

**СТАТИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТОГО
ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА**

Розроблено методикку визначення статичного термопружного стану у шаруватому циліндрі із функціонально-градієнтними термочутливими складовими з урахуванням конвективно-променевого теплообміну за дії залежних від температури густин поверхневих та об'ємних джерел тепла. Знаходження температурних полів з використанням розв'язків допоміжних задач теплопровідності зведено до розв'язання одного нелінійного алгебричного рівняння. Деформації і напруження знайдено з використанням наближеного аналітичного розв'язку задачі термопружності в переміщеннях. Наведено результати числових досліджень.

Ключові слова: шаруватий циліндр, функціонально-градієнтні термочутливі матеріали, конвективно-променевий теплообмін, термопружний стан, узагальнені функції.

Циліндричні елементи конструкцій із функціонально-градієнтних матеріалів знаходять широке застосування у сучасній техніці. Підвищення експлуатаційних вимог за умов високих температур приводить до необхідності досліджень їхньої термомеханічної поведінки з урахуванням температурної залежності (термочутливості) фізико-механічних характеристик (ФМХ) матеріалів і теплового випромінювання. Однак таким дослідженням, на відміну від тих, у яких нехтуються зазначеними факторами, присвячена невелика кількість публікацій. Зокрема, термопружний стан функціонально-градієнтного термочутливого циліндра, поверхні якого підтримуються при сталих температурах, досліджено з використанням методу скінченних елементів у [5, 8], а з використанням аналітично-числових методів – у [1, 4]. Задачу термопружності для тришарового циліндра, середній шар якого виготовлено з функціонально-градієнтного термочутливого матеріалу, за нагріву тепловим потоком розглянуто в [3].

У цій статті запропоновано методикку розв'язування нелінійних стаціонарних задач теплопровідності та відповідних статичних задач термопружності для шаруватого циліндра із функціонально-градієнтними термочутливими складовими. Визначення температурних полів передбачає використання розв'язків систем інтегральних рівнянь, отриманих шляхом інтегрування рівняння теплопровідності з узагальненими похідними за заданих на одній із обмежувальних поверхонь теплового потоку (температури), а на протилежній – температури (теплового потоку) та знаходження із нелінійного алгебричного рівняння значень теплового потоку або температури, які зумовлені заданою тепловою дією. Для визначення деформацій і напружень використано розв'язок системи інтегро-алгебричних рівнянь задачі термопружності в переміщеннях, який знайдено методом послідовних наближень, обмеженим лише першим наближенням.

1. Формулювання задачі термопружності. Розглянемо циліндр, складений із n концентричних функціонально-градієнтних шарів, обмежувальні поверхні \tilde{r}_0 та \tilde{r}_n якого перебувають під дією рівномірно прикладених навантажень σ_0 і σ_n , підтримуються при температурах t_c^- і t_c^+ або нагріваються шляхом конвективного теплообміну з середовищами температури t_{c0} і t_{cn} та тепловими потоками густини $\tilde{q}_0 q_0(T_1)$ і $\tilde{q}_n q_n(T_n)$ відповідно. У шарах, які ідеально контактують, діють внутрішні джерела тепла густини

[✉]dept19@iapmm.lviv.ua

$w_0^{(i)} w_t^{(i)}(T_i, \tilde{r})$, $i = 1, 2, \dots, n$, а на поверхнях поділу $\tilde{r} = \tilde{r}_j$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, – теплові потоки густини $\tilde{q}_j q_j(T_j)$. Одночасно з обмежувальних поверхонь відводяться теплові потоки власного випромінювання згідно з законом Стефана – Больцмана. Торцеві поверхні шаруватого циліндра теплоізолювані і перебувають під дією зусиль, рівнодійна яких дорівнює P . Визначимо стаціонарні температурні поля і термпружний стан такого циліндра з урахуванням залежностей від температури і координати коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_t^{(i)}(T_i, \tilde{r})$, модулів пружності $E_i(T_i, \tilde{r})$, коефіцієнтів Пуассона і лінійного розширення $\nu_i(T_i, \tilde{r})$ і $\alpha_{ti}(T_i, \tilde{r})$, а коефіцієнтів тепловіддачі з обмежувальних поверхонь і ступенів чорноти – від температури: $\tilde{\alpha}_0 \alpha_0(T_1)$, $\tilde{\alpha}_n \alpha_n(T_n)$ і $\tilde{\varepsilon}_0 \varepsilon_0(T_1)$, $\tilde{\varepsilon}_n \varepsilon_0(T_n)$ (Множники біля функцій мають розмірності відповідних величин).

2. Розв’язання задач теплопровідності. Для цього використаємо записані в безрозмірних величинах

– систему рівнянь теплопровідності:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \bar{\lambda}_t^{(i)}(\bar{T}_i, r) \frac{d\bar{T}_i}{dr} \right] = -\text{Po}_i \bar{w}_t^{(i)}(\bar{T}_i, r), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

– умови контакту:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_t^{(j+1)}(\bar{T}_{j+1}, r) \frac{d\bar{T}_{j+1}}{dr} - \bar{\lambda}_t^{(j)}(\bar{T}_j, r) \frac{d\bar{T}_j}{dr} &= -\bar{\text{Ki}}_j \bar{q}_j(\bar{T}_j), \\ \bar{T}_{j+1} &= \bar{T}_j, \quad r = r_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (2)$$

– умови на поверхні $r = r_0$:

$$\bar{T}_1 \Big|_{r=r_0} = \bar{t}_c^- \quad (3)$$

або

$$\begin{aligned} \left(\bar{\lambda}_t^{(1)}(\bar{T}_1, r) \frac{d\bar{T}_1}{dr} - \text{Bi}_0 \bar{\alpha}_0(\bar{T}_1)(\bar{T}_1 - \bar{t}_{c0}) - \text{Sk}_0 \bar{\varepsilon}(\bar{T}_1) \bar{T}_1^4 + \right. \\ \left. + \bar{\text{Ki}}_0 \bar{q}_0(\bar{T}_1) \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

– умови на поверхні $r = r_n$:

$$\bar{T}_n \Big|_{r=r_n} = \bar{t}_c^+ \quad (5)$$

або

$$\begin{aligned} \left(\bar{\lambda}_t^{(n)}(\bar{T}_n, r) \frac{d\bar{T}_n}{dr} + \text{Bi}_n \bar{\alpha}_n(\bar{T}_n)(\bar{T}_n - \bar{t}_{cn}) + \text{Sk}_n \bar{\varepsilon}(\bar{T}_n) \bar{T}_n^4 - \right. \\ \left. - \bar{\text{Ki}}_n \bar{q}_n(\bar{T}_n) \right) \Big|_{r=r_n} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

а також інші варіанти граничних умов, які отримуватимемо, комбінуючи значення $\text{Bi}_p = 0$, $\text{Sk}_p = 0$, $p = 0, n$.

$$\text{Тут } r = \frac{\tilde{r}}{\ell}, \quad \bar{T}_i = \frac{T_i}{T_s}, \quad \bar{\lambda}_t^{(i)}(\bar{T}_i, r) = \frac{\lambda_t^{(i)}(T_s \bar{T}_i, r \ell)}{\lambda_0^{(1)}}, \quad \text{Po}_i = \frac{\ell^2 w_0^{(i)}}{\lambda_0^{(1)} T_s}, \quad \bar{w}_t^{(i)}(r) = w_t^{(i)}(r \ell),$$

$$r_j = \frac{\tilde{r}_j}{\ell}, \quad \overline{\text{Ki}}_j = \frac{\ell \tilde{q}_j}{\lambda_0^{(1)} T_s}, \quad [\bar{q}_j(\bar{T}), \bar{\alpha}_p(\bar{T}), \bar{\varepsilon}_p(\bar{T})] = [q_j(T), \alpha_p(T), \varepsilon_p(T)]_{T=T_s \bar{T}}, \quad \bar{t}_{cp} = \frac{t_{cp}}{T_s},$$

$$\text{Sk}_p = \frac{\ell \tilde{\varepsilon}_p \sigma_0}{\lambda_0^{(1)} T_s^3}, \quad \text{Vi}_p = \frac{\ell \tilde{\alpha}_p}{\lambda_0^{(1)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad p = 0, n, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad \bar{t}_c^\pm = \frac{t_c^\pm}{T_s},$$

σ_0 – стала Стефана – Больцмана; T_s – характерна для задачі температура; ℓ – параметр, що має розмірність одиниці довжини.

Температурні поля залежно від варіанта граничних умов визначатимемо за допомогою розв'язків двох отриманих нижче систем інтегральних рівнянь.

До першої системи зводиться задача знаходження розподілів температур

$$\bar{T}_i = \bar{T}_i(r, \text{Ki}_0, T_{cn}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

які задовольняють рівняння (1), умови контакту (2) і такі граничні умови на поверхнях $r = r_0$, $r = r_n$:

$$\left[\bar{\lambda}_t^{(1)}(\bar{T}_1, r) \frac{d\bar{T}_1}{dr} \right]_{r=r_0} = -\text{Ki}_0, \quad (8)$$

$$\bar{T}_n|_{r=r_n} = T_{cn}, \quad (9)$$

де Ki_0 і T_{cn} – значення на відповідних поверхнях безрозмірних потоку тепла і температури, зумовлені заданою тепловою дією.

Введемо потрібні надалі функції:

$$\begin{aligned} \bar{T}(r) &= \bar{T}_1(r) + \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{T}_{i+1}(r) - \bar{T}_i(r)] S(r - r_i), \\ \bar{\lambda}_t(\bar{T}, r) &= \bar{\lambda}_t^{(1)}(\bar{T}_1, r) + \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{\lambda}_t^{(i+1)}(\bar{T}_{i+1}, r) - \bar{\lambda}_t^{(i)}(\bar{T}_i, r)] S(r - r_i), \\ \text{Po}(r) &= \text{Po}_1(r) + \sum_{i=1}^{n-1} [\text{Po}_{i+1}(r) - \text{Po}_i(r)] S(r - r_i), \\ \bar{w}_t(\bar{T}, r) &= \bar{w}_t^{(1)}(\bar{T}_1, r) + \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{w}_t^{(i+1)}(\bar{T}_{i+1}, r) - \bar{w}_t^{(i)}(\bar{T}_i, r)] S(r - r_i), \end{aligned} \quad (10)$$

де $S(\zeta)$ – функція Гевісайда. Розглянемо еквівалентне системі рівнянь (1) і умовам контакту (2) рівняння з узагальненими похідними, записане з використанням позначень (10):

$$\frac{d}{dr} \left[r \bar{\lambda}_t(\bar{T}, r) \frac{d\bar{T}}{dr} \right] = - \sum_{j=1}^{n-1} r_j \overline{\text{Ki}}_j \bar{q}_j(\bar{T}_j(r_j)) \delta(r - r_j) - \text{Po}(r) r \bar{w}_t(\bar{T}, r). \quad (11)$$

Проінтегруємо рівняння (11) з урахуванням граничних умов (8) і (9) спочатку в межах від r_0 до r , а потім отриману рівність – від r до r_n . Після перетворень отримаємо таке інтегральне рівняння Вольтерра другого роду:

$$\bar{T}(r) = \bar{T}_{cn} + \int_r^{r_n} \frac{t(\zeta) d\zeta}{\zeta \bar{\lambda}_t(\bar{T}(\zeta), \zeta)}. \quad (12)$$

Тут

$$t(\zeta) = r_0 \text{Ki}_0 + \sum_{j=1}^{n-1} r_j \overline{\text{Ki}}_j \bar{q}_j(\bar{T}_j(r_j)) S(\zeta - r_j) + W(\zeta),$$

$$W(r) = \int_{r_0}^r \text{Po}(\zeta) \zeta \bar{w}_t(\bar{T}(\zeta), \zeta) d\zeta.$$

Із (12) отримуємо рекурентну систему інтегральних рівнянь для визначення температури $\bar{T}_i(r)$ в шарах $i = n, n-1, \dots, 1$:

$$\begin{aligned} \bar{T}_n(r) &= \bar{T}_{cn} + \int_r^{r_n} \frac{t_n(\zeta) d\zeta}{\zeta \bar{\lambda}_t^{(n)}(\bar{T}_n(\zeta), \zeta)}, \\ \bar{T}_{n-1}(r) &= \bar{T}_n(r_{n-1}) + \int_r^{r_{n-1}} \frac{t_{n-1}(\zeta) d\zeta}{\zeta \bar{\lambda}_t^{(n-1)}(\bar{T}_{n-1}(\zeta), \zeta)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \bar{T}_1(r) &= \bar{T}_2(r_1) + \int_r^{r_1} \frac{t_1(\zeta) d\zeta}{\zeta \bar{\lambda}_t^{(1)}(\bar{T}_1(\zeta), \zeta)}, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} t_i(\zeta) &= r_0 \text{Ki}_0 + \sum_{j=1}^{i-1} r_j \bar{\text{Ki}}_j \bar{q}_j(\bar{T}_j(r_j)) + W_i(\zeta), \\ W_i(r) &= \sum_{j=1}^{i-1} \text{Po}_j \int_{r_{j-1}}^{r_j} \zeta \bar{w}_t^{(j)}(\bar{T}_j(\zeta), \zeta) d\zeta + \text{Po}_i \int_{r_{i-1}}^r \zeta \bar{w}_t^{(i)}(\bar{T}_i(\zeta), \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Розв'язуємо цю систему методом послідовних наближень. За нульове наближення вибираємо розв'язок відповідної задачі при сталих коефіцієнтах теплопровідності і незалежних від температури густин джерел тепла. Шуканий розподіл температур описуємо наближенням, знайденим із заданою точністю.

Для знаходження температур з іншими варіантами граничних умов необхідно підставити у (7) визначені з цих умов значення Ki_0 і T_{cn} .

Зокрема, у випадку граничних умов (4) і (6) отримаємо

$$\text{Ki}_0 = \varphi_n(T_{cn}), \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_n(T_{cn}) &= - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{r_j}{r_0} \bar{\text{Ki}}_j \bar{q}_j(\bar{T}_j(r_j, \text{Ki}_0, T_{cn})) - \\ &\quad - \frac{1}{r_0} \sum_{i=1}^n \text{Po}_i \int_{r_{i-1}}^{r_i} \zeta \bar{w}_t^{(i)}(\bar{T}_i(\zeta, \text{Ki}_0, T_{cn}), \zeta) d\zeta + \\ &\quad + \frac{r_n}{r_0} \left[\text{Bi}_n \bar{\alpha}_n(T_{cn})(T_{cn} - \bar{t}_{cn}) + \text{Sk}_n(T_{cn})^4 \bar{\varepsilon}_n(T_{cn}) - \bar{\text{Ki}}_n \bar{q}_n(T_{cn}) \right], \end{aligned}$$

T_{cn} – корінь рівняння

$$\begin{aligned} &\left\{ \text{Ki}_0 + \text{Bi}_0 \bar{\alpha}_0(\bar{T}_1) \Big|_{\bar{T}_1 = \bar{T}_1(r_0, \text{Ki}_0, T_{cn})} \left[\bar{T}_1(r_0, \text{Ki}_0, T_{cn}) - \bar{t}_{c0} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \text{Sk}_0 \bar{\varepsilon}_0(\bar{T}_1) \Big|_{\bar{T}_1 = \bar{T}_1(r_0, \text{Ki}_0, T_{cn})} \left[\bar{T}_1(r_0, \text{Ki}_0, T_{cn}) \right]^4 \right\} \Big|_{\text{Ki}_0 = \varphi_n(T_{cn})} - \\ &\quad - \bar{\text{Ki}}_0 \bar{q}_0(\bar{T}_1) \Big|_{\bar{T}_1 = \bar{T}_1(r_0, \text{Ki}_0, T_{cn})} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Корінь T_{cn} рівняння (15) знаходимо методом поділу відрізка наполовину. При цьому для кожного наближення T_{cn} обчислюємо Ki_0 за формулою (14), а $\bar{T}_i(r, Ki_0, T_{cn})$ при відповідних значеннях аргументу r визначаємо із рекурентної системи інтегральних рівнянь (13).

Коли на поверхні $r = r_0$ задано температуру, а на поверхні $r = r_n$ – умову (6), або коли на поверхні $r = r_0$ задано умову (4), а на поверхні $r = r_n$ – тепловий потік Ki_n , визначення відповідних температурних полів спроститься, якщо використати іншу систему інтегральних рівнянь. Цю систему отримаємо із задачі про знаходження розподілу температур

$$\bar{T}_i^* = \bar{T}_i^*(r, Ki_n, T_{c0}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

які задовольняють рівняння (1), умови контакту (2) і такі граничні умови на поверхнях $r = r_0$, $r = r_n$:

$$\begin{aligned} \bar{T}_i^* \Big|_{r=r_0} &= T_{c0}, \\ \left[\bar{\lambda}_t^{(n)}(\bar{T}_n^*, r) \frac{d\bar{T}_n^*}{dr} \right]_{r=r_n} &= Ki_n. \end{aligned} \quad (17)$$

Для знаходження цих розподілів проінтегруємо рівняння (11) з урахуванням граничних умов (17) спочатку в межах від r до r_n , а потім отриману рівність – від r_0 до r . Після перетворень інтегральне рівняння матиме вигляд

$$\bar{T}^*(r) = \bar{T}_{c0} + \int_{r_0}^r \frac{t^*(\zeta) d\zeta}{\zeta \bar{\lambda}_t(\bar{T}^*(\zeta), \zeta)}, \quad (18)$$

де

$$t^*(\zeta) = r_n Ki_n + \sum_{j=1}^{n-1} r_j \bar{Ki}_j \bar{q}_j(\bar{T}_j^*(r_j)) S(r_j - \zeta) + W^*(\zeta),$$

$$W^*(r) = \int_r^{r_n} Po(\zeta) \zeta \bar{w}_t(\bar{T}^*(\zeta), \zeta) d\zeta.$$

Із (18) отримаємо рекурентну систему інтегральних рівнянь для визначення температури $\bar{T}_i^*(r)$ в шарах $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1^*(r) &= \bar{T}_{c0} + \int_{r_0}^r \frac{t_1^*(\zeta) d\zeta}{\zeta \bar{\lambda}_t^{(1)}(\bar{T}_1^*(\zeta), \zeta)}, \\ \bar{T}_2^*(r) &= \bar{T}_1^*(r_1) + \int_{r_1}^r \frac{t_2^*(\zeta) d\zeta}{\zeta \bar{\lambda}_t^{(2)}(\bar{T}_2^*(\zeta), \zeta)}, \\ &\dots, \\ \bar{T}_n^*(r) &= \bar{T}_{n-i}^*(r_{n-1}) + \int_{r_{n-1}}^r \frac{t_n^*(\zeta) d\zeta}{\zeta \bar{\lambda}_t^{(n)}(\bar{T}_n^*(\zeta), \zeta)}, \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$t_i^*(\zeta) = r_n Ki_n + \sum_{j=i}^{n-1} r_j \bar{Ki}_j \bar{q}_j(\bar{T}_j^*(r_j)) + W_i^*(\zeta),$$

$$W_i^*(r) = \text{Po}_i \int_r^{r_i} \zeta \bar{w}_i^{(i)}(\bar{T}_i^*(\zeta), \zeta) d\zeta + \sum_{j=i+1}^n \text{Po}_j \int_{r_{j-1}}^{r_j} \zeta \bar{w}_i^{(j)}(\bar{T}_j^*(\zeta), \zeta) d\zeta.$$

Систему рівнянь (19) також розв'язуємо методом послідовних наближень.

Для знаходження температур у випадку, наприклад, граничних умов (3) і (6) необхідно підставити в (16) лише значення Ki_n , знайдені з рівняння

$$\text{Ki}_n + \left[\text{Bi}_n \bar{\alpha}_n(\bar{T}_n)(\bar{T}_n - \bar{t}_{cn}) + \text{Sk}_n \bar{T}_n^4 \bar{\varepsilon}_n(\bar{T}_n) - \bar{\text{Ki}}_n \bar{q}_n(\bar{T}_n) \right] \Big|_{\bar{T}_n = \bar{T}_n^*(r_n, \text{Ki}_n, \bar{t}_c^-)} = 0.$$

Значення Ki_n знаходимо методом поділу відрізка наполовину. При цьому для кожного наближення Ki_n температуру $\bar{T}_i^*(r, \text{Ki}_n, \bar{t}_c^-)$ при відповідних значеннях r визначаємо з рекурентної системи рівнянь (19).

2. Визначення термопружного стану. Для цього використовуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_{rp} &= c_p(r) \left[\frac{du_p(r)}{dr} + v_p^*(r) \left(\frac{u_p(r)}{r} + \varepsilon_z \right) \right] - c_p^*(r) \Phi_{rp}(r), \\ \sigma_{\varphi p} &= c_p(r) \left[v_p^*(r) \left(\frac{du_p(r)}{dr} + \varepsilon_z \right) + \frac{u_p(r)}{r} \right] - c_p^*(r) \Phi_{rp}(r), \\ \sigma_{zp} &= c_p(r) \left[v_p^*(r) \left(\frac{du_p(r)}{dr} + \frac{u_p(r)}{r} \right) + \varepsilon_z \right] - c_p^*(r) \Phi_{rp}(r), \end{aligned} \quad (20)$$

у яких віднесені до ℓ переміщення і відповідні їм деформації визначаємо за отриманими з [1, 2] формулами

$$u_p(r) = u_p^t(r) + u_p^y(r) - \varepsilon_z u_p^e(r), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} u_p^s(r) &= \frac{u_{sp}(r)}{c_p(r)} + \frac{L_{1p}^s \Phi_{2p}(r) + L_{2p}^s \Phi_{1p}(r)}{4Q_k c_p(r)} + \frac{V_p^{(1s)}(r) + V_p^{(2s)}(r)}{2c_p(r)} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_{up}^{(i)}(r)}{c_p(r)} \bar{u}_i^s(r_i), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_p^s(r)}{dr} &= \frac{\varepsilon_{sp}(r)}{c_p(r)} + \frac{L_{1p}^s \Phi_{4p}(r) + L_{2p}^s \Phi_{3p}(r)}{4Q_k c_p(r)} - \frac{V_p^{(1s)}(r) - V_p^{(2s)}(r)}{2rc_p(r)} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_{\varepsilon p}^{(i)}(r)}{rc_p(r)} \bar{u}_i^s(r_i). \end{aligned} \quad (23)$$

Тут

$$\begin{aligned} c_p(r) &= \frac{E_p(\bar{T}_p(r), r)[1 - \nu_p(\bar{T}_p(r), r)]}{[1 + \nu_p(\bar{T}_p(r), r)][1 - 2\nu_p(\bar{T}_p(r), r)]}, & c_p^*(r) &= \frac{E_p(\bar{T}_p(r), r)}{1 - 2\nu_p(\bar{T}_p(r), r)}, \\ v_p^*(r) &= \frac{\nu_p(\bar{T}_p(r), r)}{1 - \nu_p(\bar{T}_p(r), r)}, & \Phi_{rp}(r) &= \int_{T_*}^{T_p(r)} \alpha_{tp}(\zeta, r) d\zeta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{sp}(r) &= \frac{R_{1p}^s \Phi_{2p}(r) - R_{2p}^s \Phi_{1p}(r)}{2Q} + \frac{1}{\rho} J_{sp}(r), \\
\varepsilon_{sp}(r) &= \frac{R_{1p}^s \Phi_{4p}(r) - R_{2p}^s \Phi_{3p}(r)}{2Q} - \frac{1}{r^2} J_{sp}(r) + \Lambda_{sp}(r), \\
R_{1p}^s &= \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^+ J_{sj}(r_j), \quad R_{2p}^s = \sum_{j=p}^n M_{2j}^- J_{sj}(r_j) \frac{c_{0p}}{r_j^2 c_{0j}}, \quad s = t, \varepsilon; \\
R_{1p}^y &= 2r_0^2 \sigma_0, \quad R_{2p}^y = \sigma_n c_{0p} / c_{0n}, \\
\Phi_{1p}(r) &= M_{1p}^+ r + M_{1p}^- \frac{r^{p-1}}{r}, \quad \Phi_{3p}(r) = M_{1s}^+ - M_{1p}^- \left(\frac{r^{p-1}}{r} \right)^2, \\
\Phi_{2p}(r) &= M_{2p}^+ \frac{1}{r} - M_{2p}^- \frac{r}{r_p^2}, \quad \Phi_{4p}(r) = -M_{2p}^+ \frac{1}{r^2} - M_{2p}^- \frac{1}{r_p^2}, \\
J_{sp}(r) &= \int_{r_{p-1}}^r \rho \Lambda_{sp}(\rho) d\rho, \quad \Lambda_{tp}(\rho) = c_p^*(\rho) \Phi_{rp}(\rho), \\
\Lambda_{\varepsilon p}(\rho) &= c_p(\rho) v_p^*(\rho), \quad \Lambda_{yp}(\rho) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, n; \\
Q &= \Phi_n^{(1)}(r_n) + \beta_n^{(1)} \Phi_n^{(0)}(r_n), \\
M_{11}^\pm &= 2(1 \mp \beta_1), \quad M_{1p}^\pm = \Phi_{p-1}^{(0)}(r_{p-1})(1 \pm K_p) \pm \Phi_{p-1}^{(1)}(r_{p-1}) K_{cp}, \\
\Phi_1^{(m)}(r) &= \left[1 - \beta_1^{(1)} + (-1)^m (1 + \beta_1^{(1)}) \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right], \\
\Phi_p^{(m)}(r) &= \Phi_{p-1}^{(0)}(r_{p-1}) f_{p1}^{(m)}(r) + \Phi_{p-1}^{(1)}(r_{p-1}) f_{p2}^{(m)}(r), \\
f_{p1}^{(m)}(r) &= \frac{1}{2} \left[1 + K_p + (-1)^m (1 - K_p) \left(\frac{r^{p-1}}{r} \right)^2 \right], \\
f_{p2}^{(m)}(r) &= \frac{K_{cp}}{2} \left[1 - (-1)^m \left(\frac{r^{p-1}}{r} \right)^2 \right], \\
K_p &= K_{cp} \beta_{p-1}^{(1)} - \beta_p^{(1)}, \quad m = 0, 1, \quad p = 2, 3, \dots, n; \\
M_{2p}^\pm &= \alpha_{np}^{(2)} + \beta_n^{(1)} \alpha_{np}^{(1)} \pm (\alpha_{np}^{(4)} + \beta_n^{(1)} \alpha_{np}^{(3)}), \\
K_{cp} &= \frac{c_{0,p-1}}{c_{0p}}, \quad \beta_p^{(1)} = v_{0p}^*, \\
c_{0p} &= \frac{E_{0p}(1 - v_{0p})}{(1 + v_{0p})(1 - 2v_{0p})}, \quad v_{0p}^* = \frac{v_{0p}}{1 - v_{0p}}, \quad p = 1, 2, \dots, n; \\
\alpha_{ii}^{(1)} &= \alpha_{ii}^{(4)} = 1, \quad \alpha_{ii}^{(2)} = \alpha_{ii}^{(3)} = 0, \\
\alpha_{n,i}^{(1)} &= f_{n1}^{(0)}(r_n) \alpha_{n-1,i}^{(1)} + f_{n2}^{(0)}(r_n) \alpha_{n-1,i}^{(2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{n,i}^{(2)} &= f_{n1}^{(1)}(r_n)\mathbf{x}_{n-1,i}^{(1)} + f_{n2}^{(1)}(r_n)\mathbf{x}_{n-1,i}^{(2)}, \\
\mathbf{x}_{n,i}^{(3)} &= f_{n1}^{(0)}(r_n)\mathbf{x}_{n-1,i}^{(3)} + f_{n2}^{(0)}(r_n)\mathbf{x}_{n-1,i}^{(4)}, \\
\mathbf{x}_{n,i}^{(4)} &= f_{n1}^{(1)}(r_n)\mathbf{x}_{n-1,i}^{(3)} + f_{n2}^{(1)}(r_n)\mathbf{x}_{n-1,i}^{(4)}, \quad i = n, n-1, \dots, 1; \\
L_{1p}^s &= H_{1p}^s + 4\gamma_1 r_0 \bar{u}_1^s(r_0), \quad L_{2p}^s = H_{2p}^s - 2\gamma_n \bar{u}_n^s(r_n) \frac{c_{0p}}{r_n c_{0n}}, \\
\gamma_1 &= [v_1^*(r_0) - v_{01}^*]c_1(r_0), \quad \gamma_n = [v_n^*(r_n) - v_{0n}^*]c_n(r_n), \\
H_{1p}^s &= \sum_{j=1}^{p-1} r_j M_{1j}^+ V_j^{(1s)}(r_j) + \sum_{j=1}^p r_{j-1} M_{1j}^- V_j^{(2s)}(r_{j-1}), \\
H_{2p}^s &= \sum_{j=p+1}^n M_{2j}^+ V_j^{(2s)}(r_{j-1}) \frac{c_{0p}}{r_{j-1} c_{0j}} - \sum_{j=p}^n M_{2j}^- V_j^{(1s)}(r_j) \frac{c_{0p}}{r_j c_{0j}}, \\
g_{up}^{(i)}(r) &= \frac{2r_i K_{11}^{(i)} g_{2up}^{(i)}(r) - g_{1up}^{(i)}(r)}{4Q}, \quad g_{\varepsilon p}^{(i)}(r) = \frac{2r_i K_{11}^{(i)} g_{2\varepsilon p}^{(i)}(r) - g_{1\varepsilon p}^{(i)}(r)}{4Q}, \\
g_{1up}^{(i)}(r) &= \begin{cases} b_{2p}^{(i)} \phi_{1p}(r) \frac{c_{0p}}{c_{0i}}, & p \leq i, \\ b_{1p}^{(i)} \phi_{2p}(r), & p > i, \end{cases} \\
g_{2up}^{(i)}(r) &= \begin{cases} -r_{i+1}^{-2} M_{2,i+1}^- \phi_{1p}(r) \frac{c_{0p}}{c_{0,i+1}}, & p < i+1, \\ M_{1,i+1}^+ \phi_{2p}(r), & p \geq i+1, \end{cases} \\
g_{1\varepsilon p}^{(i)}(r) &= \begin{cases} b_{2p}^{(i)} \phi_{3p}(r) \frac{c_{0p}}{c_{0i}}, & p \leq i, \\ b_{1p}^{(i)} \phi_{4p}(r), & p > i, \end{cases} \\
g_{2\varepsilon p}^{(i)}(r) &= \begin{cases} -r_{i+1}^{-2} M_{2,i+1}^- \phi_{3p}(r) \frac{c_{0p}}{c_{0,i+1}}, & p < i+1, \\ M_{1,i+1}^+ \phi_{4p}(r), & p \geq i+1, \end{cases} \\
b_{2p}^{(i)} &= r_i^{-1} [m_{0i} m_{2i}^{(1)} - (1 - K_{0c}^{(i+1)})c_i(r_i) m_{2i}^{(2)}], \quad K_{0c}^{(i+1)} = \frac{c_{0i}}{c_{0,i+1}}, \\
b_{1p}^{(i)} &= r_i [m_{0i} m_{1i}^{(1)} + (1 - K_{0c}^{(i+1)})c_i(r_i) m_{1i}^{(2)}], \\
m_{0i} &= [K_{11}^{(i)} - K_{12}^{(i)} + (v_{0,i+1}^* - v_{0,i}^* K_{0c}^{(i+1)})c_i(r_i)], \\
K_{11}^{(i)} &= c_{i+1}(r_i) - c_i(r_i), \quad K_{12}^{(i)} = v_{i+1}^*(r_i) c_{i+1}(r_i) - v_i^*(r_i) c_i(r_i), \\
m_{1i}^{(1)} &= M_{1i}^+ + M_{1i}^- \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2, \quad m_{1i}^{(2)} = M_{1i}^+ - M_{1i}^- \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2, \\
m_{2i}^{(1)} &= M_{2i}^+ - M_{2i}^-, \quad m_{2i}^{(2)} = M_{2i}^+ + M_{2i}^-,
\end{aligned}$$

$$V_p^{(1s)}(r) = c_p^{(1)}(r)\bar{u}_p^s(r) - c_p^{(1)}(r_{p-1})\bar{u}_p^s(r_{p-1})\left(\frac{r_{p-1}}{r}\right) - \frac{1}{r} \int_{r_{p-1}}^r U_p^{(1s)}(\rho)\rho d\rho,$$

$$V_p^{(2s)}(r) = -c_p^{(2)}(r_p)\bar{u}_p^s(r_p)\frac{r}{r_p} + c_p^{(2)}(r)\bar{u}_p^s(r) - r \int_r^{r_p} U_p^{(2s)}(\rho)\frac{1}{\rho} d\rho,$$

$$U_p^{(1s)}(r) = c_p^{(1)}(r) \left[\frac{d\bar{u}_p^s(r)}{dr} + \frac{\bar{u}_p^s(r)}{r} \right],$$

$$U_p^{(2s)}(r) = c_p^{(2)}(r) \left[-\frac{d\bar{u}_p^s(r)}{dr} + \frac{\bar{u}_p^s(r)}{r} \right],$$

$$c_p^{(1)}(r) = \frac{c_p^*(r)}{1 + \nu_p(\bar{T}(r), r)}, \quad c_p^{(2)}(r) = \frac{E_p(\bar{T}(r), r)}{1 + \nu_p(\bar{T}(r), r)},$$

$\bar{u}_j^s(r)$ і $\frac{d\bar{u}_j^s(r)}{dr}$ – переміщення і деформації за сталих модулів пружності і коефіцієнтів Пуассона,

$$\bar{u}_p^s(r) = \frac{\bar{R}_{1p}^s \Phi_{2p}(r) - \bar{R}_{2p}^s \Phi_{1p}(r)}{2Q} + \frac{1}{r} \bar{J}_{sp}(r),$$

$$\frac{d\bar{u}_p^s(r)}{dr} = \frac{\bar{R}_{1p}^s \Phi_{4p}(r) - \bar{R}_{2p}^s \Phi_{3p}(r)}{2Q} - \frac{1}{r^2} \bar{J}_{sp}(r) + \bar{\Lambda}_{sp}(r),$$

$$\bar{R}_{1p}^s = \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^+ \bar{J}_{sp}(r_j) \frac{c_{0j}}{c_{0p}}, \quad \bar{R}_{2p}^s = \sum_{j=p}^n M_{2j}^- \bar{J}_{sp}(r_j) \frac{1}{r_j^2}, \quad s = t, \varepsilon,$$

$$\bar{R}_{1p}^y = \frac{2r_0^2 \sigma_0}{c_{0p}}, \quad \bar{R}_{2p}^y = \frac{\sigma_n}{c_{0n}}, \quad k_{0p}^* = \frac{1 + \nu_{0p}}{1 - \nu_{0p}},$$

$$\bar{J}_{sp}(r) = \int_{r_{p-1}}^r \rho \bar{\Lambda}_{sp}(\rho) d\rho, \quad \bar{\Lambda}_{tp}(\rho) = k_{0p}^* \Phi_{rp}(\rho),$$

$$\bar{\Lambda}_{\varepsilon p}(\rho) = \nu_{0p}^*, \quad \bar{\Lambda}_{yp}(\rho) = 0.$$

Осьову деформацію ε_z з використанням умови $\sum_{p=1}^n \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho \sigma_{zp}(\rho) d\rho = \frac{P}{2\pi}$

знаходимо за формулою

$$\varepsilon_z = \left[\sum_{p=1}^n \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho [\sigma_{zp}^t(\rho) + \sigma_{zp}^y(\rho)] d\rho - \frac{P}{2\pi} \right] \cdot \left[\sum_{p=1}^n \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho \sigma_{zp}^\varepsilon(\rho) d\rho \right]^{-1},$$

у якій

$$\sigma_{zp}^s(\rho) = c_p(\rho) \nu_p^*(\rho) \left[\frac{du_p^s(\rho)}{d\rho} + \frac{u_p^s(\rho)}{\rho} \right] - T_{zp}^s(\rho), \quad s = t, y, \varepsilon,$$

$$T_{zp}^t(\rho) = c_p^*(\rho) \Phi_{rp}(\rho), \quad T_{zp}^y(\rho) = 0, \quad T_{zp}^\varepsilon(\rho) = c_p(\rho).$$

Зауважимо, що наведені вище вирази для $u_p^s(r)$ є першими наближеннями розв'язків систем інтегро-алгебричних рівнянь задачі термопружності при їх відшуканні методом послідовних наближень.

Якщо виявиться, що точність обчислених переміщень, деформацій і напружень менша від заданої точності, тоді повторюємо процедуру їхнього обчислення за тими самими формулами (20)–(23), але тепер зі збільшеною

кількістю шарів $N = \sum_{p=1}^n n_p$. Додаткові шари появляються внаслідок поділу

p -ї області на n_p частин, кожна з яких має модулі пружності, коефіцієнти Пуассона і лінійного розширення цієї ж області.

3. Числові результати. Досліджували за відсутності джерел тепла і силових навантажень термопружний стан тришарового циліндра із закріпленими торцями для граничних умов (3) і (6). Обчислення виконували при $t_c^- = 293$ К, $T_s = 1273$ К, $T_* = 273$ К, $\tilde{q}_n = 4 \cdot 10^5$ Вт/м², $q_n(T_n) = 1$, $\tilde{\alpha}_n = 0$, $\varepsilon_n(T_n) = 1$, $r_0 = 100$ мм, $\tilde{r}_1 = 104$ мм, $\tilde{r}_2 = 108$ мм, $\ell = \tilde{r}_3 = 112$ мм.

Для першого і третього шарів вибрано функціонально-градієнтний матеріал на основі кераміки ZrO₂ і металу Ti-6Al-4V [7], а для другого шару – на основі кераміки Si₃N₄ і металу SUS304 [6]. Кожну з ФМХ визначали за формулою

$$p_i(T_i, \tilde{r}) = p_i^{(c)}(T_i) + \left[p_i^{(m)}(T_i) - p_i^{(c)}(T_i) \right] \left(\frac{\tilde{r} - \tilde{r}_{i-1}}{\tilde{r}_i - \tilde{r}_{i-1}} \right)^2, \quad i = 1, 2, 3,$$

де індексами «с» і «m» позначено характеристики, що відповідають кераміці і металу. Зокрема, фізико-механічні характеристики вибраних матеріалів є такими:

– для ZrO₂

$$\lambda_t^{(c)}(T) = (1.71 + 0.21 \cdot 10^{-3}T + 0.116 \cdot 10^{-6}T^2) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})],$$

$$E^{(c)}(T) = (132 - 50.3 \cdot 10^{-3}T - 8.1 \cdot 10^{-6}T^2) [\text{ГПа}], \quad \nu^{(c)}(T) = 0.333,$$

$$\alpha_t^{(c)}(T) = 9.087 \cdot 10^{-6} (1 - 13.168 \cdot 10^{-4}T + 13.976 \cdot 10^{-7}T^2) [\text{К}^{-1}];$$

– для Ti-6Al-4V

$$\lambda_t^{(m)}(T) = (1.1 + 0.017T) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})],$$

$$E^{(m)}(T) = (122.7 - 0.056T) [\text{ГПа}], \quad \nu^{(m)}(T) = 0.2888 + 32 \cdot 10^{-6}T,$$

$$\alpha_t^{(m)}(T) = 8.747 \cdot 10^{-6} (1 + 46.771 \cdot 10^{-5}T - 3.075 \cdot 10^{-7}T^2) [\text{К}^{-1}];$$

– для Si₃N₄

$$\lambda_t^{(c)}(T) = 13.723(1 - 1.032 \cdot 10^{-3}T + 5.466 \cdot 10^{-7}T^2 - 7.876 \cdot 10^{-11}T^3) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})],$$

$$E^{(c)}(T) = (348.43 - 106.96801 \cdot 10^{-3}T + 752.6088 \cdot 10^{-7}T^2 - 311.7054 \cdot 10^{-10}T^3) [\text{ГПа}], \quad \nu^{(c)}(T) = 0.24,$$

$$\alpha_t^{(c)}(T) = 7.33 \cdot 10^{-6} (1 + 72.859 \cdot 10^{-5}T) [\text{К}^{-1}];$$

– для SUS304

$$\lambda_t^{(m)}(T) = 15.379(1 - 1.264 \cdot 10^{-3}T + 2.092 \cdot 10^{-6}T^2 - 7.223 \cdot 10^{-10}T^3) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})],$$

$$E^{(m)}(T) = 201.04(1 + 3.079 \cdot 10^{-4}T - 6.534 \cdot 10^{-7}T^2) [\text{ГПа}],$$

$$\nu^{(m)}(T) = 0.3263 - 65.26 \cdot 10^{-9}T + 12.39 \cdot 10^{-8}T^2,$$

$$\alpha_t^{(m)}(T) = 15.05 \cdot 10^{-6}(1 + 66.238 \cdot 10^{-5}\vartheta) [\text{К}^{-1}].$$

На рис. 1 – рис. 4 зображено залежність від радіальної координати безрозмірних температури і напружень $\bar{\sigma}_j^t = \frac{\sigma_j^t}{E_0 \alpha_t^0 T_s}$, $j = r, \varphi, z$, $E_0 = 132$ ГПа,

$\alpha_t^0 = 9.087 \text{ К}^{-1}$. Криві **1** побудовано з урахуванням теплового випромінювання ($Sk_n = 9.3241$), криві **2** – без його врахування ($Sk_n = 0$). На рис. 1 штриховими лініями зображено також криві, побудовані за сталих коефіцієнтів теплопровідності, за які вибрано значення температурозалежних коефіцієнтів при $\bar{T} = \bar{T}_*$. Із графіків випливає, що неврахування теплового випромінювання за температурної залежності ФМХ призводить до завищення максимальних значень температури (рис. 1) на 16%, радіальних (рис. 2), кільцевих (рис. 3) і осьових (рис. 4) напружень відповідно на 22, 19 і 14%. Максимальні значення різниці температур, обчислених з урахуванням і без урахування температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності, при $Sk_n = 0$ становить 32%, а при $Sk_n = 9.3241$ – 11%.

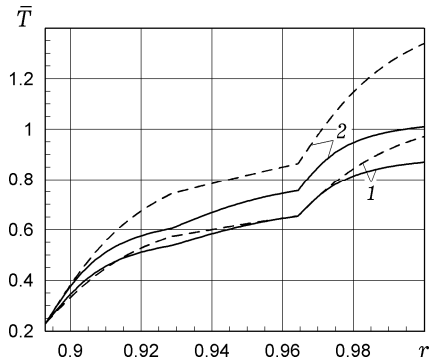


Рис. 1

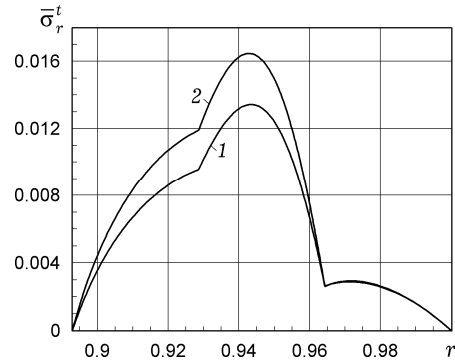


Рис. 2

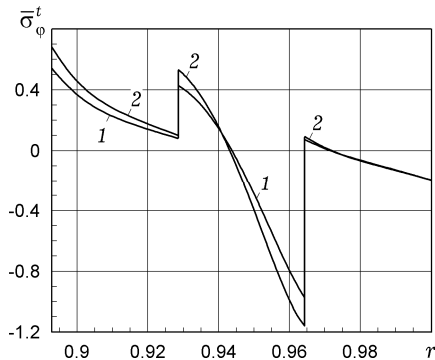


Рис. 3

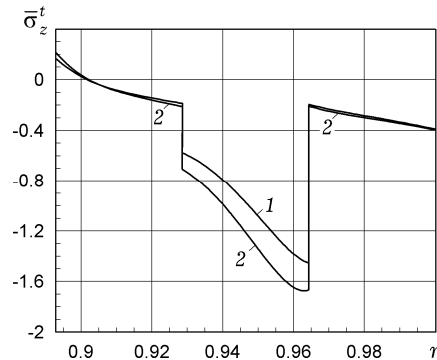


Рис. 4

Висновки. На основі моделі кусково-неоднорідного термочутливого пружного тіла запропоновано методику розв'язання нелінійних статичних задач термопружності для порожнистого циліндра, складеного із функціонально-градієнтних шарів. Методику апробовано на задачі термопружності для тришарового функціонально-градієнтного термочутливого циліндра за нагріву його зовнішньої поверхні тепловим потоком і відводу з неї потоку теплового випромінювання. Досліджено вплив теплового випромінювання на термопружний стан і температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності на температурне поле.

Робота виконана в рамках проекту № 0120U100499 за підтримки бюджетної програми України КПКВК 6541230 «Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень».

1. Процюк Б. В. Визначення термопружного стану кусково-неоднорідного термочутливого порожнистого циліндра // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 101–110.
2. Процюк Б. В. Термопружний стан кусково-неоднорідного ортотропного термочутливого циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 3. – С. 57–73.
3. Процюк Ю. Б. Задачі термопружності для тришарових термочутливих тіл простої геометричної форми // IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача (Львів, 24–27 травня 2011): Тези доп. – Львів: ІПММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2011. – С. 71–72.
4. Ching H. K., Chen J. K. Thermal stress analysis of functionally graded composites with temperature-dependent material properties // J. Mech. Mater. Struct. – 2007. – **2**, No. 4. – P. 633–653. – <https://doi.org/10.2140/jomms.2007.2.633>.
5. Praveen G. N., Chin C. D., Reddy J. N. Thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal cylinder // J. Eng. Mech. – 1999. – **125**, No. 11. – P. 1259–1267. – [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1999\)125:11\(1259\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:11(1259)).
6. Reddy J. N., Chin C. D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates // J. Therm. Stresses. – 1998. – **21**, No. 6. – P. 593–626. – <https://doi.org/10.1080/01495739808956165>.
7. Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Therm. Stresses. – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102. – <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>.
8. Wang B. L., Mai Y. W. Transient one-dimensional heat conduction problems solved by finite element // Int. J. Mech. Sci. – 2005. – **47**, No. 2. – P. 303–317. – <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2004.11.001>.

STATIC THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR LAYERED FUNCTIONALLY GRADED THERMOSENSITIVE CYLINDER

A method for determining the static thermoelastic state in layered cylinder with functionally graded thermosensitive components taking into account convective-radiant heat exchange under the action of temperature-dependent densities of surface and volumetric heat sources are developed. Finding temperature fields using solutions of auxiliary heat conduction problems is reduced to solving one nonlinear algebraic equation. Deformations and stresses are determined using an approximate analytical solution of the thermoelasticity problem in displacements. The results of numerical investigations are presented.

Key words: layered cylinder, functionally graded thermosensitive materials, convective-radiative heat exchange, thermoelastic state, generalized functions.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
10.04.21