

ВИЗНАЧЕННЯ ПРОГИНІВ ПЛАСТИН ПРИ ЛОКАЛІЗОВАНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Розглянуто задачу про визначення переміщень у пластинках при локалізованих навантаженнях на основі співвідношень теорії пружності та прикладних теорій. Розв'язок задачі для випадку дії сил отримано на основі символічного методу Лур'є і формул розвинення Ващенко-Захарченка у вигляді експоненціальних рядів. Для знаходження переміщень біля прикладених сил, де побудовані ряди є повільнозбіжними, додатково використано інтегральне перетворення Ганкеля. Запропоновано спосіб виділення повільно загасаючих складових у підінтегральних функціях, на основі якого переміщення записано через швидкозбіжні ряди Тейлора. Встановлено випадки, коли для визначення прогинів можуть бути використані прикладні теорії.

Ключові слова: локалізовані навантаження, переміщення, прогини пластин, інтегральне перетворення Ганкеля, прикладні теорії.

Вступ. Прогини пластин у літературі, як правило, визначають на основі прикладних або технічних теорій. Найбільш поширеними є дослідження переміщень з використанням гіпотези Кірхгофа – Лява [6]. Задачі для пластин прямокутної форми за різних граничних умов досліджувались у роботах [6, 11]. Підходи, що ґрунтуються на методах скінченних або граничних елементів, ефективно використано у [8, 9, 12] при розв'язуванні задач для пластин складної форми, послаблених отворами. Загальноживані прикладні аналітичні та числові методи дослідження напружено-деформованого стану пластин різної форми, придатні для практичних інженерних розрахунків, наведено у працях [10, 11].

При локалізованих навантаженнях визначення напружено-деформованого стану проводять на основі рівнянь класичної теорії пружності. Задачі теорії пружності для шару при довільному навантаженні розглядалися в роботах [5, 7], де розв'язки отримано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є або Ганкеля. При цьому задачі зводили до обчислення невластних інтегралів, як правило, повільнозбіжних. Тому в літературі використовують підходи, в яких із підінтегральних функцій виділяють повільно загасаючі складові [4]. У праці [5] проведено апроксимацію підінтегральних функцій, при якій переміщення і напруження у деяких часткових випадках записуються в аналітичному вигляді. Однак при цьому розв'язок визначено з істотними похибками. При розгляді задач про згин плит необхідно враховувати наявність особливих точок (полісів) у підінтегральних функціях.

У роботах [5–7] для деяких випадків навантаження зосередженими силами запропоновано обчислювати інтеграли за допомогою теорії лишків. Однак в околах точок, де прикладені сили, отримані ряди є повільнозбіжними. Для задач теорії пружності для шару широкого застосування набув також символічний метод Лур'є [2]. На його основі побудовано однорідні розв'язки, які справджуються для ненавантажених на граничних площинах пластин. Ці розв'язки широко використовують при розгляді задач з отворами. У праці [3] на основі методу Лур'є досліджено задачі для шару з навантаженими межами за допомогою побудованих неоднорідних розв'язків.

У цій роботі для визначення прогинів пластин використано операторний метод [3] та інтегральне перетворення Ганкеля [7]. Проведено оцінки точності переміщень, які визначаються на основі прикладних теорій.

1. Постановка задачі та основні співвідношення. Розглядається задача про визначення прогинів шару $-h < z < h$, що перебуває під дією рівно-

[✉] t_solyar@ukr.net

мірно розподілених або зосереджених нормальних сил, прикладених на границях шару. Граничні умови для задачі запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\tau_{zx} = \tau_{zy}|_{z=\pm h} = 0, \quad \sigma_z(x, y, \pm h) = \sigma_{\pm}(x, y), \\ \sigma_z(x, y, \pm h) = q \pm p,\end{aligned}\quad (1)$$

$$\text{де } q = \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2}, \quad p = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{2}.$$

Далі будемо розглядати також шар, що перебуває під дією зосереджених самозрівноважених нормальних сил P_j , прикладених до границі в точках (x_j, y_j, z_j) , $z_j = \pm h$, $j = 1, \dots, N$. Для того щоб система сил була зрівноваженою, необхідно, щоб виконувались такі умови:

$$\sum_{j=1}^N P_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N P_j x_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N P_j y_j = 0. \quad (2)$$

Введені функції q , p у цьому випадку будуть такими:

$$q = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \chi_j P_j \delta(x - x_j) \delta(y - y_j), \quad p = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N P_j \delta(x - x_j) \delta(y - y_j), \quad (3)$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака, $\chi_j = \text{sgn}(z_j)$.

1. Операторний метод розв'язування. Будемо виходити з розв'язку для переміщень на межах плити, який отримано в [2] у символічному вигляді:

$$w(x, y, h\zeta) = \frac{2h}{G} (1 - \nu) \left[\zeta \frac{\sin^2 d}{d(2d + \sin 2d)} q + \frac{\cos^2 d}{d(2d - \sin 2d)} p \right], \quad (4)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, G – модуль зсуву, $d^2 = h^2 \Delta$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двовимірний оператор Лапласа. Тут $\zeta = z/h$, причому приймаємо $\zeta = \pm 1$.

Розкладемо вирази, які входять у формулу (4) для $w(x, y, h\zeta)$, на прості дроби. Розглянемо функції

$$F_s(d) = \frac{\sin^2 d}{d(2d + \sin 2d)}, \quad F_a = \frac{\cos^2 d}{d(2d - \sin 2d)}.$$

Застосуємо до цих функцій формули Ващенко-Захарченка. Для них справджуються розвинення [3]:

$$\begin{aligned}F_s &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha_i}{\cos^2 \alpha_i} \frac{1}{d^2 - \alpha_i^2}, \\ F_a &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \beta_i}{\sin^2 \beta_i} \frac{1}{d^2 - \beta_i^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{d^4} - 0.8 \frac{1}{d^2} \right),\end{aligned}$$

де α_i – корені рівняння $\sin 2\alpha + 2\alpha = 0$, причому $\text{Re } \alpha_i > 0$, а β_i – корені рівняння $\sin 2\beta - 2\beta = 0$ з додатною дійсною частиною.

Тоді на основі [3] запишемо

$$F_s q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha_i}{\cos^2 \alpha_i} q_i, \quad F_a p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \beta_i}{\sin^2 \beta_i} p_i + \frac{3}{4} (1 - 0.8d^2) p_0,$$

де функції q_i , p_i визначаються з рівнянь

$$(d^2 - \alpha_i^2) q_i = q, \quad (d^2 - \beta_i^2) p_i = p, \quad i > 0, \quad d^4 p_0 = p, \quad i = 0. \quad (5)$$

Підставляючи ці співвідношення у формулу (4), отримуємо вираз для визначення переміщень

$$w(x, y, h\zeta) = \frac{1-\nu}{G} h \times \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\zeta \frac{\sin^2 \alpha_i}{\cos^2 \alpha_i} q_i + \frac{\cos^2 \beta_i}{\sin^2 \beta_i} p_i \right) + \frac{3}{4} (1 - 0.8d^2) p_0 \right]. \quad (6)$$

1.1. Дія зосереджених сил. Розглянемо випадок зосередженої сили P , прикладеної в точці (x_0, y_0, z_0) , $z_0 = \pm h$. Тоді маємо

$$q\chi_0 = p = \frac{P}{2} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad \chi_0 = \text{sgn}(z_0).$$

Розв'язок рівнянь (5) має вигляд

$$q_i = -\chi_0 c K_0(\alpha_i \rho_0^*), \quad i > 0, \\ p_i = -c K_0(\beta_i \rho_0^*), \quad i > 0, \quad p_0 = \frac{c}{4} \ln \rho_0^*(\rho_0^{*2}),$$

де $K_0(\cdot)$ – функція Макдональда, $\rho_0^* = r_0/h$, $r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $c = \frac{P}{4\pi h^2}$. Тоді переміщення, які відповідають дії від однієї сили P , запишемо у вигляді

$$w_0(x, y, h\zeta) = \gamma P [\zeta \chi_0 U_s(\rho_0^*) + U_a(\rho_0^*) + F_0(\rho_0^*)],$$

де

$$U_s(\rho_0^*) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \text{tg}^2 \alpha_i K_0(\alpha_i \rho_0^*), \quad U_a(\rho) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \text{ctg}^2 \beta_i K_0(\beta_i \rho_0^*), \\ F_0(\rho_0^*) = \frac{3}{16} \ln \rho_0^*((\rho_0^*)^2 - 3.2), \quad \gamma = \frac{1-\nu}{4\pi G h} = \frac{h^2}{3\pi D}, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}.$$

Переміщення від дії системи сил P_j , $j = 1, \dots, N$, матимуть вигляд

$$w(x, y, h\zeta) = \gamma (\zeta \Phi + \Psi), \quad (7)$$

де

$$\Phi = \sum_{j=1}^N P_j \chi_j U_s(\rho_j^*), \quad \Psi = \sum_{j=1}^N P_j [U_a(\rho_j^*) + F_0(\rho_j^*)], \\ \rho_j^* = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} / h.$$

Такий розв'язок у часткових випадках був отриманий раніше іншим шляхом у роботі [5], методом інтегральних перетворень Ганкеля і методом лишків.

1.2. Випадок розподіленого навантаження. Розглянемо випадок, коли пластина перебуває під дією зусиль, які розподілені по N окремих областях, причому прикладене навантаження є самозрівноваженим. Нехай

$$p = \sum_{j=1}^N P_j s(r_j), \quad q = \sum_{j=1}^N Q_j s(r_j), \quad (8)$$

де $s(r)$ – відома функція, яка відмінна від нуля в області $r < R$, R – задана величина.

Для самозрівноваженості прикладеного навантаження необхідно, щоб виконувались умови вигляду (2):

$$\sum_{j=1}^N P_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N P_j x_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N P_j y_j = 0.$$

Прийемо, що функція $s(r)$ є поліномом. Рівняння (5) у цьому випадку матиме вигляд

$$(d^2 - \alpha^2)V = s. \quad (9)$$

Запишемо його розв'язок у вигляді $V = V_0 + V_*$, причому $V = V(\alpha, r)$.

Тут V_0 – частковий розв'язок рівняння (9), V_* – коригувальний розв'язок.

Частковий розв'язок при $r < R$ буде таким:

$$V_0 = -\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4}d^2 + \frac{1}{\alpha^6}d^4 + \dots\right)s.$$

Коригувальний розв'язок рівняння (9) запишемо у вигляді

$$V_* = \begin{cases} AI_0(\alpha r), & r < R, \\ BK_0(\alpha r), & r > R. \end{cases}$$

де $I_i(\alpha r)$ – функції Бесселя уявного аргументу, $K_i(\alpha r)$ – модифіковані функції Бесселя. Сталі A , B визначасмо з умови неперервності функції V і її похідної:

$$BK_0(\alpha R) - AI_0(\alpha R) = V_0(R),$$

$$-BK_1(\alpha R) - AI_1(\alpha R) = V_0'(R)/\alpha.$$

Звідси отримуємо

$$B = \frac{\alpha V_0(R)I_1(\alpha R) - V_0'(R)I_0(\alpha R)}{R},$$

$$A = -\frac{\alpha V_0(R)K_1(\alpha R) + V_0'(R)K_0(\alpha R)}{R}. \quad (10)$$

Тоді

$$F_s q = \frac{1}{2} \sum_i \operatorname{tg}^2 \alpha_i V_0(\alpha_i, r) + \frac{1}{2} \sum_i \operatorname{ctg}^2 \alpha_i V_*(\alpha_i, r).$$

Перший ряд у цій формулі запишемо як

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i \operatorname{tg}^2 \alpha_i V_0(\alpha_i, r) &= -\frac{1}{2} \sum_i \operatorname{tg}^2 \alpha_i \left(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_1^4}d^2 + \frac{1}{\alpha_1^6}d^4 + \dots \right) s = \\ &= g_0 + g_2 d^2 s + g_4 d^4 s + \dots, \end{aligned}$$

де

$$g_{2n} = -\frac{1}{2} \sum_i \operatorname{tg}^2 \alpha_i \frac{1}{\alpha_i^{2n+2}}.$$

Використаємо співвідношення

$$\frac{\sin^2 d}{d(2d + \sin 2d)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \alpha_i \frac{1}{d^2 - \alpha_i^2},$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \alpha_i \frac{1}{d^2 - \alpha_i^2} = g_0 + g_2 d^2 + \dots + \frac{\sin^2 d}{d(2d + \sin 2d)} = a_0 + a_2 d^2 + \dots,$$

тобто маємо $g_{2n} = a_{2n}$, $n = 0, 1, \dots$.

Звідси одержуємо

$$F_s q = \frac{1}{2} \sum_i \operatorname{tg}^2 \alpha_i V_*(\alpha_i, r) + (a_0 + a_2 d^2 + \dots) s.$$

Підставляючи отримані співвідношення у формулу (4), запишемо функцію для визначення переміщень у вигляді

$$w(x, y, h\zeta) = \frac{1-\nu}{G} h \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\zeta \operatorname{tg}^2 \alpha_i V_*(\alpha_i, r) + c \operatorname{tg}^2 \beta_i V_*(\beta_i, r)) + \frac{3}{4} (p_0 - 0.8 p_2) + S_a + \zeta S_s \right], \quad (11)$$

де $S_s = (a_0 + a_2 d^2 + \dots) s$, $S_a = (b_0 + b_2 d^2 + \dots) s$.

Коефіцієнти рядів у виразах для S_s , S_a є такими:

$$a_0 = 0.25, \quad a_2 = 0, \quad a_4 = -0.00555556, \quad a_6 = -0.0010582, \\ b_0 = 0.11571, \quad b_2 = 0.0020317.$$

Приклад. Нехай

$$s = C \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) S(r/R), \quad (12)$$

де $C = \text{const}$, $S(x) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

При $r < R$ для часткового розв'язку V_0 рівняння (9) маємо

$$V_0(r) = -\frac{s}{\alpha^2} + 4 \frac{C}{\alpha^4} \frac{h^2}{R^2}, \quad V_0(R) = 4 \frac{h^2}{R^2} \frac{C}{\alpha^4}, \quad V_0'(R) = \frac{1}{R} \frac{2C}{\alpha^2}.$$

Тоді

$$A = -2C \frac{2 \frac{h^2}{R\alpha} K_1(\alpha R) + K_0(\alpha R)}{R^2 \alpha^2}, \quad B = 2C \frac{2 \frac{h^2}{R\alpha} I_1(\alpha R) - I_0(\alpha R)}{R^2 \alpha^2}, \\ S_s = a_0 s - 4a_2 \frac{h^2}{R^2} C, \quad S_a = b_0 s - 4b_2 \frac{h^2}{R^2} C.$$

Для цього випадку функцію p_0 визначаємо з рівняння

$$d^4 p_0 = C \begin{cases} 1 - r^2/R^2, & r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

розв'язок якого набуде вигляду

$$p_0 = C \left(\frac{R}{h} \right)^4 f_2(r/R), \quad d^2 p_0 = C \left(\frac{R}{h} \right)^2 f_1(r/R),$$

де

$$f_2(u) = \begin{cases} -\frac{u^6}{576} + \frac{u^4}{64} + \frac{u^2}{64} - \frac{17}{576}, & u \leq 1, \\ \frac{1+3u^2}{48} \ln u, & u > 1, \end{cases} \\ f_1(u) = \begin{cases} -\frac{u^4}{16} + \frac{u^2}{4} + \frac{1}{16}, & u \leq 1, \\ \frac{1}{4} (\ln u + 1), & u > 1. \end{cases}$$

Таким чином, співвідношення для переміщень $w(x, y, h\zeta) = \gamma(\zeta\Phi + \Psi)$, отримані з розв'язку (6) операторним методом, є достатньо простими. Ряди в цих розв'язках є швидкозбіжними у точках пластини, віддалених від точок прикладання сил. Однак для малих значень відстаней ряди є повільно-збіжними.

2. Застосування перетворення Ганкеля. Для визначення прогинів в околі точок прикладання сил ефективним є використання іншого підходу, який базується на інтегральному перетворенні Ганкеля.

Врахуємо, що

$$\delta(x - x_j)(y - y_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r_j) d\lambda, \quad (13)$$

де $J_0(\eta)$ – функція Бесселя, $r_j^2 = (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2$.

Тоді з (4) одержимо

$$q = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \chi_j P_j \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r_j) d\lambda, \quad p = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N P_j \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r_j) d\lambda.$$

Підставляючи наведені вирази для q і p у формулу (6), отримуємо

$$w(x, y, h\zeta) = \frac{1}{2\pi G} (1 - \nu) \left[\zeta \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}^2 \lambda h}{2\lambda h + \text{sh} 2\lambda h} \sum_{j=1}^N \chi_j P_j J_0(\lambda r_j) d\lambda - \int_0^{\infty} \frac{\text{ch}^2 \lambda h}{2\lambda h - \text{sh} 2\lambda h} \sum_{j=1}^N P_j J_0(\lambda r_j) d\lambda \right].$$

Тут згідно з [2]

$$d^2 J_0(\lambda r) = (i\lambda h)^2 J_0(\lambda r).$$

Отриманий вираз для переміщень подамо у вигляді формули (7), в якій

$$\Phi = \int_0^{\infty} \varphi(\eta) \sum_{j=1}^N \chi_j P_j J_0(\eta \rho_j) d\eta, \quad \Psi = \int_0^{\infty} \psi(\eta) \sum_{j=1}^N P_j J_0(\eta \rho_j) d\eta, \quad (14)$$

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{2} \frac{\text{ch} \eta - 1}{\text{sh} \eta + \eta}, \quad \psi(\eta) = \frac{1}{2} \frac{\text{ch} \eta + 1}{\text{sh} \eta - \eta}.$$

2.1. Знаходження функції Φ . Підінтегральна функція $\varphi(\eta)$ у виразі Φ в (14) повільно загасає на нескінченності. Виділимо повільно загасаючі складові з цієї функції. Для цього запишемо

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{2} \frac{\text{ch} \eta - 1}{\text{sh} \eta + \eta} = \frac{1}{2} \frac{1 - 2t + t^2}{1 + 2\eta t - t^2},$$

де $t = \exp(-\eta)$.

Розвинемо цю функцію в ряд

$$\varphi(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\eta) \exp(-n\eta). \quad (16)$$

Коефіцієнти ряду мають вигляд

$$\alpha_0 = 1/2, \quad \alpha_1 = -1 - \eta, \quad \alpha_2 = 1 + 2\eta + 2\eta^2,$$

$$\alpha_3 = -(1 + 3\eta + 4\eta^2 + 4\eta^3).$$

Наступні коефіцієнти визначаються за рекурентною формулою

$$\alpha_{n+2} = \alpha_n - 2\alpha_{n+1}\eta, \quad n > 1.$$

Запишемо інтеграл

$$\int_0^{\infty} \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = \Phi_M(\rho) + W_M^{(s)}(\rho),$$

де

$$\Phi_M(\rho) = \int_0^{\infty} \varphi_M(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \quad \varphi_M(\eta) = \varphi(\eta) - \sum_{n=0}^M \alpha_n \exp(-n\eta),$$

$$W_M^{(s)}(\rho) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^M \alpha_n \exp(-n\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = \sum_{n=0}^M U_n(\rho),$$

$$U_n(\rho) = \int_0^{\infty} \alpha_n(\eta) \exp(-n\eta) J_0(\eta \rho) d\eta.$$

Тут M – вибрана кількість членів ряду. З використанням інтегралів з [1] запишемо формули для U_n , $n = 0, 1, 2, 3$:

$$U_0 = \frac{1}{2} A_0(\rho, 0), \quad U_1 = -A_1(\rho, 0) - A_1(\rho, 1),$$

$$U_2 = A_2(\rho, 0) + 2A_2(\rho, 1) + 2A_2(\rho, 2),$$

$$U_3 = -A_3(\rho, 0) - 3A_3(\rho, 1) - 4A_3(\rho, 2) - 4A_3(\rho, 3),$$

де

$$A_n(\rho, k) = \int_0^{\infty} \eta^k e^{-\eta \rho} J_0(\eta \rho) d\eta = k! \left(\frac{R_n}{n} \right)^{k+1} P_k(R_n), \quad R_n = \left(\sqrt{\left(\frac{\rho}{n} \right)^2 + 1} \right)^{-1},$$

$P_n(x)$ – поліноми Лагранжа.

Оскільки у формулі для функції $\Phi_M(\rho)$ підінтегральна функція має порядок $O(\exp(-M\eta))$, то при великих значеннях аргументу її можна обчислити за допомогою відомих квадратурних формул. При малих значеннях аргументу ρ функцію $\Phi_M(\rho)$ можемо записати у вигляді швидкозбіжного ряду. Для цього використаємо розвинення $J_0(x)$ в ряд

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n},$$

де

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!^2}, \quad n > 0.$$

Тоді

$$\Phi_M(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(M)} \rho^{2n}, \quad (17)$$

$$\text{де } b_n^{(M)} = a_n \int_0^{\infty} \varphi_M(\eta) \eta^{2n} d\eta.$$

Ряд (17) збігається при $\rho < M$. На основі наведених співвідношень отримуємо

$$\Phi = \sum_{j=1}^M \chi_j P_j \left[\Phi_M(\rho_j) + W_M^{(s)}(\rho_j) \right]. \quad (18)$$

2.2. Знаходження функції Ψ . Запишемо

$$\psi(\eta) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ch} \eta + 1}{\operatorname{sh} \eta - \eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(\eta) \exp(-n\eta) \quad (19)$$

Коефіцієнти ряду (19) мають вигляд

$$\beta_0 = \alpha_0, \quad \beta_1 = -\alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \quad \beta_3 = -\alpha_3, \quad \dots$$

Функцію Ψ запишемо як

$$\Psi = \int_0^{\infty} \psi_M(\eta) \sum_{j=1}^N P_j J_0(\eta \rho_j) d\eta + \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^M \beta_n(\eta) \exp(-n\eta) \sum_{j=1}^N P_j J_0(\eta \rho_j) d\eta.$$

Розглянемо інтеграл

$$\Psi_* = \int_0^{\infty} \psi_M(\eta) \sum_{j=1}^N P_j J_0(\eta \rho_j) d\eta.$$

Тут функція ψ_M при малих значеннях аргументу має порядок $\psi_n = O(1/\eta^3)$, тому порядок інтегрування і підсумовування не можна змінювати. З використанням умов рівноваги можна перевірити, що цю функцію з точністю до сталої можемо записати у вигляді

$$\Psi_* = \int_0^{\infty} \psi_M(\eta) \sum_{j=1}^N P_j \left[J_0(\eta \rho_j) - a_0 - a_1 \rho_j^2 \eta^2 \right] d\eta + \text{const}. \quad (20)$$

Звідси

$$\Psi_* = \sum_{j=1}^N P_j \Psi_M(\rho_j),$$

де

$$\Psi_M(\rho_j) = \int_0^{\infty} \psi_M(\eta) \left[J_0(\eta \rho_j) - a_0 - a_1 \rho_j^2 \eta^2 \right] d\eta.$$

Тоді

$$\Psi(\rho_j) = \sum_{j=1}^N P_j \left[\Psi_M(\rho_j) + W_M^{(a)}(\rho_j) \right], \quad (21)$$

де

$$W_M^{(a)}(\rho_j) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^M \beta_n(\eta) \exp(-n\eta) J_0(\eta \rho_j) d\eta = \sum_{n=0}^M (-1)^n U_n(\rho_j).$$

Функцію $\Psi_M(\rho)$ при малих значеннях аргументу можемо записати у вигляді ряду

$$\Psi_M(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(M)} \rho^{2n}, \quad c_n^{(M)} = a_n \int_0^{\infty} \psi_M(\eta) \eta^{2n} d\eta. \quad (22)$$

Обчислені коефіцієнти рядів (17) і (22) при $M = 1, 2$ наведено в табл. 1.

Таблиця 1

$M \backslash$	$b_0^{(M)}$	$b_1^{(M)}$	$b_2^{(M)}$	$b_3^{(M)}$	$b_4^{(M)}$	$b_5^{(M)}$	$b_6^{(M)}$	$b_7^{(M)}$	$b_8^{(M)}$	$b_9^{(M)}$
1	0.8324	-0.4185	0.1919	-0.0760	0.0271	-0.0090	0.0028	-0.0009	0.0003	-0.0001
2	-0.6675	0.2065	-0.0542	0.0119	-0.0023	0.0004	-0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
$M \backslash$	$c_0^{(M)}$	$c_1^{(M)}$	$c_2^{(M)}$	$c_3^{(M)}$	$c_4^{(M)}$	$c_5^{(M)}$	$c_6^{(M)}$	$c_7^{(M)}$	$c_8^{(M)}$	$c_9^{(M)}$
1	0.0000	0.0000	0.4638	-0.1138	0.0330	-0.0099	0.0030	-0.0009	0.0003	-0.0001
2	0.0000	0.0000	0.2178	-0.0259	0.0037	-0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000

В отримані вище співвідношення (7) і (21) для переміщень входять функції U_a і $\Psi_M(\rho)$. Вони визначені з точністю до квадратичної функції, яка не впливає на переміщення при розгляді системи самозрівноважених сил. Можна перевірити, що при $M = 1$ функції $\Psi_M(\rho)$ і $U_a(\rho_j^*)$ будуть співпадати, якщо до функції $U_a(\rho_j^*)$ додати $f_\varepsilon(\rho_j) = c_0 + c_1\rho_j^2$, де $c_0 = 2.9298$, $c_1 = -1.2012$. Різницю функцій U_a і f_a наведено на рис. 1 суцільною лінією, а функцію f_ε – крапками.

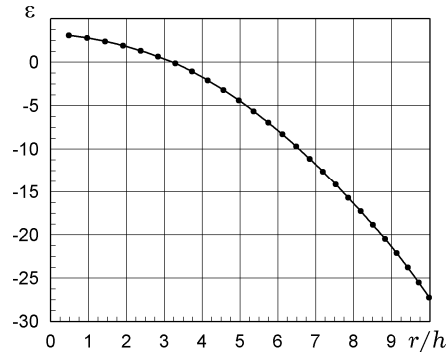


Рис. 1. Різниця функцій $U_a - f_a$.

Результати розрахунків відносних переміщень $w(x,0,h)/\gamma$ при дії однієї зосередженої сили, прикладеної в точці $(0,0,h)$, для різних значень r/h наведено в табл. 2. Практично точні значення переміщень w^{ex}/γ отримано з використанням перетворення Ганкеля, коли функції Φ_M , Ψ_M знаходили чисельним інтегруванням. У наступному стовпчику подано результати обчислень, коли ці функції знаходили за допомогою рядів Маклорена при $M = 1$, утримуючи в експоненціальних рядах десять членів ($K = 10$). Також у таблиці наведено значення переміщень, розраховані за формулами (7), у яких в експоненціальних рядах утримували $K = 2, 1, 0$ членів.

Таблиця 2

r/h	w^{ex}/γ	$w(x,0,h)/\gamma$			
		$K=10, M=1$	$K=2$	$K=1$	$K=0$
0.2	7.9105	7.9105	6.9298	5.6873	1.9072
0.4	2.9350	2.9349	2.8705	2.6316	1.0446
0.6	1.3116	1.3115	1.3068	1.2611	0.5440
0.8	0.5439	0.5439	0.5437	0.5367	0.2142
1.0	0.1365	0.1365	0.1366	0.1364	0.0000
1.2	-0.0719	-0.0719	-0.0719	-0.0714	-0.1203
1.4	-0.1472	-0.1472	-0.1472	-0.1469	-0.1565
1.6	-0.1192	-0.1193	-0.1192	-0.1191	-0.1128
1.8	-0.0023	-0.0023	-0.0023	-0.0023	0.0088
2.0	0.1970	0.1969	0.1969	0.1969	0.2079
2.2	0.4759	0.4759	0.4758	0.4758	0.4849
2.4	0.8337	0.8341	0.8336	0.8336	0.8404
2.6	1.2709	1.2731	1.2708	1.2708	1.2756
2.8	1.7885	1.7994	1.7883	1.7883	1.7915
3.0	2.3876	2.4361	2.3875	2.3875	2.3895

З даних у табл. 2 бачимо, що переміщення можна обчислювати з достатньою для практики точністю при використанні елементарних формул:

- а) при $r/h < 2.8$ – за формулами (14), (18) і (21), у яких функції Φ_M , Ψ_M визначаються рядами при $M = 1$;
 б) при $r/h > 2.8$ – за формулою

$$w(x, y, h\zeta) = \gamma \frac{3}{16} \ln \rho (\rho^2 - 3.2).$$

3. Визначення переміщень на основі прикладних теорій згину плит.

Для визначення прогинів плит в літературі використовують різні наближені підходи.

Для визначення переміщень використовується рівняння Рейснера

$$\Delta^2 w_R = \frac{(1 - c_R h^2 \Delta) s}{D}, \quad (23)$$

де s – прикладене до верхньої межі нормальне навантаження,

$$c_R = \frac{2}{5} \frac{2 - \nu}{1 - \nu}.$$

З використанням операторного методу переміщення в [3] наближено визначаються з рівняння

$$\Delta^2 w_M = \frac{(1 - c_M h^2 \Delta) s}{D}, \quad (24)$$

де $c_M = 0.8$.

Зазначимо, що для пластини нескінченних розмірів маємо

$$w_R = (1 - c_R h^2 \Delta) w_K, \quad w_M = (1 - c_M h^2 \Delta) w_K. \quad (25)$$

Для визначення переміщень найбільше поширеним в літературі є рівняння Кірхгофа – Лява

$$\Delta^2 w_K = \frac{s}{D}. \quad (26)$$

У випадку дії зосередженої в точці (x_0, y_0) сили P отримаємо

$$w_K = \frac{P}{8\pi D} h^2 \rho_0^2 \ln \rho_0 = \frac{3}{8} \gamma P \rho_0^2 \ln \rho_0,$$

де $\rho_0 = r_0/h$, $r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Тоді на підставі формул (25) знаходимо

$$w_j = \frac{3}{8} \gamma P \ln \rho_0 (\rho_0^2 - 4c_j), \quad j = M, K, R. \quad (27)$$

З цієї формули видно, що при значних відстанях від прикладеної сили всі три розв'язки за різними теоріями практично збігаються. Зокрема, відносна похибка розв'язку з використанням рівнянь Кірхгофа – Лява при $r_0 > 20h$ є меншою ніж 1%.

Для випадку, коли пластина перебуває під дією зусиль, які розподілені по параболічній області (12), маємо рівняння

$$d^4 w_K = \frac{C}{D} \begin{cases} (1 - r^2)/R^2, & r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Розв'язок цього рівняння матиме вигляд

$$w_K = \frac{C}{D} \left(\frac{R}{h}\right)^4 f_2(r/R), \quad h^2 \Delta w_K = \frac{C}{D} \left(\frac{R}{h}\right)^2 f_1(r/R).$$

4. Результати обчислення переміщень за дії зосереджених сил. Обчислено відносні переміщення, які виникають при дії сили P , прикладеної у точці $(0,0,h)$ при $z = h$, та двох сил $P/2$, прикладених у точках $x = \pm mh, y = 0, z = -h$. За точку відліку (в якій переміщення дорівнюють нулеві) вибрано точку $x = 4h, y = 0$. На рис. 2а наведено розраховані відносні переміщення $\bar{w} = w/(P\gamma)$ при $z = -h, y = 0, m = 5$. Тут кривою 1 зображено точний розв'язок, кривою 2 – наближений (формула (11)), кривою 3 – обчислений за теорією Рейснера, кривою 4 – обчислений за теорією Кірхгофа – Лява.

Розраховані відносні переміщення на протилежній межі (при $z = h$) наведено на рис. 2б.

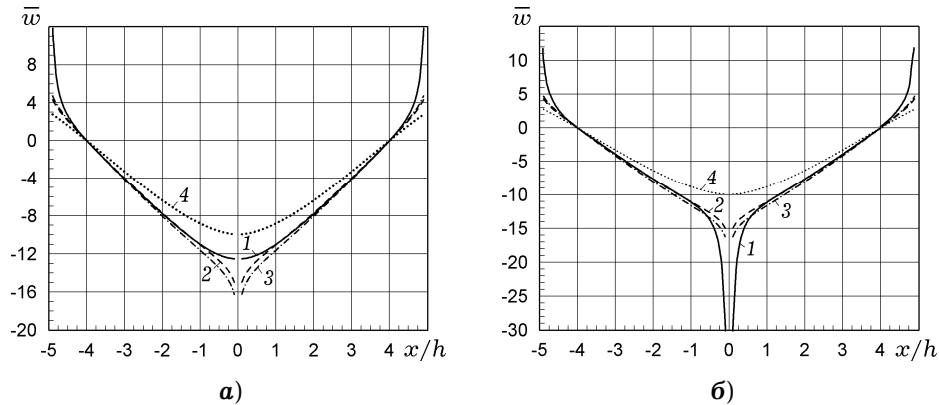


Рис. 2. Відносні переміщення: а) – знизу плити ($z = -h$) від дії трьох сил ($m = 5$); б) – зверху плити ($z = h$) від дії трьох сил ($m = 5$).

Наведемо результати обчислень при різних відстанях між силами. Розглянуто випадок близько розміщених сил $P, -2P, P$, прикладених відповідно у точках $(-2h, 0, -h), (0, 0, -h), (2h, 0, -h)$. Розраховані відносні переміщення $\bar{w} = w/(P\gamma)$ при $y = 0, z = h$ наведено на рис. 3а, а при $x = 0, z = h$ – на рис. 3б.

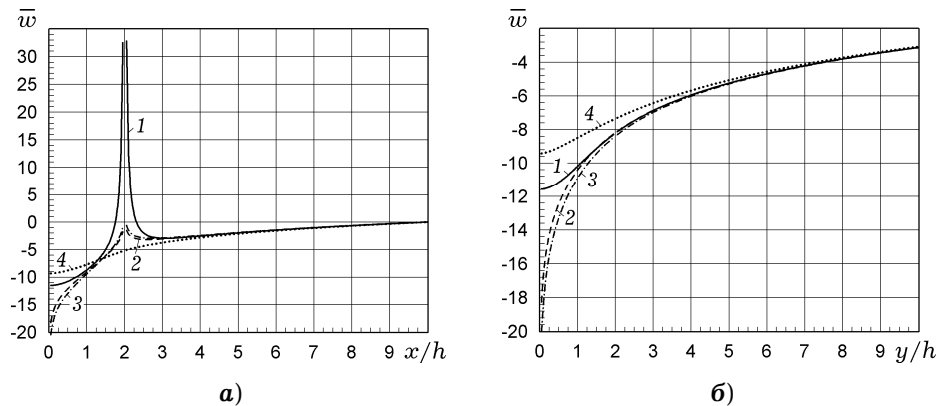


Рис. 3. Відносні переміщення: а) – при $y = 0, z = h$; б) – при $x = 0, z = h$.

Із аналізу проведених обчислень випливає, що при визначенні вертикальних переміщень у точках, що віддалені від сили на відстань, більшу від півтовщини пластини, можна користуватися рівняннями теорії Рейснера. Щодо теорії Кірхгофа – Лява, то її результати можна використовувати тільки на значних відстанях ($x \geq 8h$) від точок прикладання зосереджених сил.

Зазначимо, що функцію переміщення при значеннях $\rho > 2.5$ можна з високою точністю визначити за формулою

$$w = \gamma P F_M(\rho), \quad (29)$$

де $F_M(\rho) = \frac{3}{8} \ln \rho(\rho^2 - 3.2)$.

5. Результати розрахунків за дії розподіленого навантаження. Приймемо, що пластина навантажена розподіленими зусиллями по трьох областях, які описуються формулами (12) і центри яких розміщені в точках $(\pm a, 0, h)$, $(0, 0, h)$, а значення C для цих областей покладаємо рівними $-P/2, P, -P/2$.

Розрахунки виконано для різних значень R , коли $a = 7h$. Переміщення плити визначається з точністю до сталої. При обчисленнях переміщення зафіксовано в точці $x = 4h, y = 0$ (тобто ця точка є точкою відліку).

На рис. 4 наведено розраховані при $y = 0, z = h$ відносні переміщення $\bar{w} = w/(\gamma P_0)$ при малій області навантаження, коли $R/h = 0.5$. Тут кривій **1** відповідає точний розв'язок (за тривимірною теорією), кривій **2** відповідає наближений розв'язок, що визначається на основі співвідношень (11), у яких знехтувано рядами S_s, S_a , а кривій **3** відповідає розв'язок, отриманий на основі гіпотези Кірхгофа – Лява.

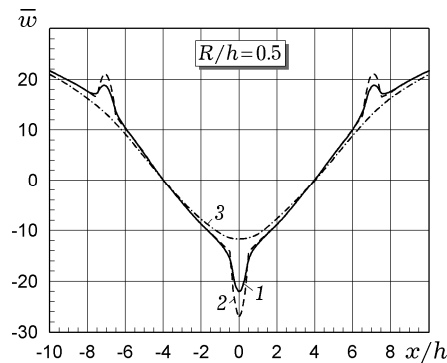


Рис. 4. Відносні переміщення межі плити при радіусі області навантаження $R = 0.5h$.

Результати обчислень при більших областях дії навантаження $R/h = 1, R/h = 2$ наведено відповідно на рис. 5, рис. 6.

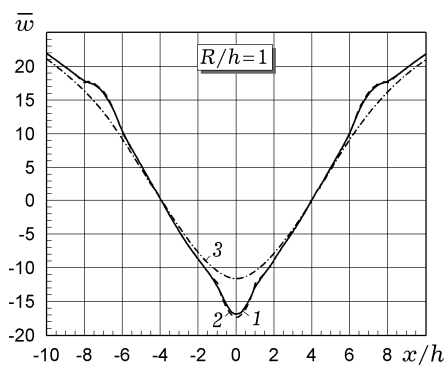


Рис. 5. Відносні переміщення межі плити при радіусі області навантаження $R = h$.

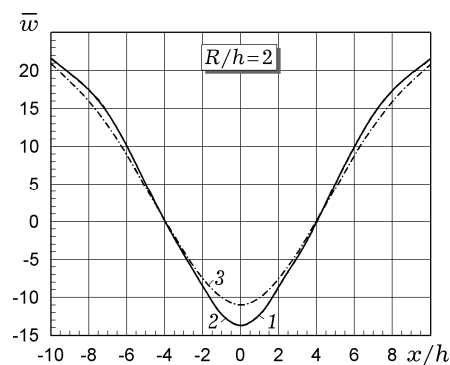


Рис. 6. Відносні переміщення межі плити при радіусі області навантаження $R = 2h$.

Із результатів, наведених на рисунках, випливає, що співвідношення (11) дають змогу визначати переміщення у плитах при локалізованих навантаженнях, коли діаметр області, в якій діють прикладені зусилля, більший від товщини плити. Водночас переміщення, визначені на основі теорії Кірхгофа – Лява, в усіх розглянутих випадках істотно відрізняються від точних.

Відносні прогини плити при більших відстанях між зовнішніми силами наведено на рис. 7 ($a/h = 10$) та рис. 8 ($a/h = 12$).

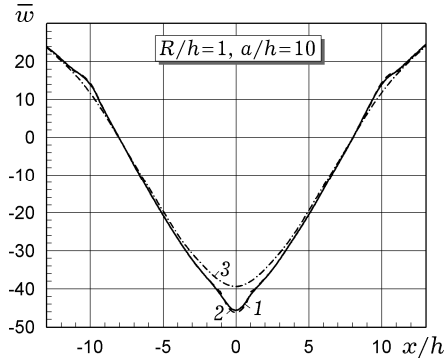


Рис. 7. Відносні прогини плити при $a/h = 10$.

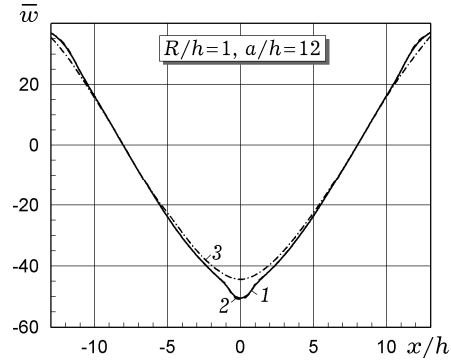


Рис. 8. Відносні прогини плити при $a/h = 12$.

При більших відстанях між прикладеними зусиллями для визначення переміщень уже можна використовувати технічні або прикладні теорії (Рейснера, Кірхгофа – Лява) в усіх точках пластини, за винятком точок, близьких до прикладеного навантаження.

Прогини плити кругової форми при дії зосередженої сили. Приймемо, що жорстко закріплена на зовнішній границі плита товщини $2h$ і радіуса a перебуває під дією зосередженої в точці (x_0, y_0, h) сили P .

Технічна теорія. Розв'язок цієї задачі на основі технічної теорії плит (теорія Кірхгофа – Лява) отримано в [6]:

$$w = w_0 + w_{\Delta}, \quad (30)$$

де

$$w_0 = \frac{P}{8\pi D} R_1^2 \ln R_1, \quad w_{\Delta} = \frac{P}{8\pi D} \left[-R_1^2 \ln(\delta R_*) + \frac{1}{2}(\delta^2 R_*^2 - R_1^2) \right],$$

$$R_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad R_* = \sqrt{(x - x_*)^2 + (y - y_*)^2},$$

$$R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \delta = R_0/a, \quad x_* = a^2 x_0/R_0^2, \quad y_* = a^2 y_0/R_0^2.$$

Тут w_0 – частковий розв'язок, а w_{Δ} – коригувальний.

Уточнений розв'язок запишемо у вигляді

$$W = W_0 + W_k,$$

де W_0 – точний розв'язок для переміщень за дії зосередженої сили, який визначаємо за формулою (7). Коригувальний розв'язок W_k , який забезпечує умови жорсткого закріплення плити на межі, знайдемо на основі технічної теорії. При цьому приймемо, що точка (x_0, y_0) розміщена на віддалі, більшій ніж $7h$ від межі плити. Тоді, оскільки у такому випадку на граничному контурі $x^2 + y^2 = a^2$ маємо $W_0 \sim w_0$, то за коригувальний розв'язок приймемо $W_k = w_k$. Обчислення виконано при розміщенні сили P в точці

$(x_0, 0, h)$. На рис. 9 суцільними лініями наведено відносні переміщення $\bar{w}_0 = w / \left(\frac{P}{8\pi D} \right)$ на осі Ox для значень $x_0/h = 0, 0.25, 0.5$ при $a = 10h$. Штриховими лініями на рис. 9 показано переміщення, визначені за технічною теорією.

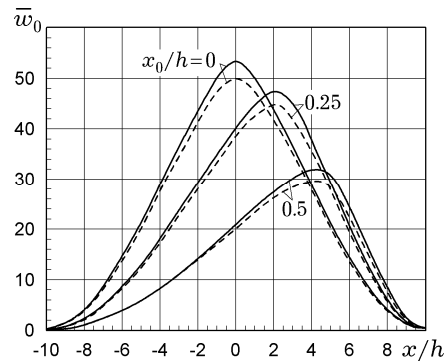


Рис. 9. Відносні переміщення у круглій плиті.

Висновки. Запропоновано метод визначення прогинів у пластинах при локалізованих навантаженнях на основі співвідношень теорії пружності та прикладних теорій. Для випадку дії зосереджених сил розв'язок побудовано на основі символічного методу Лур'є і формул розвинення Ващенко-Захарченка. Отримані співвідношення для переміщень записано через експоненціальні ряди, які є швидкозбіжними при достатньо великих значеннях відстаней від дії прикладених сил, однак, в околі дії сил виявились повільнозбіжними. Для побудови ефективного розв'язку додатково застосовано інтегральне перетворення Ганкеля. Розроблено методику обчислення інтегралів від функцій, що повільно загасають на нескінченності та мають особливі точки. Для визначення переміщень в околі дії сил отримано елементарні формули, що містять швидкозбіжний ряд Тейлора. Виконано дослідження прогинів у пластині у випадку дії системи зосереджених сил або за дії розподіленого по декількох областях навантаження. Побудовано уточнений розв'язок для кругової пластини, закріпленої на межі і навантаженої ексцентрично прикладеною силою. Встановлено випадки, коли для визначення прогинів можуть бути використані прикладні теорії.

1. Градштейн И. С., Рыжик И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. – Москва: Наука, 1971. – 1100 с.
2. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1955. – 491 с.
3. Максимович В. Н. Напряженное состояние неравномерно нагретых, нагруженных по граничным поверхностям пластин // Прикл. математика и механика. – 1979. – **43**, № 6. – С. 1065–1072.
4. Максимович М. О., Харченко Є. В. Визначення напружень в анізотропній смузі з отворами з використанням сингулярних інтегральних рівнянь та розв'язку Гріна // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 3. – С. 69–77.
5. Снеддон И. Преобразования Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
Те саме: *Sneddon I. Fourier transforms.* – New York: McGraw-Hill, 1951. – 542 p.
6. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 508 с.
Те саме: *Timoshenko S. P. Theory of elasticity.* – New York: McGraw-Hill, 1934. – 416 p.
7. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.
8. Albuquerque E. L., Sollero P., Venturini W. S., Aliabadi M. H. Boundary element analysis of anisotropic Kirchhoff plates // Int. J. Solids Struct. – 2006. – **43**, No. 14-15. – P. 4029–4046. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.03.027>.

9. Cheng Z. Q., Reddy J. N. Octet formalism for Kirchhoff anisotropic plates // Proc. Roy. Soc. London **A**. – 2002. – **458**, No. 2022. – P. 1499–1517.
– <https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0934>
10. Hwu C. Anisotropic elastic plates. – New York–London: Springer, 2010. – xvi+673 p.
11. Szilard R. Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods. – Hoboken: John Wiley & Sons, 2004. – 1056 p.
12. Ventsel E., Krauthammer T. Thin plates and shells: Theory, analysis, and applications. – Boca Raton: CRC Press, 2001. – 688 p.

DETERMINATION OF PLATE DEFLECTIONS UNDER LOCALIZED LOADS

The problem of determining displacements in plates under localized loads based on the relations of the theory of elasticity and applied theories is considered. The solution of the problem for the case of action of forces is obtained on the basis of Lurie's symbolic method and the formulas of the Vashchenko-Zakharchenko expansion in the form of exponential series. To find the displacements near the applied forces, where the constructed series are slowly converging, the Hankel integral transformation is additionally used. A method of isolation of slowly decaying components in integrand functions is proposed based on which the displacement is written via rapidly converging Taylor series. The cases where applied theories can be used to determine deflections are established.

Key words: *localized loads, displacements, plate deflections, integral Hankel transformation, applied theories.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
18.10.21