Джерела тепла всередині неоднорідності відсутні ($H_0^{(a)} = H_0^{(b)} = 0$), і неоднорідність не взаємодіє зі сторонніми щодо середовища полями чи тілами ($\mathbf{P}^{0(a)} = \mathbf{P}^{0(b)} = 0$). Досліджено вплив нормованих відносних термоопору η , податності χ і теплового розширення $\tilde{\alpha} = \alpha^i / \alpha$ на характер функцій впливу $\gamma(\tilde{x})$ та $p_1(\tilde{x})$ деформівної ниткової неоднорідності порівняно з ідеально теплопровідною недеформівною (у цьому випадку $\eta = \chi = \tilde{\alpha} = 0$). У розрахунках приймаємо $N = 50$, $\tilde{\varepsilon} = 10^{-3}$.

На рис. 3 зображено вплив на нормовані функції $\gamma(\tilde{x})$ та $p_1(\tilde{x})$ відносного термоопору η ниткової неоднорідності у випадку відсутності її термомеханічних деформацій ($\chi = \tilde{\alpha} = 0$). Бачимо, що зі збільшенням термоопору неоднорідності η очікувано зменшуються значення функції впливу $\gamma(\tilde{x})$. Причому для великих η функція $\gamma(\tilde{x})$ наближається до нуля, що відповідає фізичним проявам явища, оскільки неоднорідність у цьому випадку стає практично теплоізолююною, для якої $\gamma(\tilde{x}) \equiv 0$.

Функція $p_1(\tilde{x})$ впливу неоднорідності на механічні поля лише незначно змінюється зі зміною відносного термоопору неоднорідності η . Це пов'язано з тим, що неоднорідність у цьому прикладі вважається недеформівною, що й чинить основний вплив на таку поведінку.

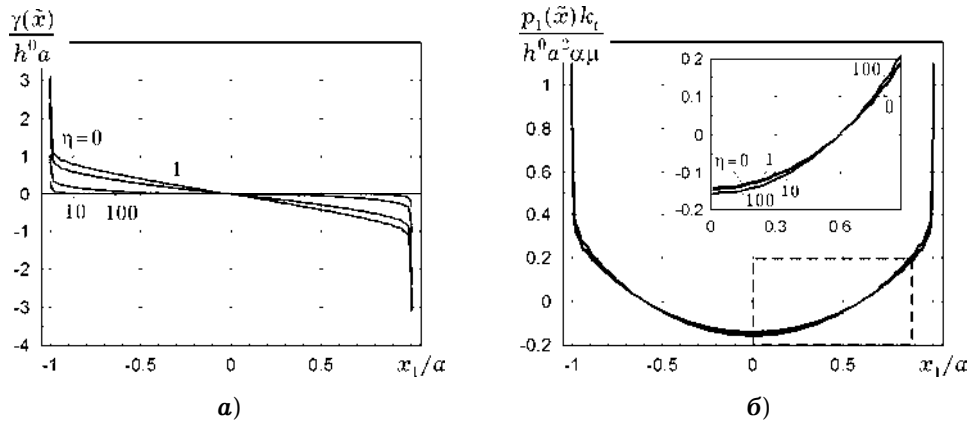


Рис. 3. Функції впливу недеформівного теплопровідного включення.

На рис. 4 зображено вплив нормованих відносних податності χ і теплового розширення $\tilde{\alpha}$ на нормоване значення функції $p_1(\tilde{x})$ впливу ниткової неоднорідності на механічні поля.

Бачимо, що зі збільшенням податності χ ниткової неоднорідності її вплив на механічні поля у середовищі зменшується і за досить великих значень χ функція $p_1(\tilde{x})$ наближається до нуля, що відповідає фізичним проявам досліджуваних явищ, бо абсолютно податна неоднорідність не чинить впливу на механічні поля у середовищі.

Вплив теплового розширення $\tilde{\alpha}$ неоднорідності не можна описати так однозначно. Із його збільшенням функції впливу у кожній точці рівномірно зменшуються і навіть змінюють знак. При цьому з подальшим збільшенням $\tilde{\alpha}$ функція $p_1(\tilde{x})$ у кожній точці починає зростати за модулем. Фізично це пояснюється тим, що неоднорідність починає деформуватися більше, ніж середовище, що її містить.

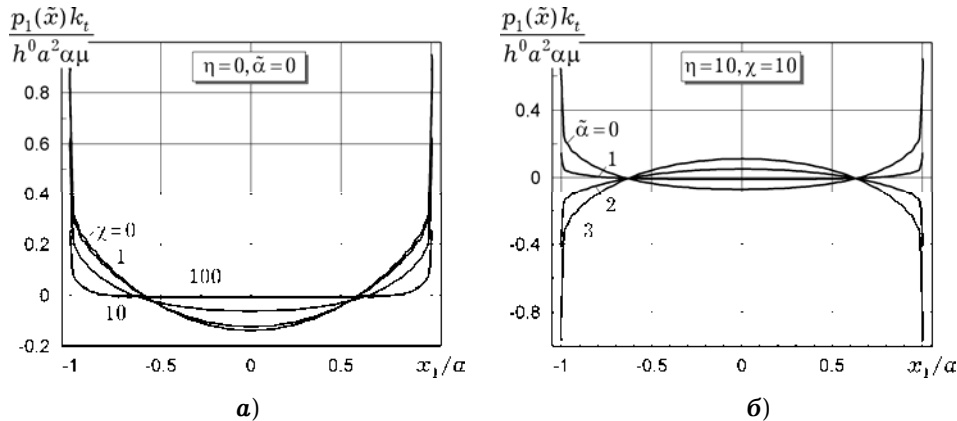


Рис. 4. Функції впливу деформівного теплопровідного включення.

Цікаво, що нулі функції $p_1(\tilde{x})$ при фіксованих η і χ розміщені у практично тих самих точках і не змінюються зі зростанням $\tilde{\alpha}$.

На рис. 5 зображено нормовані поля температур і переміщень поблизу ниткового включення. Побудовані суцільними лініями рівня відповідають випадку ідеально теплопровідного недеформівного включення ($\eta = \chi = \tilde{\alpha} = 0$), а штриховими – теплопровідного деформівного із такими характеристиками: $\eta = 10, \chi = 10, \tilde{\alpha} = 0$.

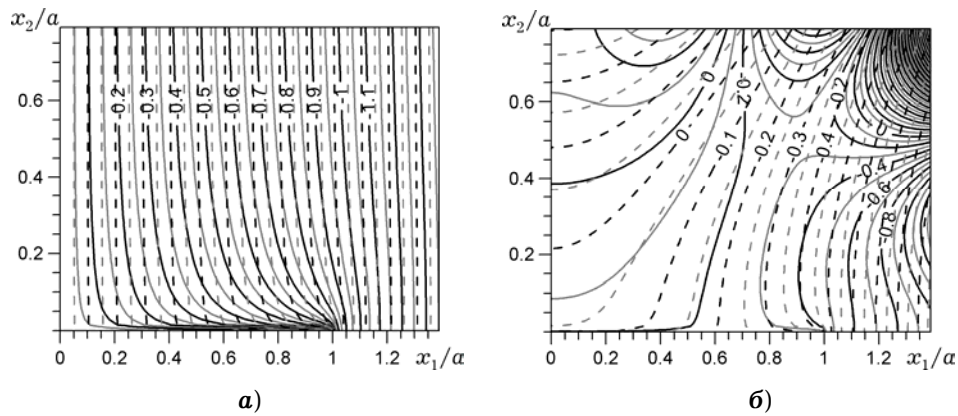


Рис. 5. Поле температур і переміщень поблизу прямолінійного ниткового включення.

Із рис. 5 видно, що зменшення теплопровідності та жорсткості ниткової неоднорідності зменшує вплив останньої на термомеханічні поля порівняно з ідеально теплопровідною недеформівною неоднорідністю. Оскільки така поведінка є фізично очевидною, то це також опосередковано підтверджує достовірність запропонованого підходу.

Висновки. У роботі запропоновано моделювання теплового і термопружного впливу тонких ниткових неоднорідностей на підставі принципу спряження континуумів різної вимірності, згідно з яким включення у деформівному середовищі замінюється лінією (що геометрично збігається із віссю ниткової неоднорідності) із заданими на ній функціями впливу. Для задач стаціонарної (квазістаціонарної) теплопровідності та термопружності середовищ із нитковими включеннями за розглянутими моделями їх теплопровідності та деформування ці функції впливу за своїм фізичним змістом є розподілені уздовж лінії джерелами тепла та силами. У випадку прямолінійної ниткової деформівної неоднорідності за її ідеального термомеханічного контакту із середовищем запропоновано аналітичний підхід розв'язування отриманих інтегральних рівнянь на основі використання поліномів Лежандра.

Створені моделі теплопровідних деформівних неоднорідностей та отримані на основі їхнього використання результати розрахунку полів температур і переміщень демонструють можливість на основі вже апробованих теорій за допомогою запропонованого підходу підвищити рівень адекватності розрахунку реальних композитних матеріалів із волокнистим наповненням внаслідок точнішого врахування впливу термоопору, податності та теплового розширення матеріалу неоднорідності на фізико-механічні поля у тілах із таких композитів.

1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 1. – С. 12–34.
Te same: Grinchenko V. T., Ulitko A.F. On local singularities in mathematical models of physical fields // J. Math. Sci. – 1999. – **97**, No. 1. – P. 3777–3795. – <https://doi.org/10.1007/BF02364915>.
2. Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г. Жесткий эллипсоидальный диск и игла в анизотропной упругой среде // Прикл. математика и механика. – 1981. – **45**, № 1. – С. 165–170
Te same: Mirenkova G. N., Sosnina E. G. Rigid ellipsoidal disc and needle in an anisotropic elastic medium // J. Appl. Math. Mech. – 1981. – **45**, No. 1. – P. 122–126. – [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(81\)90019-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(81)90019-8).
3. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-видавн. центр НТШ, 2007. – 716 с.

4. Cox B. N., Carter W. C., Fleck N. A. A binary model of textile composites – I. Formulation // *Acta Metall. Mater.* – 1994. – **42**, No. 10. – P. 3463–3479. – [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(94\)90479-0](https://doi.org/10.1016/0956-7151(94)90479-0).
5. Eshelby J. D. Elastic inclusions and inhomogeneities // *Progress in Solid Mechanics.* / Eds. N. I. Sneddon, R. Hill. – Vol. 2. – Amsterdam: North-Holland, 1961. – P. 89–140.
6. Liew K. M., Pan Z., Zhang L.-W. The recent progress of functionally graded CNT reinforced composites and structures // *Sci. China-Phys. Mech. Astron.* – 2020. – **63**: 234601. – <https://doi.org/10.1007/s11433-019-1457-2>.
7. Olver F. W., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W. The NIST handbook of mathematical functions. – New York: Cambridge Univ. Press, 2010. – 968 p. – <https://univ.jeanpaulcalvi.com/Posters/ConfAuchWeb/abramovitz2.pdf>.
8. Pasternak Ia., Ilchuk N., Sulym H., Andriichuk O. Boundary integral equations for anisotropic elasticity of solids containing rigid thread-like inclusions // *Mech. Res. Commun.* – 2019. – **100**, No. 6: 103402. – <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2019.103402>.
9. Rinaldi R. G., Blacklock M., Bale H., Begley M. R., Cox B. N. Generating virtual textile composite specimens using statistical data from micro-computed tomography: 3D tow representations // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2012. – **60**. – P. 1561–1581. – <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2012.02.008>.
10. Sulym H., Ilchuk N., Pasternak Ia. Heat conduction in anisotropic medium with perfectly conductive thread-like inclusions // *Acta Mechanica et Automatica.* – 2019. – **13**, No. 4. – P. 251–254. – <https://doi.org/10.2478/ama-2019-0034>.
11. Zabolotnyi O., Pasternak V., Andrushchak I., Ilchuk N., Svirzhevskiy K. Numerical simulation of the microstructure of structural-inhomogeneous materials // *Lect. Notes in Mech. Eng.* – 2020. – P. 562–571. – http://doi.org.https.jxnydx.proxy.chaoxing.com/10.1007/978-3-030-50794-7_55.

MODELING OF DEFORMABLE THERMOELASTIC THREAD-LIKE INCLUSIONS IN ISOTROPIC MEDIUM

The paper utilizes the coupling principle for continua of different dimensions and proposes the approach to mathematical modeling of deformable thread-like inhomogeneities. This approach consists in conditionally dividing such a problem into three partially related subproblems: **a) external** for the medium with influence functions (unknown a priori) conditionally given on the spatial curves L ; **b) intermediate** in the form of contact interaction conditions of the medium with inhomogeneity; **c) internal**, which consists in deriving a mathematical model of inhomogeneity, which in turn relates the influence function on inclusion surface with distribution of physical and mechanical fields inside it. For the case of perfect thermomechanical interaction of inhomogeneity and medium, integral relations of the external problem and mathematical models of thread-like inhomogeneities are presented, which take into account their thermal conductivity and deformation. In the case of rectilinear inhomogeneities, a method for solving the derived systems of integral equations based on the use of truncated series in Legendre polynomials for the sought functions of the influence of thread-like inclusion is proposed. Numerical analysis is performed and the influence of relative thermal conductivity, elastic compliance and linear thermal expansion of the inhomogeneity material on the influence functions, as well as thermomechanical fields near the inclusion tip, are clarified.

Key words: thread-like deformable inclusion, mathematical model, numerical analysis, thermoelasticity.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
² Луцьк. нац. техн. ун-т, Луцьк

Одержано
12.10.20