

ТЕПЛОВИЙ СТАН ТЕРМОЧУТЛИВОЇ ТРИБОСИСТЕМИ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Апробований на задачах теплопровідності для термочутливих ідеально контактуючих тіл аналітично-числовий підхід поширено на аналогічні нелінійні задачі за фрикційного нагрівання. Підхід ґрунтується на застосуванні перетворення Кірхгофа, варіанта методу послідовних наближень, інтегрального перетворення Лапласа та його обернення за формулою Пруднікова. З його використанням розв'язано задачі для трибосистеми, що складається з контактуючих термочутливих півпросторів або півпростору та шару, за конвективно-променевого теплообміну. Розглянуто випадок довільного характеру зміни теплових характеристик. На основі побудованих розв'язків досліджено тепловий стан відповідних термочутливих кусково-однорідних структур за фрикційного нагрівання.

Ключові слова: тепловий стан, нелінійна задача теплопровідності, термочутливі півпростір і шар, фрикційне нагрівання, перетворення Лапласа, формула Пруднікова, метод послідовних наближень.

Сучасні дослідження термопружної поведінки елементів конструкцій ґрунтуються на складних математичних моделях через підвищені вимоги врахування багатьох факторів, що впливають на точність розрахунків. Це приводить до необхідності розробки нових або розвитку існуючих підходів до розв'язування такого класу задач. Особливою популярністю у дослідників, що займаються вирішенням таких завдань, користуються числові [4, 5, 12] або аналітично-числові методи [6–8, 10, 17, 18, 20, 21]. Кожен з методів має свої переваги чи недоліки, вони можуть слугувати один для одного критерієм для перевірки достовірності отриманих результатів, тому їх розвиток продовжується, а використання на практиці залежить від уподобань дослідників і конкретних завдань, що стоять перед ними.

У цій роботі розвинуто запропонований раніше аналітично-числовий підхід, що ґрунтується на використанні методів послідовних наближень, інтегрального перетворення Лапласа та його обернення за адаптованою формулою Пруднікова, до розв'язування задач теплопровідності термочутливих тіл за фрикційного нагрівання. Цей підхід був апробований на ряді задач теплопровідності для термочутливих тіл простої геометрії [14–16, 19] та ідеально контактуючих тіл [1–3, 13] за складного теплообміну. У запропонованій роботі його застосовано до знаходження температурного поля для термочутливих тіл за неідеального контакту внаслідок дії сил тертя. У науковій літературі знаходимо як різні формулювання фрикційних умов, так і різні підходи до розв'язування таких задач. Особливо багато праць стосовно цієї проблематики належать Євтушенку О. О. та його учням [7, 8]. На відміну від їхніх досліджень, де розглянуто термочутливі тіла з простою нелінійністю, використання запропонованого підходу дозволило розв'язати аналогічні задачі без накладання обмежень на характер зміни теплових характеристик матеріалів контактуючих тіл.

1. Формулювання задачі. Визначимо нестационарні температурні поля t_1 , t_2 термочутливих складових трибосистеми, якими можуть бути два півпростори або шар і півпростір, що стискаються відповідно на безмежності або на поверхні зусиллями сталої інтенсивності p , прикладеними паралельно до осі Oz . У початковий момент часу $\tau = 0$ верхня складова структури починає рухатись у додатному напрямку осі Oy зі сталою швидкістю

[✉]dept19@iapmm.lviv.ua

v по поверхні півпростору. Внаслідок тертя на поверхні контакту $z = 0$ генерується тепло, і трибосистема нагрівається. Вважаємо, що тіла мають однакові початкові розподіли температур t_p , а тепловий контакт тіл є недосконалим – через поверхню тертя між ними відбувається теплообмін зі сталим коефіцієнтом термічної провідності h , сума інтенсивностей теплових потоків, спрямованих усередину кожного зі співдотичних тіл уздовж нормалі до поверхні контакту, дорівнює питомій потужності тертя $q = fvr$, де f – коефіцієнт тертя [7]. Зношуванням поверхонь контактуючих тіл нехтуємо.

Нестационарні температурні поля складових трибосистеми за таких умов, визначаємо з рівнянь теплопровідності [7, 8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \right) &= c_v^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial \tau}, & 0 < z < z_0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} \right) &= c_v^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial \tau}, & z < 0, \end{aligned} \quad (1)$$

за початкових

$$t_i|_{\tau=0} = t_p, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

і крайових умов

$$\left\{ \lambda_t(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} + \alpha(t_1 - t_c) + \sigma \varepsilon (t_1^4 - t_c^4) \right\} \Big|_{z=z_0} = 0, \quad (3)$$

$$\left[\lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} - \lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} = q, \quad (4)$$

$$\left[\lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} + \lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} = h[t_1 - t_2] \Big|_{z=0}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad t_2 \Big|_{z \rightarrow -\infty} = t_p, \quad (6)$$

де $\lambda_t^{(i)}(t_i)$, $c_v^{(i)}(t_i)$, $i = 1, 2$, – залежні від температури коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності матеріалів складових трибосистеми відповідно; α – коефіцієнт теплообміну через поверхню контакту $z = z_0$; ε – ступінь чорноти; σ – стала Стефана – Больцмана; t_c – температура зовнішнього середовища, $t_c = \text{const}$, $z > z_0$.

У випадку двох півпросторів $z_0 \rightarrow +\infty$, а коефіцієнти $\alpha \rightarrow 0$ та $\varepsilon \rightarrow 0$, тому замість умови (3) матимемо умову, аналогічну до (6):

$$\frac{\partial t_1}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow +\infty} = 0, \quad t_1 \Big|_{z \rightarrow +\infty} = t_p, \quad (3^*)$$

2. Побудова розв'язку. Згідно з аналітично-числовим підходом до розв'язування нелінійних задач теплопровідності для термочутливих тіл, описаним і застосованим у роботі [3], розв'язування сформульованої задачі теплопровідності проводимо за такою схемою.

1°. Зведення задачі (1)–(6) до безрозмірного вигляду. Нехай t_0 – відлікове значення температури, а z_0 – характерний розмір. Введемо безрозмірні температури $T_j = \frac{t_j}{t_0}$, координату $\bar{z} = \frac{z}{z_0}$ і запишемо характеристики

матеріалів у вигляді добутку розмірної величини на безрозмірну функцію відповідної характеристики від безрозмірної температури $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$. Тоді задача (1)–(6) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}} \right) &= c_v^{(1)*}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}}, & 0 < \bar{z} < \bar{z}_0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}} \right) &= c_v^{(2)*}(T_2) K_a \frac{\partial T_2}{\partial \text{Fo}}, & \bar{z} < 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$T_j \Big|_{\text{Fo}=0} = T_p \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

$$\left[\lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}} + \text{Bi}_1(T_1 - T_c) + \text{Sk}(T_1^4 - T_c^4) \right] \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_0} = 0, \quad (9)$$

$$\left[K_\lambda \lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}} - \lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}} \right] \Big|_{\bar{z}=0} = q(\text{Fo}), \quad (10)$$

$$\left[K_\lambda \lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}} + \lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}} \right] \Big|_{\bar{z}=0} = \text{Bi}_2[T_1 - T_2] \Big|_{\bar{z}=0}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad T_2 \Big|_{z \rightarrow -\infty} = T_p, \quad (12)$$

де $\bar{z} = \frac{z}{z_0}$, $T_i = \frac{t_i}{t_0}$, $T_{p,c} = \frac{t_{p,c}}{t_0}$, $\text{Fo} = \frac{a_0^{(1)} \tau}{z_0^2}$, $K_a = \frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(2)}}$, $a_0^{(j)} = \frac{\lambda_{t0}^{(j)}}{c_{v0}^{(j)}}$, $K_\lambda = \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(1)}}$,

$\text{Bi}_1 = \frac{\alpha z_0}{\lambda_{t0}^{(1)}}$, $\text{Bi}_2 = \frac{h z_0}{\lambda_{t0}^{(1)}}$, $\text{Sk} = \frac{\sigma \varepsilon t_0^3}{\lambda_{t0}^{(1)}}$, $\bar{z}_0 = 1$.

Для випадку півпросторів $\bar{z}_0 \rightarrow +\infty$ критерії $\text{Bi}_1 \rightarrow 0$ та $\text{Sk} \rightarrow 0$, тому замість умови (9) маємо

$$\frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z} \rightarrow +\infty} = 0, \quad T_1 \Big|_{z \rightarrow +\infty} = T_p, \quad (9^*)$$

2°. Застосування до задачі (7)–(12) інтегральних перетворень Кірхгофа

$$\theta_j = \int_{T_p}^{T_j} \lambda_t^{(j)*}(T) dT. \quad (13)$$

В результаті отримаємо крайову задачу відносно змінних θ_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \bar{z}^2} &= a_1^*(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial \text{Fo}}, & 0 < \bar{z} < \bar{z}_0, \\ \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{z}^2} &= K_a a_2^*(\theta_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial \text{Fo}}, & \bar{z} < 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\theta_j \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (15)$$

$$\left[\frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} + \text{Bi}_1(T(\theta_1) - T_c) + \text{Sk}(T^4(\theta_1) - T_c^4) \right] \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_0} = 0, \quad (16)$$

$$\left[K_\lambda \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} \right] \Big|_{\bar{z}=0} = q(\text{Fo}), \quad (17)$$

$$\left[K_\lambda \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} \right] \Big|_{\bar{z}=0} = \text{Bi}_2(T_1(\theta_1(0, \text{Fo})) - T_2(\theta_2(0, \text{Fo}))), \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad \theta_2 \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad (19)$$

$$\text{де } a_j^*(T_j(\theta_j)) = \frac{c_v^{(j)*}(T_j(\theta_j))}{\lambda_t^{(j)*}(T_j(\theta_j))}.$$

Для півпросторів замість умови (16) маємо

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z} \rightarrow +\infty} = 0, \quad \theta_1 \Big|_{\bar{z} \rightarrow +\infty} = 0. \quad (16^*)$$

3°. Лінеаризація задачі (14)–(19) за допомогою варіанта методу послідовних наближень [14–16]. Запишемо m -те наближення задачі відносно змінних Кірхгофа для нашого випадку у вигляді

$$\frac{\partial^2 \theta_{1,m}}{\partial \bar{z}^2} = K_{m-1}^{(1)} \frac{\partial \theta_{1,m}}{\partial \text{Fo}}, \quad 0 < \bar{z} < \bar{z}_0,$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{2,m}}{\partial \bar{z}^2} = K_{m-1}^{(2)} \frac{\partial \theta_{2,m}}{\partial \text{Fo}}, \quad \bar{z} < 0, \quad (20)$$

$$\theta_{j,m} \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (21)$$

$$\left[\frac{\partial \theta_{1,m}}{\partial \bar{z}} + \text{Bi}_{1,m}(\theta_{1,m} - \theta_c) \right] \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_0} = 0, \quad (22)$$

$$\left[K_\lambda \frac{\partial \theta_{2,m}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \theta_{1,m}}{\partial \bar{z}} \right] \Big|_{\bar{z}=0} = q(\text{Fo}), \quad (23)$$

$$\left[K_\lambda \frac{\partial \theta_{2,m}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \theta_{1,m}}{\partial \bar{z}} \right] \Big|_{\bar{z}=0} = \text{Bi}_{2,m}(\theta_{1,m}(0, \text{Fo}) - \theta_{2,m}(0, \text{Fo})), \quad (24)$$

$$\frac{\partial \theta_{2,m}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad \theta_{2,m} \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad (25)$$

де

$$\text{Bi}_{1,m} = [\text{Bi}_1(T_{1,m-1}(\theta_{1,m-1}(1, \text{Fo})) - T_c) + \text{Sk}(T_{1,m-1}^4(\theta_{1,m-1}(1, \text{Fo})) - T_c^4)] \times \\ \times (\theta_{1,m-1}(1, \text{Fo}) - \theta_c)^{-1},$$

$$\text{Bi}_{2,m} = [\text{Bi}_2(T_{1,m-1}(\theta_{1,m}(0, \text{Fo})) - T_{2,m-1}(\theta_{2,m}(0, \text{Fo})))] \times \\ \times (\theta_{1,m-1}(0, \text{Fo}) - \theta_{2,m-1}(0, \text{Fo}))^{-1},$$

$$K_{m-1}^{(1)} = a_1^*(T_{1,m-1}(\theta_{1,m-1})), \quad K_{m-1}^{(2)} = K_a a_2^*(T_{2,m-1}(\theta_{2,m-1})), \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$\theta_c = \int_{T_p}^{T_c} \lambda_t^*(T) dT.$$

За початкове наближення виберемо розв'язок задачі за $K_1^{(1)} = 1$, $K_1^{(2)} = K_a$, $\text{Bi}_{1,1} = \text{Bi}_1$, $\text{Bi}_{2,1} = \text{Bi}_2$.

Зауважимо, що в задачі для двох півпросторів $\text{Bi}_{1,m} = 0$.

Отже, використання методу послідовних наближень передбачає розв'язування послідовності лінійних задач відносно змінних Кірхгофа з наперед заданою точністю з уточненими на попередньому кроці величинами.

4°. Застосування інтегрального перетворення Лапласа за часом. Для знаходження розв'язку лінійної крайової задачі вигляду (20)–(25) скористаємось інтегральним перетворенням Лапласа за часом $\tilde{\theta}_{j,m} = \int_0^{\infty} \theta_{j,m} e^{-sFo} dFo$,

де s – параметр перетворення Лапласа. В результаті отримаємо задачу стосовно трансформант Лапласа змінних Кірхгофа:

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_{1,m}}{d\bar{z}^2} = sK_{m-1}^{(1)} \tilde{\theta}_{1,m}, \quad 0 < \bar{z} < \bar{z}_0,$$

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_{2,m}}{d\bar{z}^2} = sK_{m-1}^{(2)} \tilde{\theta}_{2,m}, \quad \bar{z} < 0, \quad (26)$$

$$\left[\frac{d\tilde{\theta}_{1,m}}{d\bar{z}} + \text{Bi}_{1,m} \left(\tilde{\theta}_{1,m} - \frac{\theta_c}{s} \right) \right] \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_0} = 0, \quad (27)$$

$$\left[K_\lambda \frac{d\tilde{\theta}_{2,m}}{d\bar{z}} - \frac{d\tilde{\theta}_{1,m}}{d\bar{z}} \right] \Big|_{\bar{z}=0} = \tilde{q}, \quad (28)$$

$$\left[K_\lambda \frac{d\tilde{\theta}_{2,m}}{d\bar{z}} + \frac{d\tilde{\theta}_{1,m}}{d\bar{z}} \right] \Big|_{\bar{z}=0} = \text{Bi}_{2,m} (\tilde{\theta}_{1,m}(0, Fo) - \tilde{\theta}_{2,m}(0, Fo)), \quad (29)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_{2,m}}{d\bar{z}} \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad \tilde{\theta}_{2,m} \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0. \quad (30)$$

Загальний розв'язок рівнянь (26) має вигляд

$$\tilde{\theta}_{j,m} = C_{1,m}^j e^{\bar{z} \sqrt{sK_{m-1}^{(j)}}} + C_{2,m}^j e^{-\bar{z} \sqrt{sK_{m-1}^{(j)}}}, \quad j = 1, 2.$$

Сталі інтегрування, визначені з умов (27)–(29), матимуть вигляд

$$C_{1,m}^1 = \frac{1}{G} \left(\frac{\theta_c}{s} \text{Bi}_{1,m} + F C_{2,m}^1 \right),$$

$$C_{1,m}^2 = - \frac{1}{K_\lambda \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} \left(\tilde{q} + \sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} \left(\frac{F}{G} - 1 \right) C_{2,m}^1 + \frac{\text{Bi}_{1,m} \theta_c F}{sG} \right),$$

$$C_{2,m}^1 = \left[\tilde{q} \left(\frac{\text{Bi}_{2,m}}{K_\lambda \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} - 1 \right) - \frac{\text{Bi}_{1,m} \theta_c}{sG} \left(1 + \sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} - \text{Bi}_{2,m} \left(1 - \frac{\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}}{K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}}} \right) \right) \right] \times$$

$$\times \left[2\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} \left(\frac{F}{G} - 1 \right) - \text{Bi}_{2,m} \left(\frac{F}{G} + 1 + \frac{\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}}{K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}}} \left(\frac{F}{G} - 1 \right) \right) \right]^{-1},$$

$$\text{де } F = e^{-\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} \left(\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} - \text{Bi}_{1,m} \right), \quad G = e^{\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} \left(\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} + \text{Bi}_{1,m} \right).$$

Коли на поверхні *кусково-однорідного півпростору* задано температуру (умова першого роду), то для сталі інтегрування, визначених з відповідних крайових умов, отримаємо такі вирази:

$$\begin{aligned} C_{1,m}^1 &= \frac{\theta_c}{s} e^{-\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} - e^{-2\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} C_{2,m}^1, \\ C_{2,m}^1 &= \left[\frac{A}{K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}}} \left(\frac{1}{s\sqrt{s}} + \frac{\theta_c}{s} \sqrt{K_{m-1}^{(1)}} e^{-\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} \right) - \frac{B\theta_c}{s} e^{-\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{A\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}}{K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}}} \left(e^{-2\sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} + 1 \right) - B e^{-2\sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} - D \right]^{-1}, \\ C_{1,m}^2 &= \left[\frac{1}{s\sqrt{s}} + \sqrt{K_{m-1}^{(1)}} \left(\frac{\theta_c}{s} e^{-\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} - e^{-2\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} C_{2,m}^1 \right) - \sqrt{K_{m-1}^{(1)}} C_{2,m}^1 \right] \times \\ &\quad \times \left[-K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\text{де } A = K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} + \frac{\text{Bi}_{2,m}}{\sqrt{s}}, \quad B = \sqrt{K_{m-1}^{(1)}} - \frac{\text{Bi}_{2,m}}{\sqrt{s}}, \quad D = \sqrt{K_{m-1}^{(1)}} + \frac{\text{Bi}_{2,m}}{\sqrt{s}}.$$

Зазначимо, що у випадку трибосистеми з двох півпросторів після використання умов на безмежності загальний розв'язок рівнянь (26) запишемо так:

$$\tilde{\theta}_{j,m} = C_{1,m}^j e^{(-1)^j \bar{z} \sqrt{sK_{m-1}^{(j)}}}, \quad j = \begin{cases} 1, & \bar{z} > 0, \\ 2, & \bar{z} < 0. \end{cases}$$

І тоді сталі інтегрування, визначені з умов (28), (29), матимуть вигляд

$$\begin{aligned} C_{1,m}^1 &= \frac{1}{s\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}} - \frac{K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}}}{\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}} \left(\frac{\text{Bi}_{2,m}}{s^2 \sqrt{K_{m-1}^{(1)}}} + \frac{1}{s\sqrt{s}} \right) \times \\ &\quad \times \left(2K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} + \frac{\text{Bi}_{2,m} K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}}}{\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}} + \frac{\text{Bi}_{2,m}}{\sqrt{s}} \right)^{-1}, \\ C_{1,m}^2 &= \left(\frac{\text{Bi}_{2,m}}{s^2 \sqrt{K_{m-1}^{(1)}}} + \frac{1}{s\sqrt{s}} \right) \left(2K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} + \frac{\text{Bi}_{2,m} K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}}}{\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}} + \frac{\text{Bi}_{2,m}}{\sqrt{s}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

5°. Застосування числового обернення перетворення Лапласа. За отриманими трансформантами оригінали змінних Кірхгофа знаходимо за формулою Пруднікова [2, 9].

6°. Обчислення температури. Температуру визначаємо оберненням перетворення Кірхгофа для конкретних залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури. Для числових досліджень вибираємо матеріали з лінійними залежностями коефіцієнтів теплопровідності від температури ($\lambda_t^{(j)*}(T_j) = 1 + k_j(T_j - T_p)$). У цьому випадку формули для обчислення просторово-часових розподілів температури мають вигляд

$$T_{j,m}(\text{Fo}, \bar{z}, \mathbf{x}) = k_j^{-1} \left(\sqrt{1 + 2k_j \theta_{j,m}(\text{Fo}, \bar{z}, \mathbf{x})} - 1 \right) + T_p, \quad k_j = \text{const}.$$

3. Числові дослідження проведено для трибосистеми, складові якої виготовлено з окису цирконію (шар, $j = 1$) і титанового сплаву (півпростір, $j = 2$). Подання теплофізичних характеристик цих матеріалів у вигляді добутку розмірної величини на функцію від безрозмірної температури наведено в роботі [13]. Достовірність і точність наближених розв'язків перевірено для випадку, коли на поверхні шару $z = z_0$ задано сталу температуру T_c . Значення температури в точці $z = z_0$, обчислені із застосуванням запропонованого підходу, порівняли із заданими значеннями. Результати порівняння наведено в табл. 1, табл. 2 для різних значень параметрів ℓ , c (вибір параметрів c і ℓ докладно проаналізовано у [9, 20]).

В обчисленнях безрозмірну температуру середовища T_c вважали постійною: $T_c = 1$ або $T_c = 0.8$.

Наближені значення температури T_1^{ap} на поверхні шару для різних значень ℓ , наведені в табл. 1, обчислено за фіксованого значення параметра $c = 5$ у момент часу $Fo = 0.7$ фрикційного нагріву для значення $Bi_2 = 0.2$. У табл. 2 подано аналогічні дані для температури T_1^{ap} на поверхні шару для різних значень c при $\ell = 2.5$ (при оптимально вибраних значеннях параметрів c і ℓ максимальна похибка не перевищує 0.6%).

Таблиця 1

ℓ	1.0	1.3	1.7	2.0	2.5	3.0	3.5
$T_1^{\text{ap}}(T_c = 1)$	0.9577	0.9643	0.9889	0.986	0.9779	0.9670	0.9599
$T_1^{\text{ap}}(T_c = 0.8)$	0.7690	0.7848	0.8001	0.7997	0.7899	0.7643	0.7813

Таблиця 2

c	2	3	4	5	6	7	8
$T_1^{\text{ap}}(T_c = 1)$	0.849	0.93	0.97	0.9779	0.9	0.968	0.966
$T_1^{\text{ap}}(T_c = 0.8)$	0.725	0.8333	0.8253	0.7899	0.80017	0.7981	0.7874

Дослідження розподілів температури для співдотичних півпросторів наведено на рис. 1, а для півпростору та шару – на рис. 2.

На рис. 1 зображено графіки залежностей від координати z розподілів температурного поля для випадку фрикційного нагріву півпросторів у різні моменти часу $Fo = 0.1, 0.3, 0.5$ та для різних значень критерію Bi_0 . Суцільні криві відповідають значенню $Bi_2 = 0.2$, а штрихові – $Bi_2 = 0.9$.

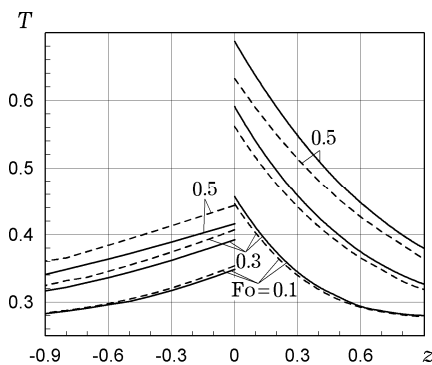


Рис. 1. Розподіли температури в півпросторах.

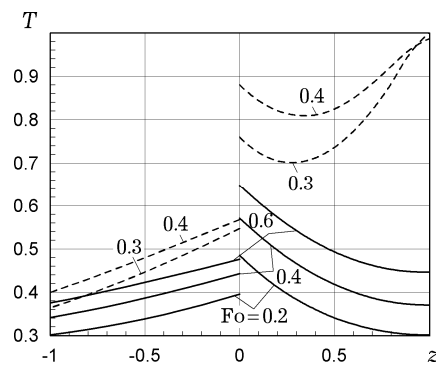


Рис. 2. Розподіли температури в півпросторі та шарі.

На рис. 2 для випадку фрикційного нагріву зображено залежності від координати розподілів температури в півпросторі та шарі в моменти часу $Fo = 0.2, 0.3, 0.4, 0.6$ за складного теплообміну. Розглянуто випадки, коли на поверхні шару задано сталу температуру (штрихові криві) або за конвективно-променевого теплообміну із зовнішнім середовищем (суцільні криві) та з урахуванням фрикційного теплоутворення внаслідок руху шару по поверхні півпростору. Наведені на рис. 2 розподіли температур обчислено для таких значень критеріїв: $Bi_1 = 0.1$, $Bi_2 = 0.1$, $Sk = 0.1$ і значень параметрів $\ell = 1.7$, $c = 6$.

Відмітимо швидко збіжність ітераційних процесів як для півпросторів, так і для півпростору та шару: максимальна кількість ітерацій дорівнює 8.

Аналіз числових досліджень, проілюстрованих на рис. 1, рис. 2, дозволяє зробити висновок про отримання фізично очікуваних результатів: стрибок температур на поверхні контакту взаємодіючих тіл (півпросторів чи півпростору та шару) внаслідок дії сил тертя, величина якого залежить від значення термоопору поверхні контакту, який у безрозмірних величинах описується відповідним критерієм Біо, та певного значення температури на поверхні, зумовленого заданням відповідної крайової умови.

Висновки. Аналітично-числовий підхід, апробований на задачах теплопровідності для термочутливих ідеально контактуючих тіл, поширено на задачі з фрикційним нагріванням, що суттєво розширило межі його застосування. Використання запропонованого підходу дозволило зняти обмеження щодо простої нелінійності матеріалів контактуючих термочутливих тіл та умови їх ідеального контакту. Підхід апробовано на задачах теплопровідності для термочутливої трибосистеми, складовими якої є два півпростори або шар і півпростір. Точність отриманого наближеного розв'язку встановлено в частковому випадку через порівняння його значення на поверхні шару із заданою за умовою температурою в цій точці. За оптимально підібраних значень параметрів ℓ та c , вибором яких коригується точність формули Пруднікова, розбіжність не перевищувала 0.6%.

Досліджено тепловий стан термочутливої трибосистеми, складові якої виготовлені з титанового сплаву та окису цирконію за фрикційного, а у випадку кусково-однорідного півпростору – ще й конвективно-променевого нагрівання. Отримані результати планується використати в дослідженнях квазістатичного термочутливого стану кусково-однорідних термочутливих структур за складного теплообміну включно з фрикційним.

1. *Вовк О.* Використання числового обернення перетворення Лапласа в задачах теплопровідності контактуючих термочутливих тіл // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 129–136.
2. *Вовк О. М., Соляр Т. Я.* Термопружний стан контактуючих термочутливих півпростору та шару // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 4. – С. 78–87.
Te same: *Vovk O. M., Solyar T. Y.* Thermoelastic state of contacting thermally sensitive half space and thermally sensitive layer // J. Math. Sci. – 2021. – **256**, No. 4. – P. 455–466. – <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05438-8>.
3. *Вовк О. М., Соляр Т. Я.* Термопружний стан контактуючих термочутливих півпростору та шару за складного теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 3. – С. 113–122.
4. *Гарматій Г. Ю.* Чисельне визначення неусталеного теплового стану тришарового порожнистого термочутливого циліндра за умов складного теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 2. – С. 129–135.
5. *Гарт Э. Л., Гудрамович В. С.* Применение проекционно-итерационной схемы метода локальных вариаций к решению задач устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций при локализованных воздействиях // Проблемы прочности. – 2018. – № 6. – С. 29–37.
Te same: *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Application of the projection-iterative scheme of the method of local variations to solving stability problems for thin-walled shell structures under localized actions // Strength Mater. – 2018. – **50**,

- № 6. – P. 852–858. – <https://doi.org/10.1007/s11223-019-00031-6>.
6. Горечко Н. О., Кушнір Р. М. Розрахунок неусталеного термопружного стану трибосистеми під час гальмування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 5. – С. 81–86.
Te same: *Horechko N. O., Kushnir R. M.* Analysis of the nonstationary thermoelastic state of a tribosystem in the process of braking // *Mater. Sci.* – 2006. – **42**, No. 5. – P. 665–672.
 7. Євтушенко О., Куцєй М., Ох Е. Вплив термочутливості матеріалів на температуру під час тертя // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 1. – С. 117–122.
Te same: *Evtushenko O., Kuciej M., Och E.* Effect of the heat sensitivity of materials on temperature in the course of friction // *Mater. Sci.* – 2014. – **50**, No. 1. – P. 126–134. – <https://doi.org/10.1007/s11003-014-9700-0>.
 8. Євтушенко О., Куцєй М., Ох Е. Моделювання температурного режиму гальмівної системи з урахуванням термочутливості матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 3. – С. 77–83.
Te same: *Evtushenko O., Kuciej M., Och E.* Modeling of temperature conditions for a braking system with regard for the heat sensitivity of materials // *Mater. Sci.* – 2014. – **50**, No. 3. – P. 397–405. – <https://doi.org/10.1007/s11003-014-9732-5>.
 9. Кушнір Р. М., Максимович В. М., Соляр Т. Я. Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 2. – С. 18–26.
Te same: *Kushnir R. M., Maksymovych V. M., Solyar T. Ya.* Determination of nonstationary temperatures with the help of improved formulas of the inverse Laplace transformation // *Mater. Sci.* – 2002. – **38**, No. 2. – P. 172–184. – <https://doi.org/10.1023/A:1020929818010>.
 10. Кушнір Р. М., Махоркін І. М., Махоркін М. І. Аналітично-числове визначення статичного термопружного стану плоских багатошарових термочутливих структур // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2019. – **62**, № 4. – С. 131–140.
 11. Кушнір Р. М., Попович В. С. Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Споллом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
 12. Неспляк Д. М., Муха І. С. Дослідження процесів нелінійної теплопровідності у товстостінних складених тілах // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, № 2. – С. 176–182.
 13. Попович В., Вовк О. Дослідження термопружного стану контактуючих термочутливих півпросторів з тепловиділеннями на межі дотику // *Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту.* – 2014. – **74**, № 2. – С. 38–47.
 14. Попович В., Вовк О. Дослідження ефективності застосування варіантів методу послідовних наближень на прикладі стаціонарної задачі теплопровідності для порожнистої кулі // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика.* – 2013. – Вип. 19. – С. 21–27.
 15. Попович В., Вовк О. Дослідження статичного термопружного стану термочутливого нескінченного шару за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2013. – Вип. 17. – С. 146–155.
 16. Попович В. С., Вовк О. М., Гарматій Г. Ю. Дослідження статичного термопружного стану термочутливого порожнистого циліндра за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2011. – **54**, № 4. – С. 151–158.
Te same: *Popovych V. S., Vovk O. M., Harmatii H. Yu.* Investigation of the static thermoelastic state of a thermosensitive hollow cylinder under convective-radiant heat exchange with environment // *J. Math. Sci.* – 2012. – **187**, No. 6. – P. 726–736. – <https://doi.org/10.1007/s10958-012-1097-4>.
 17. Процюк Б. В. Статичні задачі термопружності для шаруватого функціонально-градієнтного термочутливого циліндра // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2021. – **64**, № 2. – С. 70–81.
 18. Hachkevych O., Terlets'kyi R., Turii O. The formulation and development of methods of solving thermomechanics problems for irradiated layered solids // *Mathematical Modeling and Computing.* – 2017. – **4**, No. 1. – P. 21–36. – <https://doi.org/10.23939/mmc2017.01.021>.
 19. Kushnir R. M., Popovych V. S., Vovk O. M. The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchan-

- ge // J. Eng. Math. – 2008. – **61**, No. 2-4. – P. 357–369.
20. *Kushnir R., Solyar T.* A numerical-analytical approach to the analysis of non-stationary temperature fields in multiply-connected solids // Mech., Mater. Sci. & Eng. J. – 2016. – **3**. – P. 90–106. – <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1167.0165>.
21. *Srinivas V. B., Manthana V. R., Bikram J., Kedar D. D.* Fractional order heat conduction and thermoelastic response of a thermally sensitive rectangular parallelepiped // Int. J. Thermodyn. – 2021. – **24**, No. 1. – P. 62–73.
– DOI:10.5541/ijot.849663.

THERMAL STATE OF A THERMOSENSITIVE TRIBOSYSTEM UNDER COMPLEX HEAT TRANSFER

An analytical-numerical approach tested on thermal conductivity problems for thermosensitive perfectly contacting bodies is extended to similar nonlinear problems of frictional heating. The approach is based on the application of the Kirchhoff integral transform, variant of the successive approximations method, Laplace integral transform and its inversion according to Prudnikov's formula. With its use problems for a tribosystem consisting of contacting thermosensitive half-spaces or half-space and a layer under convective-radiative heat exchange are solved. The case of an arbitrary character of the change of thermal characteristics is considered. The thermal state of the corresponding thermosensitive piecewise homogeneous structures under frictional heating, based on the constructed solutions, is investigated.

Key words: *thermal state, nonlinear heat conduction problem, heat-sensitive half-space and layer, frictional heating, Laplace transform, Prudnikov formula, method of successive approximations.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.08.21