

ВИКОРИСТАННЯ ВАРІАЦІЙНОГО МЕТОДУ ОДНОРІДНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ В ОСЕСИМЕТРИЧНІЙ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА З УРАХУВАННЯМ ВЛАСНОЇ ВАГИ

З використанням варіаційного методу однорідних розв'язків досліджено напружено-деформований стан суцільного скінченного циліндра з урахуванням власної ваги. Бічна поверхня циліндра є закріпленою, а торцеві поверхні – вільними від навантажень. Загальний розв'язок подано у вигляді суперпозиції розв'язків задач для неоднорідної системи рівнянь з однорідними умовами на торцях циліндра (основний стан) та однорідної системи рівнянь із неоднорідними умовами на торцях циліндра (збурений стан). Задачу про визначення збуреного стану зведено до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які розв'язано методом редуkcії. Розглянуто приклади числової реалізації розв'язку.

Ключові слова: варіаційний метод однорідних розв'язків, осесиметрична задача, скінченний циліндр, функція Лява, власна вага.

Вступ. Поряд з розвитком обчислювальних комплексів програмної реалізації числових методів, аналітичні підходи до розв'язування крайових задач механіки деформованого твердого тіла не втратили своєї актуальності. Точні аналітичні розв'язки є незамінним інструментом верифікації результатів реалізації числових методів, а також для отримання наближених формул для інженерних застосувань. Зокрема, для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності для циліндричних тіл використовують методи сингулярних інтегральних рівнянь [10], розвинень в ряди Фур'є – Бесселя [14], перехресної суперпозиції [2, 8], інтегральних перетворень [4], безпосереднього інтегрування [1, 16], однорідних розв'язків [12, 13].

Важливим класом осесиметричних задач теорії пружності є задачі про визначення напружено-деформованого стану скінченного циліндра з урахуванням власної ваги [5, 6, 15]. Із використанням методу інтегральних перетворень в [6] знайдено числові розв'язки осесиметричних задач теорії пружності для циліндра скінченної довжини з вільною циліндричною поверхнею з урахуванням власної ваги. Цей метод був застосований для розв'язування аналогічної задачі для циліндра, на нижньому торці якого задано умови ковзного закріплення, до верхнього торця прикладено осесиметричне нормальне навантаження, а бічна поверхня є жорстко зацementeною [5]. Точний аналіз полів деформацій та напружень у скінченному круговому пружному циліндрі під дією власної ваги наведено в [15], де досліджено ефекти впливу торців. Показано, що вплив торців на напружено-деформований стан є значним, але обмежується локальною областю поблизу торця, де розподіли напружень та деформацій значно відрізняються від розподілів, які відповідають спрощеному розв'язку для одновісного напруженого стану.

Метою цієї статті є розвиток варіаційного методу однорідних розв'язків [12] для розв'язування осесиметричної задачі теорії пружності для суцільного скінченного циліндра із зацementeною бічною поверхнею і вільними торцями з урахуванням власної ваги.

1. Постановка задачі. Розглянемо осесиметричну задачу теорії пружності для суцільного циліндра $\mathcal{V} = \{0 \leq r \leq 1, -b \leq z < b\}$ під дією власної ваги. Тут r та z – безрозмірні радіальна та осьова координати, $b = \text{const}$. Нехай бічну поверхню $\mathcal{S}_0 = \{r = 1, -b \leq z \leq b\}$ циліндра закріплено:

✉ lesya.postolaki@gmail.com

$$u_r|_{r=1} = 0, \quad u_z|_{r=1} = 0, \quad (1)$$

а торцеві поверхні $\mathcal{S}_1 = \{0 \leq r \leq 1, z = -b\}$ та $\mathcal{S}_2 = \{0 \leq r \leq 1, z = b\}$ є вільними від силових навантажень:

$$\sigma_{zz}|_{z=\pm b} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{z=\pm b} = 0. \quad (2)$$

Тут u_r , u_z – радіальна та осьова компоненти вектора переміщень, а σ_{zz} , σ_{rz} – осьові та дотичні напруження.

Пружну рівновагу циліндра \mathcal{V} описують рівняння [7]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz} - \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} &= \rho g, \end{aligned} \quad (3)$$

де ρg – вага одиниці об'єму тіла. Зв'язок компонент тензора деформації ε_{rr} , ε_{zz} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, ε_{rz} з компонентами вектора переміщень визначають співвідношення Коші [7]:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (4)$$

а з компонентами тензора напружень σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rz} – фізичні співвідношення закону Гука [7]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2\mu}{1-2\nu} ((1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta})), \\ \sigma_{zz} &= \frac{2\mu}{1-2\nu} ((1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta})), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2\mu}{1-2\nu} ((1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} + \nu(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{rr})), \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $\mu = E / (2(1 + \nu))$ – модуль зсуву, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона.

Використавши співвідношення (4), (5), подамо рівняння рівноваги (3) у переміщеннях [3]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} &= 0, \\ \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= \rho g, \quad \varepsilon \equiv \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) - \frac{\partial u_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – осесиметричний оператор Лапласа.

Ставимо за мету знаходження компонент вектора переміщень та тензора напружень, які задовольняють рівняння (3), (6) та забезпечують виконання умов (1), (2) за урахуванням співвідношень (4), (5).

2. Побудова розв'язку задачі. Розв'язок задачі (1), (2), (4) – (6) будуватимемо у вигляді сум:

$$u_r(r, z) = u_r^0(r, z) + \tilde{u}_r(r, z), \quad u_z(r, z) = u_z^0(r, z) + \tilde{u}_z(r, z),$$

де $u_r^0(r, z)$, $u_z^0(r, z)$ – частковий розв'язок неоднорідної системи (6), $\tilde{u}_r(r, z)$, $\tilde{u}_z(r, z)$ – загальний розв'язок однорідної системи

$$\begin{aligned}\nabla^2 \tilde{u}_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial r} - \frac{\tilde{u}_r}{r^2} &= 0, \\ \nabla^2 \tilde{u}_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial z} &= 0, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{u}_r) - \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z},\end{aligned}\quad (7)$$

що відповідає неоднорідній системі (6).

2.1. Основний стан. Задача про визначення основного стану полягає у знаходженні розв'язку неоднорідної системи рівнянь (6) з однорідними крайовими умовами:

$$\sigma_{rr}^0 \Big|_{r=1} = 0, \quad \sigma_{rz}^0 \Big|_{r=1} = 0, \quad (8)$$

$$u_z^0 \Big|_{z=-b} = 0, \quad \sigma_{rz}^0 \Big|_{z=-b} = 0, \quad \sigma_{zz}^0 \Big|_{z=b} = 0, \quad \sigma_{rz}^0 \Big|_{z=b} = 0. \quad (9)$$

Компоненти тензора напружень σ_{rr}^0 , σ_{zz}^0 , $\sigma_{\theta\theta}^0$, σ_{rz}^0 , які задовольняють рівняння рівноваги (3) і забезпечують виконання умов (8), (9), нескладно знайти у вигляді

$$\sigma_{rr}^0 = 0, \quad \sigma_{zz}^0 = -\rho g(b-z), \quad \sigma_{\theta\theta}^0 = 0, \quad \sigma_{rz}^0 = 0. \quad (10)$$

Відповідні компоненти тензора деформацій основного стану виражаються через компоненти напружень формулами [7]:

$$\varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{u_r^0}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta}^0 - \nu(\sigma_{rr}^0 + \sigma_{zz}^0)),$$

$$\varepsilon_{zz}^0 = \frac{\partial u_z^0}{\partial z} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz}^0 - \nu(\sigma_{rr}^0 + \sigma_{\theta\theta}^0)).$$

З цих формул з урахуванням (10) і першої з умов (9) отримаємо компоненти вектора переміщень для основного стану:

$$u_r^0 = \frac{\nu \rho g r}{E} (b-z), \quad u_z^0 = \frac{\rho g}{2E} ((b-z)^2 - 4b^2). \quad (11)$$

2.2. Збурений стан. Задача про визначення збуреного стану полягає у знаходженні розв'язку однорідної системи рівнянь (7), яка зводиться до однорідного бігармонічного рівняння [3, 7]

$$\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\chi} = 0 \quad (12)$$

за крайових умов на поверхні \mathcal{S}_0

$$\tilde{u}_r \Big|_{r=1} = -u_r^0(z), \quad \tilde{u}_z \Big|_{r=1} = -u_z^0(z)$$

і неоднорідних умов на поверхнях \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 :

$$\tilde{\sigma}_{zz} \Big|_{z=-b} = -\sigma_{zz}^0 \Big|_{z=-b}, \quad \tilde{\sigma}_{rz} \Big|_{z=-b} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{zz} \Big|_{z=b} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rz} \Big|_{z=b} = 0.$$

Тут σ_{zz}^0 визначається за другою формулою (10), а $\tilde{\chi}$ – функція Лява, уведена за формулами [3]

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu} \tilde{\sigma}_{rr} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \tilde{\chi} - \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial r^2} \right), & \frac{1}{2\mu} \tilde{\sigma}_{\theta\theta} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \tilde{\chi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial r} \right), \\ \frac{1}{2\mu} \tilde{\sigma}_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left((2-\nu) \nabla^2 \tilde{\chi} - \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial z^2} \right), & \frac{1}{2\mu} \tilde{\sigma}_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left((1-\nu) \nabla^2 \tilde{\chi} - \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial z^2} \right), \\ \tilde{u}_r &= -\frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial r \partial z}, & \tilde{u}_z &= 2(1-\nu) \nabla^2 \tilde{\chi} + \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Додавши відповідні компоненти напружень основного і збуреного станів

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^0(r) + \tilde{\sigma}_{rr}(r, z) &= \sigma_{rr}(r, z), & \sigma_{\theta\theta}^0(r) + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(r, z) &= \sigma_{\theta\theta}(r, z), \\ \sigma_{zz}^0(r) + \tilde{\sigma}_{zz}(r, z) &= \sigma_{zz}(r, z), & \tilde{\sigma}_{rz}(r, z) &= \sigma_{rz}(r, z),\end{aligned}$$

знайдемо напружено-деформований стан циліндра \mathcal{V} .

Шукану функцію Лява $\tilde{\chi}$ подамо у вигляді суми двох складових

$$\tilde{\chi} = \chi' + \chi'',$$

кожна з яких визначається з відповідної збуреної задачі для однорідного рівняння (12).

Перша збурена задача полягає у знаходженні розв'язку рівняння (12) з однорідними умовами на \mathcal{S}_0

$$u'_r|_{r=1} = 0, \quad u'_z|_{r=1} = 0, \quad (13)$$

та неоднорідними умовами на \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 :

$$\begin{aligned}\sigma'_{zz}|_{z=-b} &= \sigma_1, & \sigma'_{zz}|_{z=b} &= \sigma_2, \\ \sigma'_{rz}|_{z=-b} &= \tau_1, & \sigma'_{rz}|_{z=b} &= \tau_2.\end{aligned} \quad (14)$$

Розв'язок першої збуреної задачі шукатимемо як суми симетричної та антисиметричної складових, подавши функції у правих частинах формул (14) відповідно у вигляді

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}\sigma_{zz}^0, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{2}\sigma_{zz}^0, \quad \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 0, \quad (15)$$

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}\sigma_{zz}^0, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma_{zz}^0, \quad \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 0. \quad (16)$$

У (15), (16) функція σ_{zz}^0 визначається за другою формулою (10).

Подамо функцію Лява $\chi'(r, z)$ для симетричної задачі у вигляді

$$\chi'(r, z) = C \sinh(\gamma z) f(r), \quad (17)$$

а для антисиметричної –

$$\chi'(r, z) = C \cosh(\gamma z) f(r). \quad (18)$$

Тут C – невідомий коефіцієнт. Підставивши подання (17) та (18) у рівняння (12), знаходимо функцію $f(r)$ у вигляді [12]:

$$f(r) = ArJ_1(\gamma r) - \frac{2B}{\pi\gamma} J_0(\gamma r), \quad (19)$$

де A, B – невідомі коефіцієнти, $J_0(\gamma r)$, $J_1(\gamma r)$ – функції Бесселя першого роду нульового та першого порядків, а γ – власне число, що є розв'язком трансцендентного характеристичного рівняння

$$\gamma(J_0^2(\gamma) + J_1^2(\gamma)) - 4(\nu - 1)J_0(\gamma)J_1(\gamma) = 0. \quad (20)$$

З урахуванням (19) умови (13) зводяться до розв'язування однорідної системи рівнянь відносно сталих A та B :

$$\gamma\pi J_0(\gamma)A + 2J_1(\gamma)B = 0, \quad \pi(\gamma J_1(\gamma) - 4(\nu - 1)J_0(\gamma))A - 2J_0(\gamma)B = 0, \quad (21)$$

сумісність якої забезпечується задоволенням рівняння (20).

Єдиний тривіальний дійсний корінь $\gamma = 0$ рівняння (20) не становить практичного інтересу. Тому зосередимося на визначенні нескінченної послідовності комплексних коренів γ_k . Перші 20 коренів $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$ рівняння (20) при $\nu = 0.25$ наведено в табл. 1.

Таблиця 1

k	α_k	β_k	k	α_k	β_k
1	3.0253	0.5565	11	34.5301	1.7716
2	6.1991	0.9173	12	37.6733	1.8151
3	9.3583	1.1217	13	40.8164	1.8551
4	12.5109	1.2659	14	43.9593	1.8921
5	15.6601	1.3775	15	47.1021	1.9266
6	18.8072	1.4687	16	50.2447	1.9588
7	21.9531	1.5457	17	53.3872	1.9891
8	25.0981	1.6124	18	56.5297	2.0177
9	28.2425	1.6713	19	59.6721	2.0447
10	31.3864	1.7239	20	62.8143	2.0703

Зауважимо, що перше рівняння системи (21) можна записати так:

$$\alpha_k = \frac{A}{B} = -\frac{2J_1(\gamma_k)}{\pi\gamma_k J_0(\gamma_k)}. \quad (22)$$

Тоді розв'язок першої збуреної задачі подамо у вигляді:

$$\chi'(r, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \chi'_k(r, z) + \bar{C}_k \bar{\chi}'_k(r, z)), \quad (23)$$

де $\chi'_k = \sinh(\gamma_k z) f_k(r)$, $\bar{\chi}'_k = \cosh(\gamma_k z) f_k(r)$, $f_k(r) = rJ_1(\gamma_k r) \alpha_k - 2J_0(\gamma_k r) / (\pi\gamma_k)$, γ_k – корені рівняння (20), а α_k визначено з (22).

Друга збурена задача полягає у знаходженні розв'язку рівняння (12) із неоднорідними умовами на \mathcal{S}_0

$$u''_r|_{r=1} = u_1(z), \quad u''_z|_{r=1} = u_2(z) \quad (24)$$

та однорідними умовами на \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 :

$$\sigma''_{zz}|_{z=\pm b} = 0, \quad \sigma''_{rz}|_{z=\pm b} = 0. \quad (25)$$

Як і для першої збуреної задачі, подамо розв'язок у вигляді суми симетричної та антисиметричної частин, для яких праві частини умов (24) задано у вигляді:

$$u_1(z) = -\frac{1}{2}(u_r^0(1, z) + u_r^0(1, -z)), \quad u_2(z) = -\frac{1}{2}(u_z^0(1, z) - u_z^0(1, -z)),$$

$$u_1(z) = -\frac{1}{2}(u_r^0(1, z) - u_r^0(1, -z)), \quad u_2(z) = -\frac{1}{2}(u_z^0(1, z) + u_z^0(1, -z)).$$

Тут функції u_r^0 , u_z^0 виражаються формулами (11).

Розв'язок рівняння (12) подамо у вигляді

$$\chi''(r, z) = C J_0(\gamma r) \varphi(z), \quad (26)$$

де $\varphi(z) = (A + Bz) \cosh(\gamma z) + (C + Dz) \sinh(\gamma z)$ – розв'язок диференціального рівняння $\varphi^{IV}(z) - 2\gamma^2 \varphi''(z) + \gamma^4 \varphi(z) = 0$, A, B, C, D – довільні сталі, γ – власне число. Функцію $\varphi(z)$ подамо сумою непарної

$$\varphi(z) = L_1 \sinh(\gamma z) + L_2 z \cosh(\gamma z), \quad L_1 = A, \quad L_2 = D, \quad (27)$$

та парної

$$\varphi(z) = L_1 \cosh(\gamma z) + L_2 z \sinh(\gamma z), \quad L_1 = C, \quad L_2 = B, \quad (28)$$

частин, кожна з яких залежить від двох довільних констант L_1 та L_2 .

З урахуванням (27) та (28) виконання умов (25) зводиться до однорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \gamma \cosh(\gamma b) L_1 + ((2\nu - 1) \cosh(\gamma b) + \gamma b \sinh(\gamma b)) L_2 = 0, \\ \gamma \sinh(\gamma b) L_1 + (2\nu \sinh(\gamma b) + \gamma b \cosh(\gamma b)) L_2 = 0, \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} \gamma \sinh(\gamma b) L_1 + ((2\nu - 1) \sinh(\gamma b) + \gamma b \cosh(\gamma b)) L_2 = 0, \\ \gamma \cosh(\gamma b) L_1 + (2\nu \cosh(\gamma b) + \gamma b \sinh(\gamma b)) L_2 = 0, \end{cases} \quad (30)$$

умови сумісності яких приводять до трансцендентних рівнянь:

$$\sinh(2\gamma b) + 2\gamma b = 0, \quad (31)$$

$$\sinh(2\gamma b) - 2\gamma b = 0. \quad (32)$$

Кожне з рівнянь (31) та (32) має єдиний тривіальний дійсний корінь, який для подальшого розгляду не становить практичного інтересу. Тому обмежимося розглядом нескінченних послідовностей комплексних коренів γ_k цих двох рівнянь. Отже, розв'язками систем (29) та (30) є послідовності пар комплексних чисел $L_{1k}, L_{2k}, k = 1, 2, \dots$, таких, що $L_{1k}/L_{2k} = \alpha_k$, а α_k – комплексні константи, які для випадків непарної та парної функцій $\varphi(z)$ виражаються через корені рівнянь (31) та (32):

$$\alpha_k = -\frac{2\nu}{\gamma_k} - \frac{b}{\tanh(\gamma_k b)}, \quad \alpha_k = -\frac{2\nu}{\gamma_k} - b \tanh(\gamma_k b).$$

Якщо γ_k є коренем рівняння (31) чи (32), то $-\gamma_k, \bar{\gamma}_k$ та $-\bar{\gamma}_k$ є коренями цих рівнянь (рискою позначено комплексне спряження). Дійсні й уявні частини коренів $g_k \equiv \gamma_k b = \alpha_k + i\beta_k$ рівнянь (31) і (32) задовольняють відповідно системи трансцендентних рівнянь

$$\begin{cases} \sinh(2\alpha_k) \cos(2\beta_k) + 2\alpha_k = 0, \\ \cosh(2\alpha_k) \sin(2\beta_k) + 2\beta_k = 0 \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \sinh(2\alpha_k) \cos(2\beta_k) - 2\alpha_k = 0, \\ \cosh(2\alpha_k) \sin(2\beta_k) - 2\beta_k = 0. \end{cases}$$

Асимптотичні значення цих коренів при $k \rightarrow \infty$ визначаються за формулами

$$\alpha_k^a = \frac{1}{2} \ln(\pi + 4\pi k), \quad \beta_k^a = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

та

$$\alpha_k^a = \frac{1}{2} \ln(\pi + 4\pi k), \quad \beta_k^a = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

відповідно.

Таким чином, отримано дві системи однорідних комплексних розв'язків бігармонічного рівняння (12) для непарної (27) та парної (28) функцій $\varphi(z)$. Тоді згідно з поданням (26) відповідні вирази для функцій Лява набувають вигляду:

$$\chi_k''(r, z) = J_0(\gamma_k r) (\alpha_k \sinh(\gamma_k z) + z \cosh(\gamma_k z)),$$

$$\chi_k''(r, z) = J_0(\gamma_k r) (\alpha_k \cosh(\gamma_k z) + z \sinh(\gamma_k z)).$$

Отже, розв'язок другої збуреної задачі знаходимо у вигляді

$$\chi''(r, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \chi_k''(r, z) + \bar{C}_k \bar{\chi}_k''(r, z)), \quad (33)$$

де C_k – невідомі комплексні сталі.

2.3. Компоненти напружень і переміщень. Сума компонент тензора напружень та вектора переміщень основного стану та двох збурених станів дає повний розв'язок вихідної задачі:

$$\sigma_{rr}(r, z) = \sigma_{rr}^0(r, z) + \sigma'_{rr}(r, z) + \sigma''_{rr}(r, z),$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, z) = \sigma_{\theta\theta}^0(r, z) + \sigma'_{\theta\theta}(r, z) + \sigma''_{\theta\theta}(r, z),$$

$$\sigma_{zz}(r, z) = \sigma_{zz}^0(r, z) + \sigma'_{zz}(r, z) + \sigma''_{zz}(r, z),$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = \sigma_{rz}^0(r, z) + \sigma'_{rz}(r, z) + \sigma''_{rz}(r, z),$$

$$u_r(r, z) = u_r^0(r, z) + u'_r(r, z) + u''_r(r, z),$$

$$u_z(r, z) = u_z^0(r, z) + u'_z(r, z) + u''_z(r, z).$$

Для збуреної задачі напруження та переміщення подамо у вигляді

$$\tilde{\sigma}_{rr}(r, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \sigma_{krr}(r, z) + \bar{C}_k \bar{\sigma}_{krr}(r, z)),$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}(r, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \sigma_{kzz}(r, z) + \bar{C}_k \bar{\sigma}_{kzz}(r, z)),$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(r, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \sigma_{k\theta\theta}(r, z) + \bar{C}_k \bar{\sigma}_{k\theta\theta}(r, z)),$$

$$\tilde{\sigma}_{rz}(r, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \sigma_{krz}(r, z) + \bar{C}_k \bar{\sigma}_{krz}(r, z)),$$

$$\tilde{u}_r(r, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k u_{kr}(r, z) + \bar{C}_k \bar{u}_{kr}(r, z)) + az + d,$$

$$\tilde{u}_z(r, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k u_{kz}(r, z) + \bar{C}_k \bar{u}_{kz}(r, z)) + c. \quad (34)$$

Тут a , c та d – невідомі константи. У формулах (34) використано такі позначення:

– для першої збуреної симетричної задачі

$$\sigma_{krr} = -2\mu\gamma_k^2 \cosh(\gamma_k z) \left(\alpha_k ((1-2\nu)J_0(\gamma_k r) - \gamma_k r J_1(\gamma_k r)) + \frac{2}{\pi\gamma_k r} (\gamma_k r J_0(\gamma_k r) - J_1(\gamma_k r)) \right),$$

$$\sigma_{kzz} = -2\mu\gamma_k^2 \cosh(\gamma_k z) \left(-\frac{2}{\pi} J_0(\gamma_k r) + \alpha_k (2(\nu-2)J_0(\gamma_k r) + \gamma_k r J_1(\gamma_k r)) \right),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{k00} &= -2\mu\gamma_k \cosh(\gamma_k z) \left((1-2\nu)\gamma_k \alpha_k J_0(\gamma_k r) + \frac{2}{\pi r} J_1(\gamma_k r) \right), \\
\sigma_{krz} &= 2\mu\gamma_k^2 \sinh(\gamma_k z) \left(-\frac{2}{\pi} J_1(\gamma_k r) + \right. \\
&\quad \left. + \alpha_k ((2\nu-2)J_1(\gamma_k r) - \gamma_k r J_0(\gamma_k r)) \right), \\
u_{kr} &= -\frac{\gamma_k}{\pi} \cosh(\gamma_k z) \left(2J_1(\gamma_k r) + \pi\gamma_k \alpha_k r J_0(\gamma_k r) \right), \\
u_{kz} &= \gamma_k \sinh(\gamma_k z) \left((\gamma_k r J_1(\gamma_k r) + 4(1-\nu)J_0(\gamma_k r))\alpha_k - \frac{2}{\pi} J_0(\gamma_k r) \right); \quad (35)
\end{aligned}$$

– для першої збуреної антисиметричної задачі
у формулах (35) потрібно замінити $\cosh(\gamma_k z)$ на $\sinh(\gamma_k z)$, а
 $\sinh(\gamma_k z)$ на $\cosh(\gamma_k z)$;

– для другої збуреної симетричної задачі

$$\begin{aligned}
\sigma_{krz} &= 2\mu \frac{\gamma_k}{r} \left((\gamma_k r (2\nu+1) + \gamma_k \alpha_k) J_0(\gamma_k r) - (1 + \gamma_k \alpha_k) J_1(\gamma_k r) \right) \times \\
&\quad \times \cosh(\gamma_k z) + \gamma_k z (\gamma_k r J_0(\gamma_k r) - J_1(\gamma_k r)) \sinh(\gamma_k z), \\
\sigma_{kzz} &= -2\mu(\gamma_k)^2 J_0(\gamma_k r) (\gamma_k z \sinh(\gamma_k z) + (2\nu-1 + \gamma_k \alpha_k) \cosh(\gamma_k z)), \\
\sigma_{k00} &= 2\mu \frac{\gamma_k}{r} \left((2\nu\gamma_k r J_0(\gamma_k r) + (1 + \gamma_k \alpha_k) J_1(\gamma_k r)) \cosh(\gamma_k z) + \right. \\
&\quad \left. + \gamma_k z J_1(\gamma_k r) \sinh(\gamma_k z) \right), \\
\sigma_{krz} &= 2\mu\gamma_k^2 J_1(\gamma_k r) ((2\nu + \gamma_k \alpha_k) \sinh(\gamma_k z) + \gamma_k z \cosh(\gamma_k z)), \\
u_{kr} &= \gamma_k J_1(\gamma_k r) (\gamma_k z \sinh(\gamma_k z) + (1 + \gamma_k \alpha_k) \cosh(\gamma_k z)), \\
u_{kz} &= \gamma_k J_0(\gamma_k r) ((\gamma_k \alpha_k - 4\nu + 6) \sinh(\gamma_k z) + \gamma_k z \cosh(\gamma_k z)),
\end{aligned}$$

– для другої збуреної антисиметричної задачі

$$\begin{aligned}
\sigma_{krz} &= 2\mu \frac{\gamma_k}{r} \left((\gamma_k r (2\nu+1) + \gamma_k \alpha_k) J_0(\gamma_k r) - (1 + \gamma_k \alpha_k) J_1(\gamma_k r) \right) \sinh(\gamma_k z) + \\
&\quad + \gamma_k z (\gamma_k r J_0(\gamma_k r) - J_1(\gamma_k r)) \cosh(\gamma_k z), \\
\sigma_{kzz} &= -2\mu(\gamma_k)^2 J_0(\gamma_k r) (\gamma_k z \cosh(\gamma_k z) + (2\nu-1 + \gamma_k \alpha_k) \sinh(\gamma_k z)), \\
\sigma_{k00} &= 2\mu \frac{\gamma_k}{r} \left((2\nu\gamma_k r J_0(\gamma_k r) + (1 + \gamma_k \alpha_k) J_1(\gamma_k r)) \sinh(\gamma_k z) + \right. \\
&\quad \left. + \gamma_k z J_1(\gamma_k r) \cosh(\gamma_k z) \right), \\
\sigma_{krz} &= 2\mu\gamma_k^2 J_1(\gamma_k r) ((2\nu + \gamma_k \alpha_k) \cosh(\gamma_k z) + \gamma_k z \sinh(\gamma_k z)), \\
u_{kr} &= \gamma_k J_1(\gamma_k r) (\gamma_k z \cosh(\gamma_k z) + (1 + \gamma_k \alpha_k) \sinh(\gamma_k z)),
\end{aligned}$$

$$u_{kz} = \gamma_k J_0(\gamma_k r) (\gamma_k x_k - 4v + 6) \cosh(\gamma_k z) + \gamma_k z \sinh(\gamma_k z).$$

Для першої збуреної симетричної та антисиметричної задач константи $a = c = d = 0$; для другої збуреної симетричної задачі $a = c = 0$, а для антисиметричної задачі $d = 0$.

2.4. Варіаційний метод однорідних розв'язків для збуреної задачі.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів C_k підпорядкуємо розв'язки (23) та (33) умовам (14) і (24) відповідно та застосуємо варіаційний підхід [9, 11–13]. Для цього введемо квадратичні функціонали для першої та другої збурених задач відповідно:

$$F_1 = \int_0^1 \left((\tilde{\sigma}_{zz}|_{z=-b} - \sigma_1(r))^2 + (\tilde{\sigma}_{rz}|_{z=-b} - \tau_1(r))^2 \right) dr,$$

$$F_2 = \int_0^b \left((\tilde{u}_r|_{r=1} - u_1(z))^2 + (\tilde{u}_z|_{r=1} - u_2(z))^2 \right) dz. \quad (36)$$

Підставивши подання (34) у функціонали (36) та застосувавши до них необхідні умови мінімуму

$$\frac{\partial F_i}{\partial C_m} = 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial \bar{C}_m} = 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial d} = 0,$$

де $m = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2$, отримаємо нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь для комплексних сталих $C_k^1 = C_k$, $C_k^2 = \bar{C}_k$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^2 M_{mk}^{\ell p} C_k^p = K_m^{\ell}. \quad (37)$$

Коефіцієнти $M_{mk}^{\ell p}$, K_m^{ℓ} , $\ell = 1, 2$, $m = 1, 2, \dots$, системи (37) визначаються за такими формулами:

– для першої збуреної симетричної та антисиметричної задач:

$$M_{mk}^{\ell p} = \frac{1}{2} \int_0^1 (\sigma_{kzz}^p(r, -b) \sigma_{mzz}^{\ell}(r, -b) + \sigma_{krz}^p(r, -b) \sigma_{mrz}^{\ell}(r, -b)) dr,$$

$$K_m^{\ell} = \int_0^1 (\sigma_1(r) \sigma_{mzz}^{\ell}(r, -b) + \tau_1(r) \sigma_{mrz}^{\ell}(r, -b)) dr, \quad (38)$$

– для другої збуреної симетричної задачі:

$$M_{mk}^{\ell p} = \frac{1}{2} \int_0^b (u_{kr}^p(1, z) u_{mr}^{\ell}(1, z) + u_{kz}^p(1, z) u_{mz}^{\ell}(1, z)) dz -$$

$$- \frac{1}{2b} \int_0^b u_{kr}^p(1, z) dz \int_0^b u_{mr}^{\ell}(1, z) dz,$$

$$K_m^{\ell} = \int_0^b (u_1(z) u_{mr}^{\ell}(1, z) + u_2(z) u_{mz}^{\ell}(1, z)) dz -$$

$$- \frac{1}{b} \int_0^b u_1(z) dz \int_0^b u_{mr}^{\ell}(1, z) dz, \quad (39)$$

– для другої збуреної антисиметричної задачі:

$$\begin{aligned}
M_{mk}^{\ell p} &= \frac{1}{2} \int_0^b (u_{kr}^p(1, z) u_{mr}^\ell(1, z) + u_{kz}^p(1, z) u_{mz}^\ell(1, z)) dz - \\
&\quad - \frac{3}{2b^3} \int_0^b u_{kr}^p(1, z) dz \int_0^b u_{mr}^\ell(1, z) dz - \\
&\quad - \frac{1}{2b} \int_0^b u_{kz}^p(1, z) dz \int_0^b u_{mz}^\ell(1, z) dz, \\
K_m^\ell &= \int_0^b (u_1(z) u_{mr}^\ell(1, z) + u_2(z) u_{mz}^\ell(1, z)) dz - \\
&\quad - \frac{3}{b^3} \int_0^b u_1(z) dz \int_0^b u_{mr}^\ell(1, z) dz - \\
&\quad - \frac{1}{b} \int_0^b u_2(z) dz \int_0^b u_{mz}^\ell(1, z) dz. \tag{40}
\end{aligned}$$

Сталі a, c, d виражаються такими формулами:

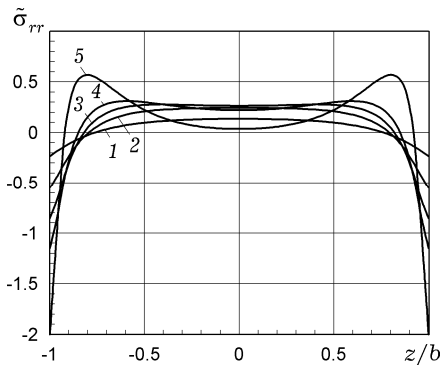
$$\begin{aligned}
a &= -\frac{3}{b^3} \int_0^b \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k u_{kr}(1, z) + \bar{C}_k \bar{u}_{kr}(1, z) - u_1(r)) z dz, \\
c &= -\frac{1}{b} \int_0^b \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k u_{kz}(1, z) + \bar{C}_k \bar{u}_{kz}(1, z) - u_2(r)) dz, \\
d &= -\frac{1}{b} \int_0^b \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k u_{kr}(1, z) + \bar{C}_k \bar{u}_{kr}(1, z) - u_1(r)) dz.
\end{aligned}$$

У формулах (38)–(40) уведено такі позначення: $\sigma_{kzz}^1 = \sigma_{kzz}$, $\sigma_{kzz}^2 = \bar{\sigma}_{kzz}$, $\sigma_{krz}^1 = \sigma_{krz}$, $\sigma_{krz}^2 = \bar{\sigma}_{krz}$, $u_{kr}^1 = u_{kr}$, $u_{kr}^2 = \bar{u}_{kr}$, $u_{kz}^1 = u_{kz}$, $u_{kz}^2 = \bar{u}_{kz}$.

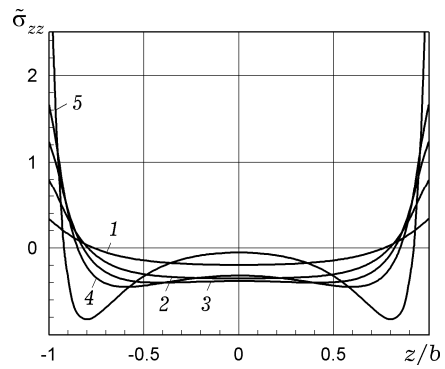
3. Приклади числових досліджень розв'язку. Систему рівнянь (37) розв'язували методом редукції [11], який полягає у розгляді скінченних систем N рівнянь для N невідомих коефіцієнтів замість відповідних нескінченних систем. Для наведених нижче результатів обмежилися $N = 15$. Обчислення виконано при $rg = 1$, $\nu = 0.25$, а компоненти тензора напружень нормовано за модулем Юнга.

На рис. 1 показано розподіли за нормованою по b осью координатою z компонент тензора напружень $\tilde{\sigma}_{rr}$, $\tilde{\sigma}_{zz}$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$, $\tilde{\sigma}_{rz}$ для першої збуреної симетричної задачі, на рис. 2 – для першої збуреної антисиметричної задачі, на рис. 3 – для другої збуреної симетричної задачі, на рис. 4 – для другої збуреної антисиметричної задачі. Криві 1–5 на цих рисунках відповідають значенням $b = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 2.0$. Компоненти тензора напружень розраховано на поверхні \mathcal{S}_0 .

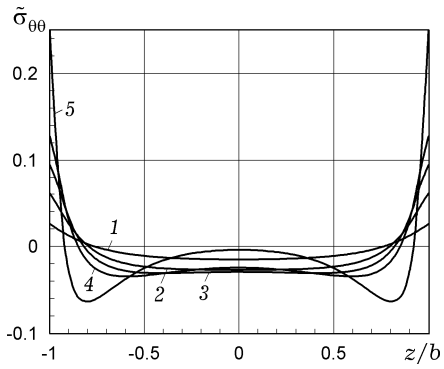
Як бачимо, напруження збуреного стану мають виражений крайовий ефект: зі збільшенням b суттєво збільшується градієнтність компонент тензора напружень в околі торців циліндра.



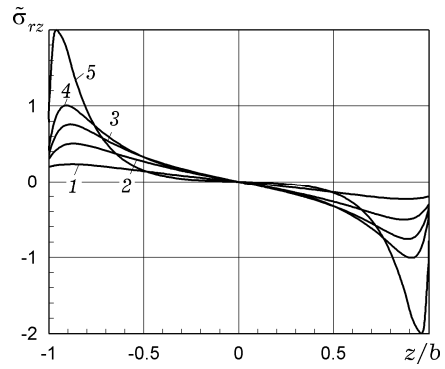
a)



б)

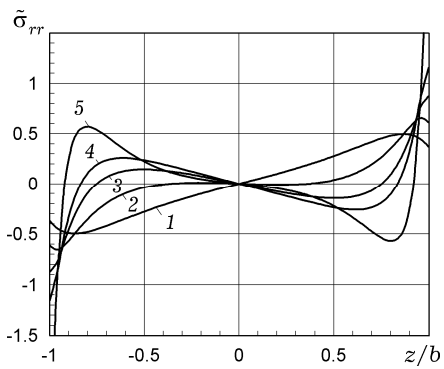


в)

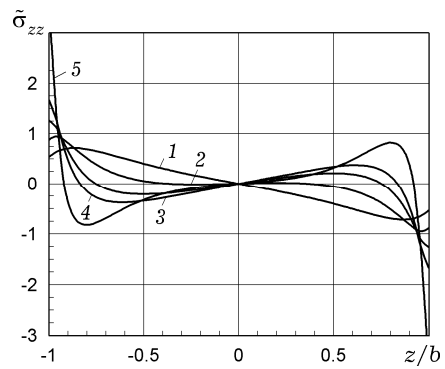


г)

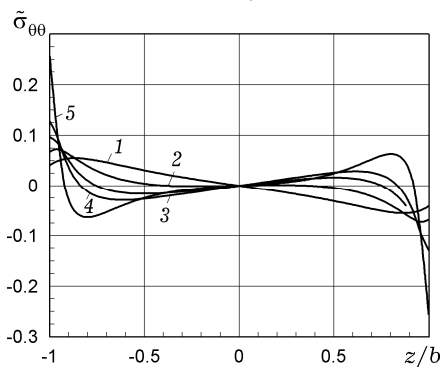
Рис. 1



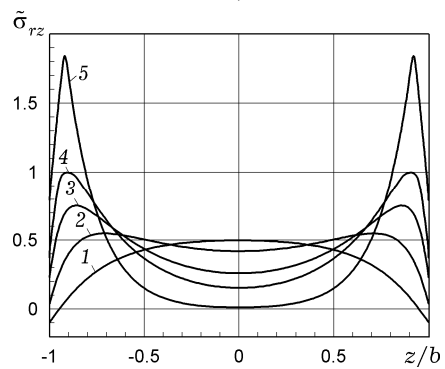
a)



б)



в)



г)

Рис. 2

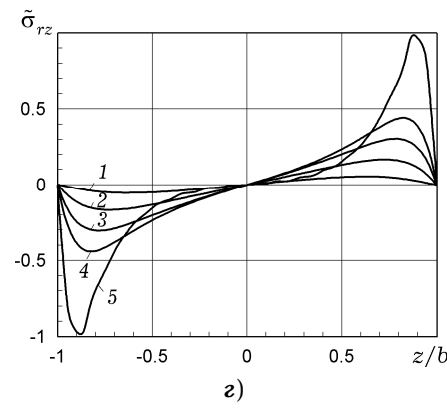
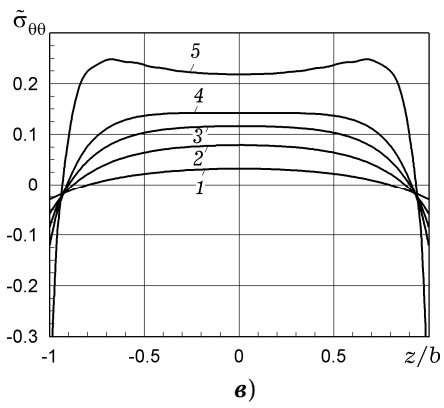
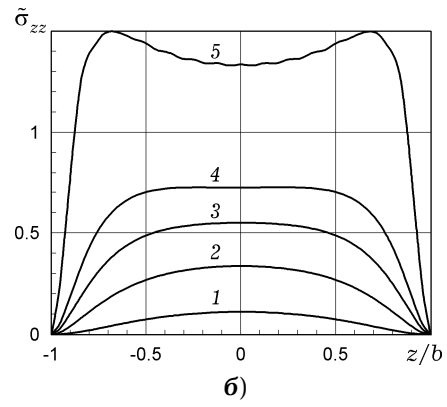
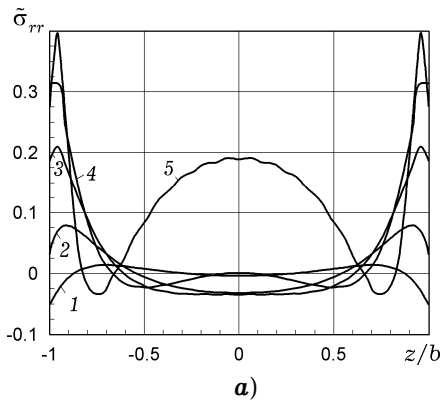


Рис. 3

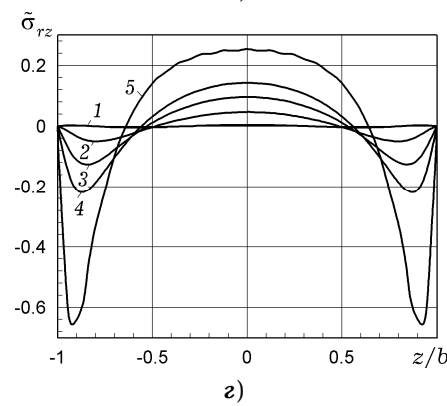
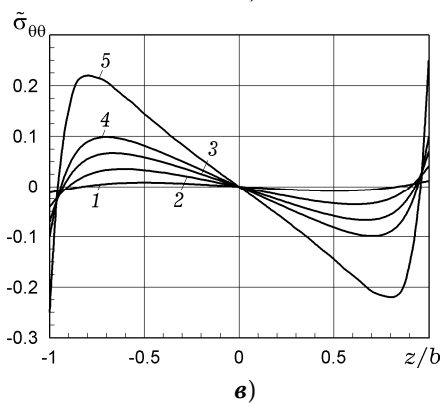
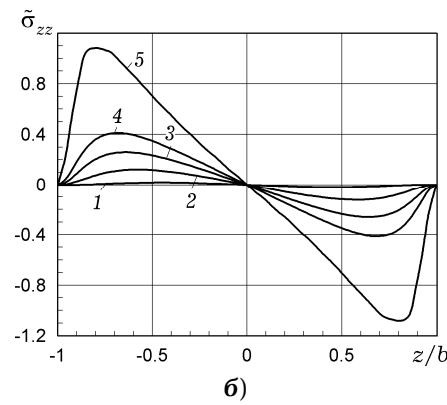
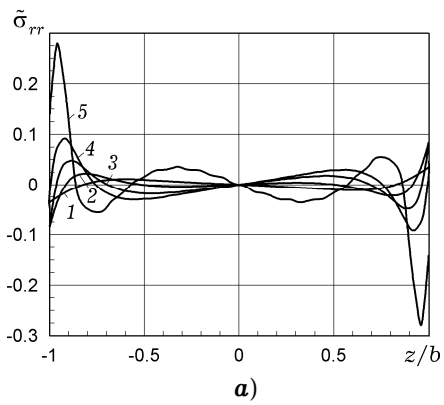


Рис. 4

На рис. 5 наведено розподіли компонент тензора напружень вихідної задачі σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rz} за осьовою координатою z , віднесеною до параметра b , для значень довжини циліндра $b = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2$ (криві 1–5 відповідно) при $r = 1$.

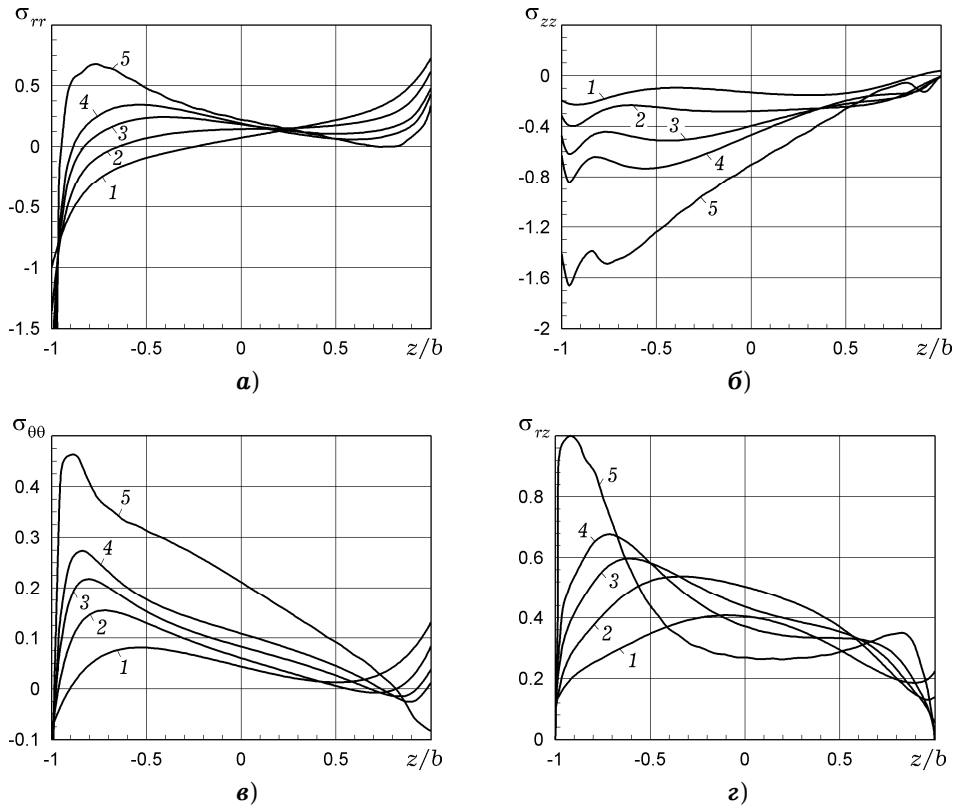


Рис. 5

Залежності компонент вектора переміщень u_r та u_z на торці циліндра \mathcal{S}_2 від радіальної координати r наведено на рис. 6 для значень довжини циліндра $b = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2$ (криві 1–5 відповідно).

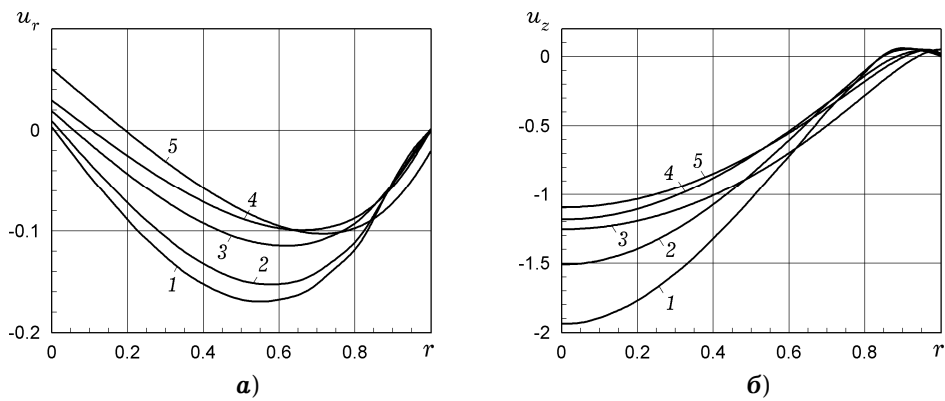


Рис. 6

Висновки. З використанням варіаційного методу однорідних розв'язків сформульовано та розв'язано осесиметричну задачу теорії пружності для скінченного циліндричного тіла з урахуванням власної ваги. Розв'язок задачі подано у вигляді суперпозиції основного та збуреного станів. Задачу

визначення збуреного стану розбито на дві задачі, для кожної з яких досліджено симетричний та антисиметричний відносно серединного поперечного перерізу циліндра випадки. Розв'язок кожної з чотирьох задач подано у вигляді розвинення за повними системами комплексних осесиметричних однорідних розв'язків рівнянь Ляме. Введено квадратичні функціонали для розв'язування першої та другої збурених задач, які за квадратичною нормою визначають відхилення розв'язку від заданих відповідних неоднорідних умов. Умови мінімуму функціоналів приводять до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно коефіцієнтів розвинення розв'язків, які розв'язували методом редукції, задаючи у розвиненнях скінченну кількість членів розкладу в ряд. Досліджено ефективність застосування запропонованого варіаційного підходу до розв'язування осесиметричних задач для різних значень довжини циліндра.

1. Вігак В. М., Токовий Ю. В. Точний розв'язок осесиметричної задачі пружності в напруженнях для суцільного циліндра певної довжини // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 55–60.
2. Мелешко В. В., Токовий Ю. В., Барбер Дж. Р. Осесиметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 120–137.
Te same: Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V., Barber J. R. Axially symmetric temperature stresses in an elastic isotropic cylinder of finite length // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 5. – P. 646–669. – <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0428-1>.
3. Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
Te same: Nowacki W. Thermoelasticity. – Oxford: Pergamon, 1962. – 628 p.
4. Попов Г. Я. Осесимметричные краевые задачи теории упругости для цилиндров и конусов конечной длины // Докл. РАН. – 2011. – **439**, № 2. – С. 192–197.
Te same: Popov G. Y. Axisymmetrical boundary-value problems of elasticity theory for finite-length cylinders and cones // Dokl. Phys. – 2011. – **56**, No. 7. – P. 407–412. – <https://doi.org/10.1134/S1028335811070093>.
5. Попов Г. Я., Процеров Ю. С. Осесимметричная задача для упругого цилиндра конечной длины с заземленной боковой поверхностью при учете собственного веса // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 1. – С. 57–68.
Te same: Popov G. Ya., Protserov Yu. S. Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weight // J. Math. Sci. – 2016. – **212**, No. 1. – P. 67–82. – <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2649-1>.
6. Процеров Ю. С. Осесимметричные задачи теории упругости для цилиндра конечной длины со свободной цилиндрической поверхностью и учетом собственного веса // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Математика і механіка. – 2013. – **18**, Вип. 3 (19). – С. 69–81.
7. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
8. Токовий Ю. В. Осесиметричні напруження в скінченному пружному циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 144–151.
9. Чекурін В. Ф., Постолакі Л. І. Застосування варіаційного методу однорідних розв'язків для оптимального керування осесиметричним термопружним станом циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 2. – С. 105–116.
Te same: Chekurin V. F., Postolaki L. I. Application of the variational method of homogeneous solutions for the optimal control of the axisymmetric thermoelastic state of a cylinder // J. Math. Sci. – 2019. – **243**, No. 1. – P. 128–144. – <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04531-3>.
10. Agarwal V. K. Axisymmetric solution of the end-problem for a semi-infinite elastic circular cylinder and its application to joined dissimilar cylinders under uniform tension // Int. J. Eng. Sci. – 1978. – **16**, No. 12. – P. 985–998. – [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(78\)90056-3](https://doi.org/10.1016/0020-7225(78)90056-3).
11. Chekurin V. F., Postolaki L. I. Axially symmetric elasticity problems for the hollow cylinder with the stress-free ends. Analytical solving via a variational method of homogeneous solutions // Mathematical Modeling and Computing. – 2020. – **7**, No. 1. – P. 48–63. – <https://doi.org/10.23939/mmc2020.01.048>.

12. Chekurin V. F., Postolaki L. I. A variational method of homogeneous solutions for axisymmetric elasticity problems for cylinder // *Mathematical Modeling and Computing*. – 2015. – **2**, No. 2. – P. 128–139. – <https://doi.org/10.23939/mmc2015.02.128>.
13. Chekurin V., Postolaki L. Application of the least squares method in axisymmetric biharmonic problems // *Math. Probl. Eng.* – 2016. – **2016**. – Article ID 3457649, 9 pages. – <https://doi.org/10.1155/2016/3457649>.
14. Sburlati R. Three-dimensional analytical solution for an axisymmetric biharmonic problem // *J. Elasticity*. – 2009. – **95**, No. 1-2. – P. 79–97. – <https://doi.org/10.1007/s10659-009-9195-3>.
15. Tarn J.-Q., Tseng W.-D., Chang H.-H. A circular elastic cylinder under its own weight // *Int. J. Solids Struct.* – 2009. – **46**, No. 14-15. – P. 2886–2896. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.03.016>.
16. Vihak V. M., Yasinsky A. V., Tokovyy Yu. V., Rychahivskyy A. V. Exact solution of the axisymmetric thermoelasticity problem for a long cylinder subjected to varying with-respect-to-length loads // *J. Mech. Behav. Mater.* – 2007. – **18**, No. 2. – P. 141–148. – <https://doi.org/10.1515/JMBM.2007.18.2.141>.

THE USE OF THE VARIATIONAL METHOD OF HOMOGENEOUS SOLUTIONS IN AN AXISYMMETRIC ELASTICITY PROBLEM FOR A FINITE CYLINDER UNDER ITS WEIGHT

Using the variational method of homogeneous solutions, the stress-strain state of a solid cylinder of finite length is analyzed with account for its weight. The lateral surface of the cylinder is fixed, and the end-faces are free of loadings. The general solution is presented by a superposition of solutions to problems for an inhomogeneous system of equations with homogeneous conditions at the cylinder end-faces (the basic state) and for a homogeneous system of equations with inhomogeneous conditions at the cylinder end-faces (the perturbed state). The implementation of the method reduces the problem of determining the perturbed state to the solution of infinite systems of linear algebraic equations, which are solved by the simple reduction method. The examples of numerical implementation are presented.

Key words: *variational method of homogeneous solutions, axisymmetric problem, finite cylinder, Love function, own weight.*