УДК 517.524

Х. Й. Кучмінська[1✉], Р. М. Дейнека[2]

ТРИВИМІРНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ПРАВИЛЬНОГО ВІДПОВІДНОГО C-ДРОБУ

Розглядається один із типів функціональних тривимірних неперервних дробів, відповідних до формального трикратного степеневого ряду, а саме: тривимірні правильні C-дроби. З використанням залишків тривимірного правильного C-дробу, формули різниці між двома наближеннями тривимірного правильного C-дробу у термінах цих залишків і принципу відповідності досліджуються властивості таких дробів. Головні результати полягають у доведенні єдиності і збіжності формального трикратного степеневого ряду, відповідного до тривимірного правильного C-дробу.

Ключові слова: *тривимірний правильний C-дріб, трикратний степеневий ряд, принцип відповідності.*

Вступ. Як зазначено у [3], одним із підходів для зображення голоморфної функції від комплексної змінної $z \in \mathbb{C}$ неперервним дробом є побудова відповідного неперервного дробу для степеневого ряду, тобто дробу, розвинення n-го наближення якого співпадає почленно із заданим степеневим рядом від z до степеня ν_n включно ($\nu_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$). У [3] розглянуто алгоритми розвинення аналітичних функцій у правильні відповідні C-дроби. У 1978-80 рр. запропоновано двовимірні узагальнення таких дробів [4, 15, 16].

Належить сказати, що ідеї узагальнення правильних дробів Стілтьєса (S-дробів) на багатовимірний випадок появилися ще у дисертації M. R. O'Donohoe (M. R. O'Donohoe, Ph. D. Thesis, 1974, Brunel University), однак, подальшого розвитку вони не отримали. Ідеї узагальнення правильних C-дробів на випадок $n \ge 3$ з використанням іншого підходу, запропоновані Х. Й. Кучмінською (ВИНИТИ, №1846-79 Деп. – Москва, 1979. – С. 30–35), розвивалися у роботах [6, 13, 14].

У пропонованій роботі використовується принцип відповідності тривимірного правильного C-дробу до формального трикратного степеневого ряду і методи дослідження властивостей неперервних дробів і їх багатовимірних узагальнень (див., наприклад, [1, 2, 4, 5, 7, 11, 12, 14–16]).

1. Тривимірні правильні неперервні C-дроби.

***1.1.* Означення. Структура дробу.** У роботі використовуємо такі позначення: $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел, $\mathbb{Z}_{\ge 0}$ – множина невід'ємних чисел, $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3_{\ge 0}$, $\mathbb{Z}^3_{\ge 0} = \{k \in \mathbb{Z}^3,\ k_1 \ge 0,\ k_2 \ge 0,\ k_3 \ge 0\}$, $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_3 \in \mathbb{C}$, та для $k \in \mathbb{Z}^3_{\ge 0}$ і $z \in \mathbb{C}^3$ маємо $|k| = k_1 + k_2 + k_3$, $z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3}$. Крім того, позначимо $\bar{0} = (0,0,0)$, $a_{i,i,i} = a_{\bar{i}}$.

Означення 1. Тривимірний неперервний дріб вигляду

$$\frac{a_{\bar{0}}}{1 + F_0(z) + \underset{i=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \dfrac{a_{\bar{i}} z_1 z_2 z_3}{1 + F_i(z)}} \tag{1}$$

або

✉khkuchminska@gmail.com

$$1 + F_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{\bar{i}} z_1 z_2 z_3}{1 + F_i(z)}, \tag{2}$$

де $F_n(z)$ означає суму всіх піддробів у $(n+1)$-му частинному знаменнику, a_{i_1,i_2,i_3} – комплексні числа, $i_s = 0,1,\ldots$, $s = 1,2,3$, $z \in \mathbb{C}^3$, називається *тривимірним правильним неперервним C-дробом* і позначається C_3.

Якщо всі коефіцієнти a_{i_1,i_2,i_3}, $i_s = 0,1,\ldots$, $s = 1,2,3$, дробів (1)/(2) є додатними, $a_{i_1,i_2,i_3} > 0$, тоді дроби (1)/(2) називаються дробами типу Стілтьєса і позначаються S_3.

Кожний частинний знаменник C_3-дробу має шість піддробів. Ці піддроби складаються з суми трьох C-дробів [6]:

$$\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i,i} z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j,i} z_2}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i,i+j} z_3}{1},$$

і суми трьох двовимірних C_2-дробів [7]:

$$\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i+j,i} z_1 z_2}{\Phi_{i+j,i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i,i+j} z_1 z_3}{\Phi_{i+j,i,i+j}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j,i+j} z_2 z_3}{\Phi_{i,i+j,i+j}},$$

де

$$\Phi_{k,k,i} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j,k,i} z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k,k+j,i} z_2}{1},$$

$$\Phi_{k,i,k} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j,i,k} z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k,i,k+j} z_3}{1},$$

$$\Phi_{i,k,k} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,k+j,k} z_2}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,k,k+j} z_3}{1}.$$

Означення 2. Скінченні тривимірні правильні неперервні C-дроби

$$f_n(z) = \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \cfrac{a_{\bar{0}}}{1 + F_0^{(n-1)}(z) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{n-1} \cfrac{a_{\bar{i}} \prod\limits_{k=1}^{3} z_k}{1 + F_i^{(n-1-i)}(z)}} \tag{3}$$

і

$$f_n(z) = \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = 1 + F_0^{(n)}(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{\bar{i}} \prod\limits_{k=1}^{3} z_k}{1 + F_i^{(n-i)}(z)}, \tag{4}$$

де $F_i^{(m)}(z)$, $m = 0,\ldots,n-1,n$, означає суму всіх скінченних піддробів в i-му частинному знаменнику, a_{i_1,i_2,i_3} – комплексні числа, $i_s = 0,1,\ldots$, $s = 1,2,3$, $z \in \mathbb{C}^3$, називається *n-м підхідним дробом тривимірного правильного неперервного C-дробу* (1)/(2) або *n-м наближенням* (1)/(2). Функції $A_n(z)$, $B_n(z)$ називаються чисельником і знаменником n-го наближення або чисельником і знаменником n-го підхідного дробу C-дробів (1)/(2).

Для того щоб знайти різницю між наближеннями C_3-дробів (3)/(4), введемо поняття залишків таких дробів [5].

Означення 3. Скінченні неперервні дроби

$$Q_{i+k,i,i}^{(0)}=1,\ \ Q_{i+k,i,i}^{(m+1)}(z_1)=1+\frac{a_{i+k+1,i,i}z_1}{Q_{i+k+1,i,i}^{(m)}(z_1)},\quad i,m=0,1,\dots,\ \ k=1,2,\dots,$$

$$Q_{i,i+k,i}^{(0)}=1,\quad Q_{i,i+k,i}^{(m+1)}(z_2)=1+\frac{a_{i,i+k+1,i}z_2}{Q_{i,i+k+1,i}^{(m)}(z_2)},\quad i,m=0,1,\dots,\ \ k=1,2,\dots,$$

$$Q_{i,i,i+k}^{(0)}=1,\quad Q_{i,i,i+k}^{(m+1)}(z_3)=1+\frac{a_{i,i,i+k+1}z_3}{Q_{i,i,i+k+1}^{(m)}(z_3)},\quad i,m=0,1,\dots,\ \ k=1,2,\dots, \tag{5}$$

називаються *одновимірними залишками дробу* (3).

Двовимірні неперервні дроби

$$Q_{i+k,i+k,i}^{(0)}=1,\ \ Q_{i+k,i+k,i}^{(m+1)}=1+\frac{a_{i+k+1,i+k+1,i}}{Q_{i+k+1,i+k+1,i}^{(m)}}+\frac{a_{i+k+1,i+k,i}}{Q_{i+k+1,i+k,i}^{(m)}}+\frac{a_{i+k,i+k+1,i}}{Q_{i+k,i+k+1,i}^{(m)}},$$

$$Q_{i+k,i,i+k}^{(0)}=1,\ Q_{i+k,i,i+k}^{(m+1)}=1+\frac{a_{i+k+1,i,i+k+1}}{Q_{i+k+1,i,i+k+1}^{(m)}}+\frac{a_{i+k+1,i,i+k}}{Q_{i+k+1,i,i+k}^{(m)}}+\frac{a_{i+k,i,i+k+1}}{Q_{i+k,i,i+k+1}^{(m)}},$$

$$Q_{i,i+k,i+k}^{(0)}=1,\ \ Q_{i,i+k,i+k}^{(m+1)}=1+\frac{a_{i,i+k+1,i+k+1}}{Q_{i,i+k+1,i+k+1}^{(m)}}+\frac{a_{i,i+k+1,i+k}}{Q_{i,i+k+1,i+k}^{(m)}}+\frac{a_{i,i+k,i+k+1}}{Q_{i,i+k,i+k+1}^{(m)}},$$

$$i,m=0,1,\dots,\quad k=1,2,\dots, \tag{6}$$

називаються *двовимірними залишками дробу* (3), а тривимірний неперервний дріб

$$Q_i^{(0)}=1,$$

$$Q_i^{(m+1)}=1+\frac{a_{i+1,i,i}}{Q_{i+1,i,i}^{(m)}}+\frac{a_{i,i+1,i}}{Q_{i,i+1,i}^{(m)}}+\frac{a_{i,i,i+1}}{Q_{i,i,i+1}^{(m)}}+$$

$$+\frac{a_{i+1,i+1,i}}{Q_{i+1,i+1,i}^{(m)}}+\frac{a_{i+1,i,i+1}}{Q_{i+1,i,i+1}^{(m)}}+\frac{a_{i,i+1,i+1}}{Q_{i,i+1,i+1}^{(m)}}+\frac{a_{i+1,i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(m)}} \tag{7}$$

називається i*-м залишком дробу* (3).

Якщо $Q_j^{(n-1-j)}(z)\neq 0$ для всіх $j=0,1,\dots,n-2$, $n\geq 2$, тоді для всіх $n\geq 1$ і $n>m$ справджується формула різниці між наближеннями C_3-дробу (3):

$$f_n(z)-f_m(z)=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^i\left[F_i^{(m-1-i)}(z)-F_i^{(n-1-i)}(z)\right]a_{\bar 0}\prod_{j=1}^{i}a_{\bar j}}{\prod_{j=0}^{i}Q_j^{(m-1-j)}(z)Q_j^{(n-1-j)}(z)}+$$

$$+\frac{(-1)^m a_{\bar 0}\prod_{j=0}^{m}a_{\bar j}}{Q_m^{(n-1-m)}(z)\prod_{j=0}^{m-1}Q_j^{(m-1-j)}(z)Q_j^{(n-1-j)}(z)}. \tag{8}$$

Використовуючи рекурентні співвідношення для одновимірних (5) і двовимірних залишків (6), можемо записати формулу різниці для $F_i^{(p)} - F_i^{(q)}$, $p > q$ [3, 6].

***Означення 4* [6].** *Тривимірний правильний неперервний* C*-дріб* (1)/(2) *збігається*, якщо існує і є скінченною границя послідовності його наближень $\{f_n(z)\}$. *Значення цієї границі і називається значенням* C_3*-дробу* (1)/(2).

***Означення 5* [6].** *Тривимірний правильний неперервний* C*-дріб* (1)/(2) *є розбіжним,* якщо нескінченне число його наближень не має сенсу або не існує єдиної скінченної границі послідовності його наближень $\{f_n(z)\}$, або $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(z)\} = \infty$.

***Означення 6* [6].** *Тривимірний правильний неперервний* C*-дріб* (1)/(2) *є абсолютно збіжним*, якщо є збіжним ряд, складений з абсолютних величин різниці наближень дробу $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|f_{i+1} - f_i|$.

Означення 7. Якщо елементи правильного неперервного C-дробу (1)/(2) є функціями трьох змінних $z = (z_1, z_2, z_3)$, заданих в області $D \subset \mathbb{C}^3$, тоді C_3-дріб (1)/(2) називається *рівномірно збіжним на множині* $E \subset D$, якщо, починаючи з деякого номера n_0, всюди на E маємо $B_k(z) \neq 0$, $k \geq n_0$, і для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $n_1 \geq n_0$, що для всіх $m, n \geq n_1$ і довільного $z \in E$ виконується нерівність $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$.

***1.2.* Відповідність.** Ряд вигляду

$$P(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(z),$$

де $c_k \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^3$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$; Q_ν – однорідні многочлени степеня ν, називається формальним трикратним степеневим рядом (ФТСР) в точці $z = \bar{0}$. Ряд $P = 0$ також розглядається як ФТСР. Позначивши множину всіх формальних степеневих рядів в околі $z = \bar{0}$ через $\mathbb{P}$ і розглянувши відображення

$$\lambda: \ \mathbb{P} \to \mathbb{N}_0 \cup \infty :$$

$$\lambda(P) = \begin{cases} \infty, & P(z) \equiv 0, \\ s, & P(z) \neq 0, \quad s = |k|, \ c_k \neq 0, \end{cases}$$

запишемо його властивості [3] для довільних рядів $P_1, P_2 \in \mathbb{P}$:

1°) $\lambda(P_1 \cdot P_2) = \lambda(P_1) + \lambda(P_2)$;

2°) $\lambda(P_1 \pm P_2) \geq \min\{\lambda(P_1), \lambda(P_2)\}$;

3°) $\lambda(P_1 \pm P_2) = \min\{\lambda(P_1), \lambda(P_2)\}, \quad \lambda(P_1) \neq \lambda(P_2)$.

Говоримо, що в околі початку координат *послідовність голоморфних* функцій $\{H_n(z)\}$, $z \in \mathbb{C}^3$, *є відповідною* у початку координат до формального потрійного степеневого ряду $P(z)$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(P(z) - T(H_n(z))) = \infty$, де $T(H_n(z))$ – розвинення функції $H_n(z)$ у ряд Тейлора в початку координат.

Якщо послідовність $\{H_n(z)\}$, $z \in \mathbb{C}^3$, є відповідною до формального трикратного степеневого ряду $P(z)$ у початку координат, то порядок відповідності визначається як $\nu_n = \lambda\left(P(z) - T(H_n(z))\right)$ [2].

Розглянемо послідовність $\{R_n(z)\}$ раціональних функцій

$$R_n(z) = \frac{P_m(z)}{Q_\ell(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}^3, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

де $P_m(z)$, $Q_\ell(z)$ – многочлени з комплексними коефіцієнтами степенів $m = m(n)$, $\ell = \ell(n)$ відповідно. Функцію $R_n(z)$ можна розвинути в околі початку координат у формальний трикратний степеневий ряд тоді й тільки тоді, коли $Q_\ell(\bar{0}) \neq 0$.

Говоримо, що послідовність $\{R_n(z)\}$ є відповідною до формального трикратного степеневого ряду в точці $z = \bar{0}$

$$P(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad z \in \mathbb{C}^3, \qquad c_k \in \mathbb{C}, \tag{9}$$

якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\left(P(z) - T(R_n(z))\right) = \infty$, де $T(R_n(z))$ – розвинення в початку координат у ряд Тейлора функції $R_n(z)$.

Означення 8. Тривимірний правильний неперервний C-дріб (1)/(2) *є відповідним у початку координат до формального трикратного степеневого ряду* $P(z)$, якщо послідовність його наближень $\{f_n(z)\}$ є відповідною у початку координат до $P(z)$. Порядок відповідності для наближень (3)/(4) визначається формулою $\nu_n = \lambda\left(P(z) - T(f_n(z))\right)$.

Дослідимо деякі властивості C_3-дробу.

Теорема 1. *Для тривимірного правильного неперервного C-дробу* (1) *існує єдиний формальний трикратний степеневий ряд* (9), *для якого цей C_3-дріб є відповідним з порядком відповідності* $\nu_n = n + 1$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи (7), можемо записати n-не наближення (1) як

$$f_n(z) = \frac{a_{\bar{0}}}{Q_{\bar{0}}^{(n-1)}(z)}. \tag{10}$$

Оскільки $Q_r^{(n-r-1)}(0) = 1$ для довільного r, $0 \le r \le n-1$, $n \ge 1$, і

$$Q_{r+k,r,r}^{(n-r-1)}(0) = 1, \qquad Q_{r,r+k,r}^{(n-r-1)}(0) = 1, \qquad Q_{r,r,r+k}^{(n-r-1)}(0) = 1,$$

$$Q_{r+k,r+k,r}^{(n-r-1)}(0) = 1, \qquad Q_{r+k,r,r+k}^{(n-r-1)}(0) = 1, \qquad Q_{r,r+k,r+k}^{(n-r-1)}(0) = 1,$$

для довільного k, $1 \le k \le n-r-1$, n-не наближення (10) C_3-дробу (1) для кожного $n \ge 1$ є голомофною функцією у точці $z = \bar{0}$. Так що, нехай для кожного $n \ge 1$ трикратний степеневий ряд

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k^{(n)} z^k, \qquad z \in \mathbb{C}^3, \qquad c_k^{(n)} \in \mathbb{C},$$

є формальним розвиненням n-го наближення $f_n(z)$ у точці $z = \bar{0}$.

Дроби

$$\frac{1}{Q^{(n-r-1)}_{r+k,r,r}(z_1)}, \qquad \frac{1}{Q^{(n-r-1)}_{r,r+k,r}(z_2)}, \qquad \frac{1}{Q^{(n-r-1)}_{r,r,r+k}(z_3)}$$

можна формально розвинути у степеневі ряди

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} c^{(n,r,r)}_{k_1,0,0} z_1^{k_1}, \qquad \sum_{k_2=0}^{\infty} c^{(r,n,r)}_{0,k_2,0} z_2^{k_2}, \qquad \sum_{k_3=0}^{\infty} c^{(r,r,n)}_{0,0,k_3} z_3^{k_3},$$

$$c^{(n,r,r)}_{0,0,0} = c^{(r,n,r)}_{0,0,0} c^{(r,r,n)}_{0,0,0} = 1 .$$

Дроби

$$\frac{1}{Q^{(n-r-1)}_{r+k,r+k,r}(z_1,z_2)}, \qquad \frac{1}{Q^{(n-r-1)}_{r+k,r,r+k}(z_1,z_3)}, \qquad \frac{1}{Q^{(n-r-1)}_{r,r+k,r+k}(z_2,z_3)}$$

можна формально розвинути у двократні степеневі ряди

$$\sum_{k_1+k_2=0}^{\infty} c^{(n,n,r)}_{k_1,k_2,0} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \qquad \sum_{k_1+k_3=0}^{\infty} c^{(n,r,n)}_{k_1,0,k_3} z_1^{k_1} z_3^{k_3}, \qquad \sum_{k_2+k_3=0}^{\infty} c^{(r,n,n)}_{0,k_2,k_3} z_2^{k_2} z_3^{k_3},$$

$$c^{(n,n,r)}_{0,0,0} = c^{(n,r,n)}_{0,0,0} c^{(r,n,n)}_{0,0,0} = 1 .$$

Використаємо тепер формулу (8) різниці між двома наближеннями C_3-дробу в деякому околі початку координат:

$$f_m(z) - f_n(z) = \sum_{|k|=n+1}^{\infty} (c^{(m)}_k - c^{(n)}_k) z^k, \qquad m > n .$$

Звідси отримуємо, що для кожного m, $m > n$, та довільного $0 \le |k| \le n$, $k_1 \ge 0$, $k_2 \ge 0$, $k_3 \ge 0$, справджується рівність $c^{(m)}_k = c^{(n)}_k$. C_3-дріб (1) є відповідним до формального трикратного степеневого ряду

$$P(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c^{(|k|+1)}_k z^k ,$$

оскільки

$$P(z) - f_n(z) = \sum_{|k|=n+1}^{\infty} (c^{(|k|+1)}_k - c^{(n)}_k) z^k .$$

Єдиність ряду (9) випливає з однозначного визначення коефіцієнтів розвинення n-го наближення $f_n(z)$ C_3-дробу (1) у формальний трикратний степеневий ряд.

Теорему доведено. ♦

Наступною є теорема про збіжність формального трикратного степеневого ряду, відповідного до C_3-дробу (1).

Теорема 2. *Нехай тривимірний правильний неперервний C-дріб* (1) *є рівномірно збіжним на кожній компактній підмножині деякої обмеженої області $D \subset \mathbb{C}$ (що містить початок координат) до голоморфної функції $f(z)$, $z \in D$. Тоді формальний трикратний степеневий ряд* (9), *відповідний до C_3-дробу* (1), *також збігається в області D до цієї ж функції $f(z)$.*

Д о в е д е н н я. Нехай

$$T(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}^3, \quad c_k \in \mathbb{C} .$$

Позначимо через $T_N(z) = \sum_{|k|=0}^{N} c_k z^k$ частинну суму формального трикратного степеневого ряду (9). Оскільки N-не наближення C_3-дробу (1) $f_N(z)$ є голоморфною функцією, то її можна подати збіжним рядом Тейлора [8]:

$$f_N(z) = T(f_N(z)) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \gamma_k^{(N)} z^k, \qquad \gamma_k^{(N)} = \frac{1}{(2\pi i)^k} \oint_{\Gamma} \frac{f_N(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta)^{k+1}},$$

де $d\zeta = d\zeta_1\, d\zeta_2\, d\zeta_3$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, $(\zeta)^k = \zeta_1^{k_1}\, \zeta_2^{k_2}\, \zeta_3^{k_3}$, $\Gamma = \{z : |z_i| = c,\ i = 1,2,3\}$ – межа полідиска $K = \{z : |z_i| < c,\ i = 1,2,3\}$, $K \subset D$ (див. [8, с. 274]).

Покажемо, що $\lim_{N\to\infty} \sup_{z\in K} |f(z) - T_N(z)| = 0$ для довільного $z \in K \subset D$, де $f(z) = \lim_{N\to\infty} \{f_N(z)\}$. Розглянемо

$$|f(z) - T_N(z)| = |f(z) - f_N(z) + f_N(z) - T_N(z)| \le$$

$$\le |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - T_N(z)|.$$

Послідовність $\{f_N(z)\}$ збігається рівномірно до голоморфної функції $f(z)$ на компактній підмножині $K \subset D$. Тому для довільного додатного ε завжди можна знайти номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх $N > n_0$ і довільного $z \in K$ виконується нерівність $|f(z) - f_N(z)| < \varepsilon/2$.

Тепер покажемо, що послідовність $\{f_N(z) - T_N(z)\} \to 0$ при $N \to \infty$, $z \in K$. Використаємо принцип відповідності [2, 5] і дослідимо відповідність $T_N(z)$ і $T(f_N(z))$, зважаючи на властивості відображення λ:

$$\tau_N = \lambda\big(T_N(z) - T(f_N(z))\big) = \lambda\big(T_N(z) - T(z) + T(z) - T(f_N(z))\big) \ge$$

$$\ge \min\{N+1,\ \lambda\big(T(z) - T(f_N(z))\big)\}.$$

Оскільки $\lim_{N\to\infty} \{\tau_N\} = \infty$ і для довільного k, $|k| > 0$, існує натуральне число ℓ_k таке, що $c_k = \gamma_k^{(\ell)}$ для довільного $\ell \ge \ell_k$. Припустимо, що існує додатне число $\eta^* > 0$ таке, що полідиск $K_1 = \{z : |z_i| < \eta^*,\ i = 1,2,3\}$ з межею $\Gamma_1 = \{z : |z_i| = \eta^*,\ i = 1,2,3\}$ належить до області D. Оскільки послідовність $\{f_N(z)\}$ рівномірно збігається до голоморфної функції $f(z)$ на компактній підмножині K_1 області D, $K_1 \subset K \subset D$, то існують додатні сталі M, $B(K_1)$ такі, що

$$\sup_{z\in K_1} |f_N(z)| \le M$$

для кожного довільного $N \ge B(K_1)$. Оцінимо тепер коефіцієнти c_k. Згідно з нерівностями Коші [8, с. 276] маємо

$$|c_k| = |\gamma_k^{(\ell)}| = \frac{1}{(2\pi)^k} \left| \oint_{\Gamma} \frac{f_\ell(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta)^{k+1}} \right| \le \frac{M}{(\eta^*)^{k+1}} \tag{11}$$

для довільного $\ell > \max\{\ell_k : 0 < |k| \le N\}$.

Далі покажемо, що послідовність $\{T_N(z)\}$ рівномірно обмежена на деякій компактній підмножині $K_2 \subset K_1$, $K_2 = \left\{z : |z_i| \le \frac{\eta^*}{2},\ i = 1,2,3\right\}$:

$$\left|T_N(z)\right| \le \sum_{|k|=0}^{N} \left|c_k z^k\right| \le \sum_{|k|=0}^{N} \left|\gamma_k^{(\ell)} z^k\right| \le M \sum_{|k|=0}^{N} \left|\frac{z}{\eta^*}\right|^k \le M \sum_{r=0}^{N} \frac{(r+1)^3}{2^r}.$$

За ознакою Д'Аламбера, ряд $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)^3}{2^r}$ є збіжним, тому послідовність $\{T_N(z)\}$ рівномірно обмежена на K_2.

Розглядаючи відповідність $\tau_N = \lambda(T_N(z) - T(f_N(z)))$ і враховуючи (11), отримуємо оцінку для довільного $z \in K_2$:

$$\left|T_N(z) - f_N(z)\right| \le \sum_{|k|=\tau_N}^{\infty} \left|(c_k - \gamma_k^{(N)} z^k)\right| \le 2M \sum_{r=\tau_N}^{\infty} \frac{(r+1)^3}{2^r}.$$

Оскільки $\lim\limits_{N\to\infty}\{\tau_N\} = \infty$, послідовність $\{T_N(z)\}$ рівномірно збігається до $f_N(z)$ для довільного $z \in K_2$, і отже, для довільного додатного ε можна знайти таке число $n_1(\varepsilon)$, що для всіх $N > n_1$ і довільного $z \in K_2$ виконується нерівність

$$\left|T_N(z) - f_N(z)\right| < \varepsilon/2.$$

Тому для довільного додатного ε можемо знайти число $N_1(\varepsilon) = \max\{n_0, n_1\}$ таке, що

$$\left|T_N(z) - f(z)\right| < \varepsilon \qquad \text{для всіх} \qquad N > N_1 \qquad \text{і} \qquad z \in K_2.$$

Отже, $\{T_N(z)\}$ рівномірно збігається до $f(z)$ в K_2. З багатовимірного аналогу теореми Стілтьєса – Віталі [1, 2] випливає, що послідовність $\{T_N(z)\}$ – рівномірно збіжна в області D.

Теорему доведено. ♦

2. Зв'язок з наближеннями Паде. Дамо означення наближення Паде у випадку функції від однієї змінної.

***Означення 9* [3].** Раціональна функція

$$R_{m,n}(z) = \frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

де $P_{m,n}(z)$, $Q_{m,n}(z)$ – многочлени, степені яких відповідно дорівнюють m та n, називається $[m,n]$-*наближенням Паде ряду*

$$L(z) = c_0 + c_1 z + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad c_0 \ne 0.$$

***Означення 10* [3].** $[m,n]$-*наближення Паде* називається *нормальним,* якщо $\deg(P_{m,n}(z)) = m$, $\deg(Q_{m,n}(z)) = n$ і

$$\lambda(Q_{m,n}(z)L(z) - P_{m,n}(z)) = m + n + 1.$$

Це означає, що

$$Q_{m,n}(z)L(z) - P_{m,n}(z) = \sum_{k=m+n+1}^{\infty} d_k z^k, \qquad d_{m+n+1} \ne 0.$$

Властивості наближень Паде в одновимірному випадку детально викладено в [3].

Покажемо, як пов'язані наближення C_3-дробу (1)/(2) з наближеннями Паде.

Теорема 3. *Нехай* $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^3$, *− голомофна функція у початку координат. Якщо* $f_n(z) = \dfrac{A_n(z)}{B_n(z)}$ *− n-не наближення C_3-дробу* (1)/(2), *що наближає функцію* $f(z)$, *тоді*:

(***i***) *якщо* $n = 2m - 1$, $m = 1, 2, \ldots$, *тоді* $\dfrac{A_{2m}(z_1, 0, 0)}{B_{2m}(z_1, 0, 0)}$ *−* $[m, m]$*-наближення Паде для функції* $g(z_1) = f(z_1, 0, 0)$; *якщо* $n = 2m - 1$, $m = 1, 2, \ldots$, *тоді* $\dfrac{A_{2m-1}(z_1, 0, 0)}{B_{2m-1}(z_1, 0, 0)}$ *−* $[m, m-1]$*-наближення Паде для функції* $g(z_1) = f(z_1, 0, 0)$;

(***ii***) *якщо* $n = 2m - 1$, $m = 1, 2, \ldots$, *тоді* $\dfrac{A_{2m}(0, z_2, 0)}{B_{2m}(0, z_2, 0)}$ *−* $[m, m]$*-наближення Паде для функції* $g(z_2) = f(0, z_2, 0)$; *якщо* $n = 2m - 1$, $m = 1, 2, \ldots$, *тоді* $\dfrac{A_{2m-1}(0, z_2, 0)}{B_{2m-1}(0, z_2, 0)}$ *−* $[m, m-1]$*-наближення Паде для функції* $g(z_2) = f(0, z_2, 0)$;

(***iii***) *якщо* $n = 2m - 1$, $m = 1, 2, \ldots$, *тоді* $\dfrac{A_{2m}(0, 0, z_3)}{B_{2m}(0, 0, z_3)}$ *−* $[m, m]$*-наближення Паде для функції* $g(z_3) = f(0, 0, z_3)$; *якщо* $n = 2m - 1$, $m = 1, 2, \ldots$, *тоді* $\dfrac{A_{2m-1}(0, 0, z_3)}{B_{2m-1}(0, 0, z_3)}$ *−* $[m, m-1]$*-наближення Паде для функції* $g(z_3) = f(0, 0, z_3)$.

Якщо C_3*-дріб* (1)/(2) *рівномірно збіжний в околі початку координат* $z = \bar{0}$, *тоді його значення збігається до значення* $f(z)$.

Д о в е д е н н я. Нехай функція $f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k$ наближається C_3-дробом (1)/(2) у такий спосіб:

$$B_n(z) f(z) - A_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k z^k, \qquad d_{n+1} \neq 0.$$

Коефіцієнти C_3-дробу (1)/(2) можна знайти, розвиваючи $f(z)$ у відповідний C_3-дріб (див. [6, 13]). Оскільки порядок відповідності дорівнює $\nu_n = n + 1$, то твердження (***i***)−(***iii***) є правильними з огляду на [3]:

$$\deg A_{2m}(z_1, 0, 0) = \deg B_{2m}(z_1, 0, 0) = m,$$

$$\deg A_{2m}(0, z_2, 0) = \deg B_{2m}(0, z_2, 0) = m,$$

$$\deg A_{2m}(0, 0, z_3) = \deg B_{2m}(0, 0, z_3) = m,$$

$$\deg A_{2m-1}(z_1, 0, 0) = m, \qquad \deg B_{2m-1}(z_1, 0, 0) = m - 1,$$

$$\deg A_{2m-1}(0, z_2, 0) = m, \qquad \deg B_{2m-1}(0, z_2, 0) = m - 1,$$

$$\deg A_{2m-1}(0, 0, z_3) = m, \qquad \deg B_{2m-1}(0, 0, z_3) = m - 1.$$

І останнє твердження теореми випливає зі способу наближення.

Теорему доведено. ♦

Властивості C_3-дробу можна використати при подальшому дослідженні збіжності багатовимірних функціональних правильних і приєднаних неперервних дробів, а також у техніці, зокрема, застосувати при градуюванні сенсорів магнітного потоку [10] для електромагнітних засобів неруйнівного контролю.

1. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. *Гоєнко Н.* Принцип відповідності та збіжність послідовностей аналітичних функцій багатьох змінних // Мат. вісн. НТШ. – 2007. – **4**. – С. 42–48.
3. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
   Те саме: *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – xxii + 428 p. – Encyclopedia of Mathematics and its Applications / Ed. G.-C. Rota. – Vol. 11.
4. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 613–617.
5. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с
6. *Кучмінська Х. Й.* Про теорему Слєшинського – Прінґсгейма для тривимірного узагальнення неперервного дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62,** № 4. – С. 60–71.
7. *Кучмінська Х. Й., Возна С. М.* Розвинення N-кратного степеневого ряду в N-вимірний правильний C-дріб // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 3. – С. 70–75.
   Те саме: *Kuchminska Kh. Yo., Vozna S. M.* Development of an ***N***-multiple power series into an ***N***-dimensional regular ***C***-fraction // J. Math. Sci. – 2020. – **246**, No. 2. – P. 201–208.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-020-04730-3.
8. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – Москва:Наука,1969. – 576 с.
9. *Cuyt A. A. M., Petersen V. B., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B.* Handbook of continued fractions for special functions. – New York etc.: Springer, 2008. – xvi+431 p. – https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6949-9.
10. *Deyneka R., Tykhan M., Markina O.* Non-destructive testing of ferromagnetic materials using hand inductive sensor // Arch. Mater. Sci. Eng. – 2019. – **1**, No. 98. – P. 32–41.
    – DOI: 10.5604/01.3001.0013.3392.
11. *Dmytryshyn R. I.* Multidimensional regular *C*-fraction with independent variables corresponding to formal multiple power series // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **A**. – 2020. – **150**, No. 4. – P. 1853–1870.
    – https://doi.org/10.1017/prm.2019.2.
12. *Komatsu T.* Branched continued fractions associated with Hosoya index of the tree grap // MATCH Commun. Math. Comput. Chem. – 2020. – **84**, No. 2. – P. 399–428.
13. *Kuchminska Kh.* Corresponding N-dimensional continued fractions for N-multiple power series // Voronoï's Impact on Modern Science: Proc. 6th Int. Conf. on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations / Jörn Steuding and M. Pratsiovytyi (Eds). – Kyiv: National Pedagog. Drahomanov Univ. Publ., 2018. – Vol. 1. – P. 169–176.
14. *Kuchminskaya K., Siemaszko W.* Rational approximation and interpolation of functions by branched continued fractions // Lect. Notes Math. – Berlin, etc.: Springer, 1987. – **1237**. – P. 24–40. – Rational Approximation and its Applications in Mathematics and Physics / J. Gilewicz, M. Pindor, W. Siemaszko (Eds). – 368 p.
15. *Murphy J. A., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comput. Appl. Math. – 1978. – **4**, No. 3. – P. 181–190.
    – https://doi.org/10.1016/0771-050X(78)90002-5.
16. *Siemaszko W.* Branched continued fractions for double power series // J. Comput. Appl. Math. – 1980. – **6**, No. 2. – P. 121–125.
    – doi:10.1016/0771-050x(80)90005-4.

THREE-DIMENSIONAL GENERALIZATION OF REGULAR CORRESPONDING C -FRACTION

One of the types of functional three-dimensional continued fractions corresponding to the formal triple power series, namely three-dimensional regular C-fractions, is considered. Using remainders of a three-dimensional regular C-fraction, a difference formula between two approximants of the three-dimensional regular C-fraction in terms of these remainders, and the correspondence principle, properties of such fractions are investigated. The main results consist in the proof of uniqueness and convergence of formal triple power series corresponding to the three-dimensional regular C-fractions.

Key words: *three-dimensional regular C-fraction, triple power series, correspondence principle.*

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
09.08.21