УДК 539.375

І. С. Костенко, Т. М. Николишин✉, М. Й. Ростун

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН ЗАМКНЕНОЇ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТРІЩИНОЮ У КОМПЛЕКСНІЙ ФОРМІ

Для дослідження напруженого стану і граничної рівноваги замкненої пружно-пластичної циліндричної оболонки з плоскою поздовжньою внутрішньою тріщиною довільної конфігурації з використанням аналога δ_c-моделі розв'язувальну систему рівнянь задачі записано у комплексній формі. Отриману систему рівнянь зведено до системи нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь, розв'язок якої побудовано методом механічних квадратур сумісно з умовами пластичності тонких оболонок, умовами обмеженості напружень та умовами однозначності переміщень. Проведено числовий аналіз залежності розкриття тріщини та розмірів пластичних зон від граничних умов на краях оболонки, від конфігурації тріщини, геометричних і механічних параметрів.

Ключові слова: *напружений стан, замкнена пружно-пластична циліндрична оболонка, δ_c-модель, комплексна форма рівнянь, параболічна тріщина, критерій руйнування.*

Вступ. Аналіз літератури засвідчує, що напружений стан та граничну рівновагу оболонок з тріщинами досліджували, як правило, на основі рівнянь теорії тонких оболонок у переміщеннях. Разом з тим відомо, що розв'язки низки задач лінійної теорії оболонок доцільніше будувати комплексним методом, запропонованим В. В. Новожиловим у [13] і розвинутим К. Ф. Черних у [18]. Ці рівняння компактніші від рівнянь теорії оболонок в зусиллях і моментах чи переміщеннях. Крім цього, зниження порядку розв'язувальних рівнянь у два рази при комплексному перетворенні суттєво спрощує процедуру побудови аналітичних розв'язків задач і скорочує час, необхідний для числового аналізу конкретних задач. Це, зокрема, показано в роботах [1, 2, 12].

З огляду робіт з теорії оболонок з тріщинами відомо, що отримані результати щодо напруженого стану і граничної рівноваги оболонок виконано, як правило, для безмежних оболонок. Винятком є праці [16, 19], де досліджено замкнені оболонки в пружній і в пружно-пластичній постановках.

Дослідимо граничну рівновагу ізотропної пружно-пластичної замкненої оболонки.

1. Формулювання задачі. Розглянемо замкнену пружно-пластичну циліндричну оболонку завтовшки $2h$ і завдовжки $2\ell_0$.

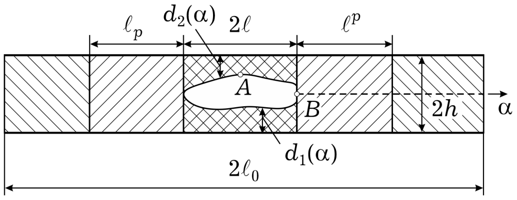

Рис. 1

Віднесемо цю оболонку до триортогональної системи координат $O\alpha\beta\gamma$. Нехай оболонка ослаблена поздовжньою внутрішньою тріщиною завдовжки 2ℓ, яка розміщена в перерізі $\beta = 0$ і обмежена неперервними кривими $d_1(\alpha)$ та $d_2(\alpha)$ (див. рис. 1), які встановлюють відстань від межі тріщини до

✉tarasnyk@ukr.net

зовнішньої і внутрішньої поверхонь оболонки. Вважатимемо, що оболонка і береги тріщини завантажені лише симетричними відносно площини тріщини зусиллями та моментами. Під час деформації береги тріщини не контактують. Обмежимось розглядом достатньо глибоких тріщин: $d_3 = d_1 + d_2 \le 0.6h$. Розміри тріщини, рівень зовнішнього навантаження і властивості матеріалу передбачаємо такими, що в околі тріщини вздовж усієї товщини оболонки вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Тепер, згідно з аналогом δ_c-моделі [3, 4, 20], зони пластичних деформацій замінимо поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на пружну − відповідними зусиллями та моментами. Вважатимемо, що на продовженні тріщини вглибину до зовнішньої і внутрішньої поверхонь оболонки, тобто в області $\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0)$, $\alpha_0 = \ell_1/R$, $\gamma \in [-h, -h + 2d_1] \cup \cup [h - 2d_2, h]$ (R − радіус серединної поверхні оболонки), діють сталі напруження $\sigma^0 = (\sigma_B + \sigma_T)/2$, де σ_B та σ_T − границя міцності та поріг текучості матеріалу. У пластичних зонах на продовженні тріщини вздовж довжини, тобто в областях $\gamma \in [-h, h]$, $\alpha \in (-\alpha_{\text{p}}, -\alpha_0) \cup (\alpha_0, \alpha^{\text{p}})$ (тут $\alpha_{\text{p}} = \ell_{\text{p}}/R$, $\alpha^{\text{p}} = \ell^{\text{p}}/R$, ℓ_{p}, ℓ^{p} − довжини пластичних зон зліва та справа від тріщини, діють невідомі нормальні зусилля $N^{(i)}$ та згинні моменти $M^{(i)}$, $i = 1, 2$, які для ідеально пружно-пластичного матеріалу задовольняють одну з умов пластичності Треска:

або умову пластичності поверхневого шару

$$\frac{N}{2h\sigma_T} + \frac{3|M|}{2h^2\sigma_T} = 1\,, \tag{1}$$

або умову пластичного шарніра [6, 7]

$$\left(\frac{N}{2h\sigma_T}\right)^2 + \frac{|M|}{h^2\sigma_T} = 1\,. \tag{2}$$

Таким чином, у рамках прийнятого аналога δ_c-моделі тривимірну пружно-пластичну задачу для внутрішньої тріщини завдовжки 2ℓ заміняємо двовимірною пружною задачею для фіктивної наскрізної тріщини невідомої довжини $2\ell_1$ $(2\ell_1 = 2\ell + \ell^{\text{p}} + \ell_{\text{p}})$, на берегах якої виконуються умови:

$$N_2(\alpha) = \begin{cases} N_2^{(1)} - N^{\ell} - N_2^0, & |\alpha| < \alpha_0, \\ N - N_2^0, & -\alpha_0 < \alpha < -\alpha_1, \end{cases}$$

$$M_2(\alpha) = \begin{cases} M_2^{(1)} - M^{\ell} - M_2^0, & |\alpha| < \alpha_0, \\ M - M_2^0, & -\alpha_0 < \alpha < -\alpha_1. \end{cases} \tag{3}$$

Тут N^{ℓ}, M^{ℓ} − нормальне зусилля і згинний момент, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків над і під тріщиною і які, згідно з прийнятими припущеннями про напруження у цих зонах, визначаємо за формулами

$$N^{\ell} = 2d_3\sigma^0, \qquad M^{\ell} = 2\sigma^0(h - d_3)(d_2 - d_1)\,,$$

$N_2^{(1)}$, $M_2^{(1)}$ − зусилля і моменти, прикладені до берегів тріщини; N_2^0, M_2^0 − ці ж параметри основного напруженого стану (оболонка без тріщини).

2. Основні співвідношення для послабленої тріщиною циліндричної оболонки в комплексній формі. Щоб записати основні співвідношення лінійної теорії тонких циліндричних оболонок, які враховують наявність тріщин, скористаємося поняттям комплексної статико-геометричної аналогії

[13, 14, 18] і розглянемо комплексні зусилля та моменти

$$\tilde{N}_1 = N_1 - iD_0 c\chi_{22}^s, \quad \tilde{M}_1 = M_1 + iD_0 c\varepsilon_{22}^s,$$

$$\tilde{N}_2 = N_2 - iD_0 c\chi_{11}^s, \quad \tilde{M}_2 = M_2 + iD_0 c\varepsilon_{11}^s,$$

$$\tilde{S} = S + iD_0 c\chi_{12}^s, \quad \tilde{H} = H - iD_0 c\frac{\varepsilon_{12}^s}{2}, \tag{4}$$

де $D_0 = 2Eh$, $c = h/\sqrt{3(1-\nu^2)}$, $i = \sqrt{-1}$, ε_{ij}^s, χ_{ij}^s, $i, j = 1,2$, – компоненти пружної деформації.

Домноживши рівняння нерозривності деформацій на $-iD_0 c$ та додаючи їх до рівнянь рівноваги, отримаємо рівняння рівноваги тонкої циліндричної оболонки в комплексних зусиллях і моментах:

$$L_i\{\tilde{N}_2, \tilde{N}_1, \tilde{S}, \tilde{M}_2, \tilde{M}_1, \tilde{H}\} = \tilde{q}_i, \qquad i = 1,2,3. \tag{5}$$

Тут

$$\tilde{q}_\ell = -Rq_\ell + iD_0 cL_\ell\{\chi_{11}^0, \ldots, \varepsilon_{12}^0/2\}, \qquad \ell = 1,2,$$

$$\tilde{q}_3 = Rq_3 + iD_0 cL_3\{\chi_{11}^0, \ldots, \varepsilon_{12}^0/2\}, \tag{6)}$$

ε_{ij}^0, χ_{ij}^0 – компоненти вільної від напружень деформації [15] такі, що компоненти малої деформації $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^s + \varepsilon_{ij}^0$, $\chi_{ij} = \chi_{ij}^s + \chi_{ij}^0$.

З перших трьох співвідношень (4) отримуємо

$$N_\ell = \operatorname{Re}\tilde{N}_\ell, \quad \ell = 1,2, \qquad S = \operatorname{Re}\tilde{S},$$

$$\chi_{ii}^s = -\frac{1}{D_0}\operatorname{Im}\tilde{N}_j, \qquad i \ne j = 1,2, \qquad \chi_{12}^s = -\frac{1}{D_0}\operatorname{Im}\tilde{S}. \tag{7}$$

За допомогою виразів (7) і співвідношень закону Гука

$$\varepsilon_{ii}^s = \frac{1}{D_0}\left[N_i - \nu N_j\right], \qquad \chi_{ii}^s = \frac{3}{D_1}\left[M_i - \nu M_j\right], \qquad i \ne j = 2,$$

$$\varepsilon_{12}^s = \frac{2(1+\nu)}{D_0}S, \qquad \chi_{12}^s = \frac{3(1+\nu)}{D_1}H, \tag{8}$$

отримаємо такі рівняння:

$$M_i = -c\operatorname{Im}\left[\tilde{N}_j + \nu\tilde{N}_i\right], \quad \varepsilon_{ii}^s = \frac{1}{D_0}\operatorname{Re}\left[\tilde{N}_i - \nu\tilde{N}_j\right], \qquad i \ne j = 1,2,$$

$$H = c(1 - \nu\operatorname{Im}\tilde{S}), \qquad \varepsilon_{12}^s = \frac{1+\nu}{D_0}\operatorname{Re}\tilde{S}. \tag{9}$$

Підставляючи (9) у три останні рівняння з (4), знаходимо

$$\tilde{M}_1 = ic\left[\tilde{N}_2 - \nu\bar{\tilde{N}}_1\right], \quad \tilde{M}_2 = ic\left[\tilde{N}_1 - \nu\bar{\tilde{N}}_2\right], \quad \tilde{H} = -ic\left[\tilde{S} - \nu\bar{\tilde{S}}\right]. \tag{10}$$

Тут і далі риска над «тильдою» позначає операцію спряження відповідної комплексної величини.

Тепер, замінивши комплексні моменти в рівняннях (5) їх виразами з (10), отримаємо систему рівнянь у комплексних зусиллях:

$$L_\ell\{\tilde{N}_2, \tilde{N}_1, \tilde{S}, ic[\tilde{N}_1 - \nu\bar{\tilde{N}}_2], ic[\tilde{N}_2 - \nu\bar{\tilde{N}}_1], -ic[\tilde{S}_2 + \nu\tilde{S}_1]\} = \tilde{q}_\ell, \quad \ell = 1,2,3. \tag{11}$$

Рівняння (11) вважаємо «точним», наскільки точними є «дійсні» рівняння теорії тонких оболонок. Недоліком є наявність операції спряження. Але можна показати, що члени, які входять зі знаком спряження, є малими, і їх можна видалити або дещо змінити комплексні величини, які вводимо.

Введемо комплексну функцію В. В. Новожилова $\tilde{N} = \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2$. Тоді співвідношення (10) після деяких перетворень можемо записати так:

$$\frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta} = \tilde{q}_1 ,$$

$$\frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} + \frac{ic}{R} \frac{\tilde{N}}{\partial \beta} = \tilde{q}_2 ,$$

$$\tilde{N}_2 - \frac{ic}{R} \Delta \tilde{N} = \tilde{q}_{30} , \tag{12}$$

де $\tilde{q}_{30} = \tilde{q}_3 - \dfrac{ic(1-\nu)}{R}\left[\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\tilde{q}_1 + \dfrac{\partial}{\partial \beta}\tilde{q}_2\right]$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\partial_1 = \partial/\partial\alpha$, $\partial_2 = \partial/\partial\beta$.

Виключаючи з рівнянь рівноваги невідому $\tilde{S}$, отримаємо

$$\Delta \tilde{N}_2 = \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial \alpha^2} + \frac{ic}{R}\frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial \beta^2} = \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial \beta} - \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial \alpha},$$

$$\tilde{N}_2 - \frac{ic}{R} \Delta \tilde{N} = \tilde{q}_{30} . \tag{13}$$

Підставляючи $\tilde{N}_2$ з другого рівняння (13) у перше, отримаємо диференціальне рівняння четвертого порядку з однією невідомою комплексною функцією $\tilde{N}$ для циліндричної оболонки, що знаходиться під дією поля дисторсій:

$$(\Delta\Delta + \underline{\partial_2^2} + 2ib^2\partial_1^2)\tilde{N} =$$

$$= D_0\{L_{11}\varepsilon_{11}^0 + L_{12}\varepsilon_{12}^0 + L_{22}\varepsilon_{22}^0 + P_{11}\chi_{11}^0 + P_{12}\chi_{12}^0 + P_{22}\chi_{22}^0\} , \tag{14}$$

де

$$L_{11} = -\partial_2^2(\Delta + \underline{1+\Delta\mu}), \quad L_{22} = -\Delta\partial_1^2, \quad L_{12} = -\partial_1\partial_2(\Delta + \underline{1+\Delta\mu}),$$

$$P_{11} = -R\partial_1^2 + \mu R\Delta\partial_2^2, \quad P_{22} = -R\partial_1^2 + \mu R\Delta\partial_1^2, \quad P_{12} = 2\mu\Delta\partial_1\partial_2 ,$$

$$\mu = \frac{i(1-\nu)}{2b^2}, \qquad 2b^2 = \frac{R}{c}.$$

Комплексні зусилля $\tilde{N}_1$, $\tilde{N}_2$ виражаються через основну комплексну функцію $\tilde{N}$ співвідношеннями

$$\tilde{N}_2 = \frac{i}{2b^2}\Delta\tilde{N} + \frac{i}{2b^2}D_0\{C_{11}\varepsilon_{11}^0 + C_{12}\varepsilon_{12}^0 + C_{22}\varepsilon_{22}^0 + D_{11}\chi_{11}^0 +$$

$$+ D_{12}\chi_{12}^0 + D_{22}\chi_{22}^0\} ,$$

$$\tilde{N}_1 = \tilde{N} - \tilde{N}_2 . \tag{15}$$

Тут

$$C_{11} = \partial_2^2(1+\mu), \qquad C_{12} = \partial_1\partial_2(1-\mu), \qquad C_{22} = \partial_1^2,$$

$$D_{11} = R(1+\mu\partial_2^2), \qquad D_{12} = 2\mu R\partial_1\partial_2, \qquad D_{22} = -R\mu\partial_1^2. \tag{16}$$

Систему комплексних рівнянь (12) та основне ключове рівняння (14) записано для випадку загальної моментної теорії оболонок. У межах технічної теорії [8] в системі рівнянь (12) підкреслені члени відкидають.

Оскільки на оболонку діють зовнішні навантаження, симетричні відносно поверхні тріщини, і до її протилежних берегів прикладено рівні за величиною і протилежно напрямлені зусилля та моменти, а також враховуючи, що при переході через тріщину зусилля і моменти є неперервними функціями, а переміщення v і кути повороту нормалі θ мають розриви першого роду, тобто є узагальненими функціями, то запишемо їх у вигляді

$$\varepsilon_{22}^{0} = \frac{[v(\alpha)]\,\delta(\beta)}{R}, \qquad \chi_{22}^{0} = \frac{[\theta_2(\alpha)]\delta(\beta)}{R} - \frac{[\omega(\alpha)]\delta(\beta)}{R^2}, \tag{17}$$

де $[v(\alpha)] = v^{+}(\alpha) - v^{-}(\alpha)$, $[\theta(\alpha)] = \theta^{+}(\alpha) - \theta^{-}(\alpha)$, $[\omega(\alpha)] = \omega^{+}(\alpha) - \omega^{-}(\alpha)$.

Обмежимося дослідженням збуреного напруженого стану циліндричної оболонки під дією симетричного навантаження у межах технічної теорії тонких оболонок. За вихідну приймемо систему рівнянь рівноваги в комплексній формі. Звівши цю систему до одного ключового рівняння щодо комплексної функції $\tilde{\Phi}$, зв'язаної з функцією Новожилова співвідношенням

$$\tilde{N} = -\Delta\tilde{\Phi} + iD_0 c\left(\chi_{22}^{0} + \chi^{0}\right), \qquad \chi^{0} = -\frac{R\chi_{22}^{0}}{R + ic}, \tag{18}$$

отримаємо ключове рівняння

$$L^{\mathrm{T}}\tilde{\Phi} = D_0\left\{\frac{iR}{2b^2}\left(\partial_2^2 + \nu\partial_1^2\right)\chi_{22}^{0} + \partial_1^2\varepsilon_{22}^{0}\right\}. \tag{19}$$

Тут оператор $L^{\mathrm{T}} = \partial_1^4 + 2\partial_1^2\partial_2^2 + \partial_2^4 + 2ib^2\partial_1^2$.

Нехай на торцях оболонки $\alpha_0 = \pm \ell_0/R$ задано однорідні граничні умови:

$$P_i(\tilde{\Phi}) = 0, \qquad i = 1,\ldots,4, \tag{20}$$

де на оператори P_i накладаються обмеження, прийняті в теорії тонких оболонок [13, 14, 17].

Розв'язок рівняння (19) побудуємо у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння і часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Частковий розв'язок подамо у вигляді

$$\tilde{\Phi}^{\mathrm{pt}}(\alpha,\beta) = D_0\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left\{\frac{1}{R}\partial_1^2[v(\xi)] - \frac{i}{2b^2}\left(\nu\partial_2^2 + \partial_1^2\right)[\theta_2(\xi)]\right\}\times$$

$$\times\frac{k}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(\alpha-\xi)\cos n\beta\,d\xi. \tag{21}$$

Тут $\Phi_n(\alpha-\xi)$ – фундаментальний розв'язок рівняння (19).

Розв'язок однорідного рівняння (19) з врахуванням умов циклічної симетрії будемо шукати у вигляді

$$\tilde{\Phi}^{0}(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n^{0}(\alpha)\cos n\beta, \tag{22}$$

де $\Phi_n^{0}(\alpha) = \sum_{j=0}^{2}\tilde{C}_{jn}\,\mathrm{ch}\,\ell_{jn}\alpha$, $\ell_{jn} = x_{jn} - iy_{jn}$, $\tilde{C}_{jn}$ – довільні комплексні змінні ($\tilde{C}_{1n} = C_{1n} + iC_{2n}$, $\tilde{C}_{2n} = C_{3n} + iC_{4n}$), значення x_{jn}, iy_{jn}, $j = 1,2$, відповідно є дійсними і уявними частинами коренів характеристичного рівняння

$$\lambda^4 + 2\lambda^2\left(n^2 - ib^2\right) + n^4 = 0.$$

Тоді з урахуванням (21), (22) запишемо

$$\tilde{N}_i = \tilde{N}_i^{\mathrm{pt}} + \tilde{N}_i^{0}, \quad i = 1,2, \qquad \tilde{S} = \tilde{S}^{\mathrm{pt}} + \tilde{S}^{0}, \tag{23}$$

де

$$\tilde{N}_1^{\mathrm{pt}} = -\partial_2^2\tilde{\Phi}^{\mathrm{pt}} + iD_0 c\chi_{22}^0, \quad \tilde{N}_2^{\mathrm{pt}} = -\partial_1^2\tilde{\Phi}^{\mathrm{pt}}, \quad \tilde{S}^{\mathrm{pt}} = \partial_1\partial_2\tilde{\Phi}^{\mathrm{pt}} + iD_0 c\chi_{12}^0, \tag{24}$$

$$\tilde{N}_1^0 = -\partial_2^2\tilde{\Phi}^0, \qquad \tilde{N}_2^0 = -\partial_1^2\tilde{\Phi}^0, \qquad \tilde{S}^0 = \partial_1\partial_2\tilde{\Phi}^0. \tag{25}$$

Враховуючи співвідношення (23)–(25) і задовольняючи граничні умови (20), для визначення невідомих сталих C_{jn}, $j = 1,\ldots,4$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{C}_n = \mathbf{B}_n, \qquad n = 1,2,\ldots. \tag{26}$$

де $\mathbf{A}_n$ – матриця коефіцієнтів, $\mathbf{B}_n$ – вектор-стовпець вільних членів, $\mathbf{C}_n$ – вектор-стовпець невідомих C_{jn}.

Підставляючи отримані значення сталих C_{jn}, $j = 1,\ldots,4$, у (22), отримаємо з урахуванням співвідношень (23)–(25) розподіл зусиль і моментів у довільній точці оболонки. Задовольнивши граничні умови на берегах тріщини, задачу про визначення напруженого стану замкненої циліндричної оболонки із заданими на торцях граничними умовами (20) зведемо до системи сингулярних інтегральних рівнянь.

Як приклад розглянемо таку умову закріплення оболонки:

$$v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{d\alpha} = 0, \quad N_1 = 0 \quad \text{при } \alpha = \pm\alpha_1, \quad \alpha_1 = \ell_0/R, \tag{27}$$

де u, v, w – переміщення серединної поверхні оболонки, N_1 – нормальне осьове зусилля.

Умови (27) відповідають підкріпленню оболонки на торцях жорсткими шпангоутами, що вільно переміщуються в осьовому напрямку. Відомо [5, 10], що такі шпангоути використовуються при експлуатації магістральних трубопроводів з метою гальмування розповсюдження тріщин.

Щоб визначити невідомі сталі C_{jn}, $j = 1,\ldots,4$, необхідно задовольнити граничні умови (27). Для цього використаємо подання переміщень через зусилля і моменти:

$$u = \frac{R}{D_0}\int \mathrm{Re}\left[\tilde{N}_1 - \nu\tilde{N}_2\right] d\beta + C,$$

$$v = -\int w\, d\beta + \frac{R}{D_0}\int \mathrm{Re}\left[\tilde{N}_2 - \nu\tilde{N}_1\right] d\beta + C_3,$$

$$w = \frac{2b^2R}{D_0}\iint \mathrm{Im}\,\tilde{N}_2\, d\alpha\, d\beta + C_1\alpha + C_2. \tag{28}$$

Із заданих граничних умов (27) випливає, що в співвідношеннях (28) сталі $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, а переміщення u визначає стан оболонки з точністю до невідомої сталої C, що відповідає жорсткому переміщенню оболонки.

Враховуючи (28), (23)–(25) і задовольняючи граничні умови (27), для визначення невідомих сталих C_{jn}, $j = 1,\ldots,4$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{C}_n = \mathbf{B}_n, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{29}$$

Тут $\mathbf{A}_n$ – матриця коефіцієнтів

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & u_{4n} \\ z_{1n} & z_{2n} & z_{3n} & z_{4n} \\ v_{1n} & v_{2n} & v_{3n} & v_{4n} \\ w_{1n} & w_{2n} & w_{3n} & w_{4n} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$\mathbf{C}_n$ – вектор-стовпець невідомих C_{jn}, $j = 1,\ldots,4$, $\mathbf{B}_n$ – вектор-стовпець вільних членів:

$$\mathbf{B}_n = \frac{D_0 k}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left\{ \frac{1}{R}\frac{d}{d\xi}[v(\xi)] \begin{bmatrix} v_n^{\varepsilon}(\alpha-\xi) \\ w_n^{\varepsilon}(\alpha-\xi) \\ \theta_n^{\varepsilon}(\alpha-\xi) \\ N_{1n}^{\varepsilon}(\alpha-\xi) \end{bmatrix} + c\frac{d}{d\xi}[\theta(\xi)] \begin{bmatrix} v_n^{\chi}(\alpha-\xi) \\ w_n^{\chi}(\alpha-\xi) \\ \theta_n^{\chi}(\alpha-\xi) \\ N_{1n}^{\chi}(\alpha-\xi) \end{bmatrix} \right\} d\xi . \quad (31)$$

Таким чином, використовуючи співвідношення (22)–(25) можна визначити напружений стан циліндричної оболонки із заданими на торцях граничними умовами, зумовлений довільним розподілом стрибків переміщень і кутів повороту вздовж фіктивної тріщини. Якщо тепер задовольнити граничні умови (3) на берегах фіктивної тріщини, то отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь задачі. Так, у випадку вільних берегів тріщини при навантаженні, симетричному відносно її поверхні, ця система має вигляд

$$\sum_{i=1,2} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_i(u) \left\{ \frac{a_{mi}}{u-s} + \alpha_0 \mathcal{K}_{mi}^0[\alpha_0(s-u)] \right\} du = \pi f_{m0}(s) ,$$

$$|s| < 1, \quad m = 1,2 , \quad (32)$$

розв'язок якої задовольняє умови

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_i(u)\, du = 0, \qquad i = 1,2 , \quad (33)$$

де

$$F_1(u) = \frac{1}{R}\frac{d}{du}[v(u)], \qquad F_2(u) = -c\frac{d}{du}[\theta_2(u)] ,$$

$$f_{10}(s) = N_s(\alpha), \qquad f_{20}(s) = M_s(\alpha), \qquad s = \alpha/\alpha_0 .$$

Ядра системи сингулярних інтегральних рівнянь (32) мають вигляд

$$\mathcal{K}_{11} = \mathcal{K}_{11}^0 - \mathcal{K}_{11}^1,\ \mathcal{K}_{12} = \mathcal{K}_{12}^0 - \mathcal{K}_{12}^1,\ \mathcal{K}_{21} = \mathcal{K}_{12}^0 - \mathcal{K}_{21}^1,\ \mathcal{K}_{22} = \mathcal{K}_{22}^0 - \mathcal{K}_{22}^1 .$$

Значення $\mathcal{K}_{mi}^0$, $i,m = 1,2$, наведено в [11], а складові регулярних ядер $\mathcal{K}_{mi}^1$, які характеризують вплив граничних умов, заданих на торцях оболонки, наведено в роботі [10]. Ядра отриманої системи сингулярних інтегральних рівнянь є неперервними для всієї множини дійсних значень s і u.

У системі сингулярних інтегральних рівнянь границі інтегрування α_1 є невідомими, оскільки невідомими є довжини пластичних зон ℓ_{p}, ℓ^{p}. Крім цього, праві частини $f_m(\alpha)$ є розривними функціями, які містять невідомі зусилля N^i та моменти M^i. Тому систему інтегральних рівнянь потрібно доповнити однією з умов пластичності Треска (1) або (2) та умовами обмеженості зусиль і моментів біля вершин фіктивної тріщини. Для цього достатньо, щоб коефіцієнти інтенсивності нормального зусилля K_N і згинного моменту K_M були нульовими:

$$K_N(-\alpha_0 - \alpha_{\mathrm{p}}) = K_N(\alpha_0 + \alpha^{\mathrm{p}}) = K_M(-\alpha_0 - \alpha_{\mathrm{p}}) = K_M(\alpha_0 + \alpha^{\mathrm{p}}) = 0 . \quad (34)$$

Таким чином, отримано повну систему рівнянь для визначення стрибків переміщень і кута повороту, довжин пластичних зон та зусиль і моментів, що діють у них.

Інтегруючи отриманий розв'язок, розкриття тріщини $\delta(\gamma,\alpha)$ у довільній її точці визначимо за формулою

$$\delta(\gamma, \alpha) = [v(\alpha/\alpha_1)] + \gamma[\gamma(\alpha/\alpha_1)], \qquad |\alpha| < \alpha_1, \qquad |\gamma| = h. \tag{35}$$

Прирівнявши праву частину формули (35) до критичного значення δ_{cr} розкриття фронту тріщини для досліджуваного матеріалу, отримаємо критеріальне співвідношення, яке пов'язує граничне навантаження із допустимими розмірами тріщини.

3. Числові результати. Алгоритм числового розв'язування таких нелінійних систем сумісно з додатковими умовами (1) або (2), умовами однозначності переміщень (33) та умовами (34) наведено в [11]. Числовий аналіз розглянутої задачі проведемо для закріпленої на обох кінцях оболонки згідно з умовами (27), виготовленої з ідеально пружно-пластичного матеріалу ($\sigma_B = \sigma_T$), та ослабленої внутрішньою параболічною тріщиною:

$$d_1(\alpha) = \frac{1}{\tau_0^2}(h - d_1' - d_2')\alpha^2 - h + d_1',$$

$$d_2(\alpha) = \frac{1}{\tau_0^2}(h - d_1' - d_2')\alpha^2 + h - d_2', \tag{36}$$

де d_1', d_2' – віддалі від вершини відповідної параболи до внутрішньої та зовнішньої поверхні оболонки, $\tau_0 = \ell_0/\ell_1$, $d_1'/h = 0.15$, $d_2'/h = 0.25$. Очевидно, що в цьому випадку $\ell_p = \ell^p$ і, відповідно, $N^1 = N^2$ та $M^1 = M^2$.

Зважаючи на (36), обчислимо зусилля $N^1(\alpha)$ і момент $M^1(\alpha)$:

$$N^1(\alpha) = \sigma_\tau(d_1 + d_2) + \sigma_\tau(h - d_1 - d_2)\frac{\alpha^2}{(\tau^0)^2} = F_1^1 + k_1^1\frac{\alpha^2}{(\tau^0)^2},$$

$$M^1(\alpha) = \frac{\sigma_\tau}{2}(h - d_1 - d_2)(d_1 - d_2)\left(1 - \frac{\alpha^2}{(\tau^0)^2}\right) = F_3^1 + k_3^1\frac{\alpha^2}{(\tau^0)^2},$$

де

$$F_1^1 = N^1 = \sigma_\tau(d_1 + d_2), \qquad F_3^1 = M^1 = \sigma_\tau(h - d_1 - d_2)(d_1 - d_2)/2,$$

$$k_1^1 = \sigma_\tau(h - d_1 - d_2), \qquad k_3^1 = -M^1.$$

При проведенні числових розрахунків для дослідження залежності поведінки розкриття тріщини та довжини пластичних зон від довжини параболічної тріщини, розмірів оболонки та фізичних і геометричних параметрів вибрали такі значення: $R = 0.15$ м, $h = 0.15 \cdot 10^{-2}$ м, $\nu = 0.3$, $\ell_0 = 0.15$ м.

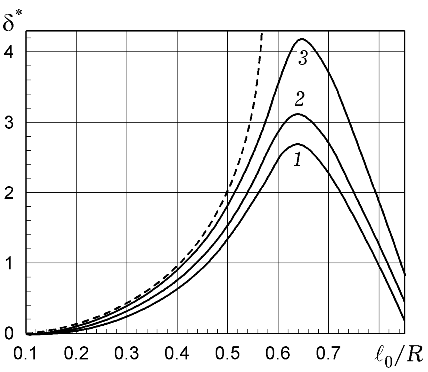

Рис. 2

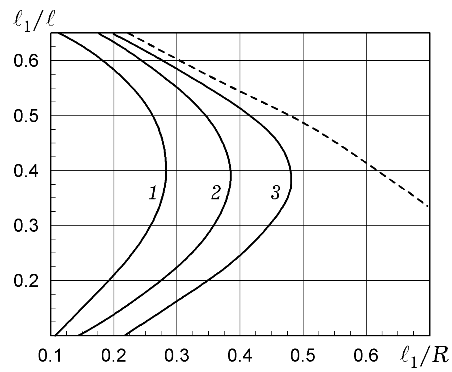

Рис. 3

На рис. 2 наведено графіки залежності відносного розкриття $\delta^* = \delta(0, \ell/R)E/(\ell\sigma_T)$ від відносної довжини реальної тріщини ℓ_0/R та параметрів параболічної тріщини d_1', d_2'. Штрихова крива відповідає безмежній оболонці, а криві ***1–3*** відповідають значенням $d_1' = 0.15, 0.20, 0.30$.

На рис. 3 наведено графіки залежності відносної довжини пластичних зон ℓ_1/ℓ від тих самих параметрів. Як бачимо, спочатку відносні розкриття тріщини δ^* в замкненій оболонці (криві ***1–3***) ведуть себе, як у безмежній оболонці (штрихова лінія). Однак зі збільшенням параметра $\tau_0 = \ell_0/\ell_1$ вони прямують до нуля. Те ж саме спостерігаємо і для зміни довжини пластичної зони.

Висновок. Якщо за критерій руйнування взяти критерій критичного розкриття тріщини, то обмежена оболонка з внутрішньою параболічною тріщиною при вибраних параметрах почне руйнуватись у точці ***A*** – найближчій до зовнішньої поверхні точці (див. рис. 1). У випадку, коли внутрішня тріщина має форму прямокутника, в який вписано параболічну тріщину, її розкриття теж є найбільшим у точці ***A***, але його величина є у 8÷10 разів більшою.

1. *Артюхин Ю. П.* Определение напряжений в ортотропной цилиндрической оболочке при действии сосредоточенной силы // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1967. – № 5. – С. 148–152.
2. *Артюхин Ю. П.* Расчет однослойных и многослойных ортотропных оболочек на локальные нагрузки // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1966. – № 4. – С. 91–110.
3. *Баренблатт Г. И.* Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // Журн. эксперим. теорет. физики. – 1961. – **19,** № 4. – С. 3–56.
4. *Бережницький Л. Т., Делявсъкий М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.
5. *Броек Д.* Основы механики разрушения. – Москва: Высш. шк., 1980. – 368 с.
6. *Васильченко Г. С., Кошелев П. Ф.* Практическое применение механики разрушения для оценки прочности конструкций. – Москва: Наука, 1974. – 148 с.
7. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – Москва: Наука, 1970. – 379 с.
8. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1949. – 707 с.
9. *Клейн Г. К.* Расчет подземных трубопроводов. – Москва: Стройиздат, 1969. – 240 с.
10. *Костенко І. С., Тумашова О. В.* Наближений розв'язок задачі про пружну рівновагу скінченної циліндричної оболонки з поверхневими тріщинами // Вестн. Херсон. нац. техн. ун-та. – 2012. – № 2(4). – С. 176–179.
11. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
12. *Мукоед А. П.* Комплексные уравнения В. В. Новожилова для ортотропных оболочек // Прикл. механика. – 1965. – **1**, № 7. – С. 122–126.
13. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. – Ленинград: Судромгиз, 1962. – 431 с.
14. *Огибалов П. М., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины. – Москва: Изд-во МГУ, 1969. – 695 с.
15. *Осадчук В. А., Николишин М. М., Кирьян В. И.* Применение аналога δ_c модели для определения раскрытия несквозной трещины в замкнутой цилиндрической оболочке // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – **22**, № 1. – С. 88–92.
16. *Осадчук В. А., Ярмощук И. С.* Упругое равновесие замкнутой цилиндрической оболочки с системой периодически расположенных параллельных трещин // Физ.-мех. поля в деформируемых средах. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 51–58.
17. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
18. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1962. – Ч. 1. – 272 с.; – 1964. – Ч. 2. – 395 с.
19. *Швец Р. Н., Павленко В. Д.* О циклически симметричных задачах теплопроводности для пластин и оболочек с отверстиями при наличии теплообмена // Инж.-физ. журн. – 1972. – **23**, № 5. – С. 890–897.
20. *Kushnir R. M., Nykolyshyn M. M., Rostun M. Yo.* Limit equilibrium of inhomogeneous shells of revolution with internal cracks // Proc. 14th Int. Conf. Fracture / E. E. Gdoutos (ed.) (Rhodes, Greece, June 18–23, 2017). – ICF14. Vol. 1. – P. 316–317. – https://www.icfweb.org/Procf/ICF14/Vol1/316.

SOLUTION OF THE PROBLEM OF STRESS STATE OF CLOSED ELASTOPLASTIC CYLINDRICAL SHELL WITH CRACK IN THE COMPLEX FORM

For the analysis of the stress state and limit equilibrium of a closed elastoplastic cylindrical shell with a flat longitudinal internal crack of arbitrary configuration, by using the analog of δ_c *-model the system of the resolving equations of the problem is wrote in the complex form. The derived system is reduced to a system of nonlinear singular integral equations the solution of which is constructed by the method of mechanical quadrature simultaneously with conditions of plasticity of the thin shells, conditions of boundedness of stresses, and conditions of uniqueness of the displacements. A numerical analysis of the dependences of the crack opening displacements and the sizes of the plastic zones on the boundary conditions at the edges of the shell, the configuration of the crack, geometric and mechanical parameters is carried out.*

Keywords*: stress state, closed elasto-plastic cylindrical shell,* δ_c *-model, complex form of equation, parabolic crack, fracture criterion.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.10.21