

ВПЛИВ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ НА МІЖФАЗНЕ ВКЛЮЧЕННЯ, ЩО ПЕРЕБУВАЄ В УМОВАХ ГЛАДКОГО КОНТАКТУ В НЕОДНОРІДНОМУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОМУ ПРОСТОРИ

Досліджено вплив зосереджених сил на кругове включення, яке перебуває в умовах гладкого контакту у площині з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів. Проблему зведено до крайової задачі Рімана за частиною змінних у просторі узагальнених функцій і побудовано її розв'язок у явному вигляді, що дозволило отримати залежність поступальних і колових зміщень включення та стрибків напружень і зміщень на включенні від зосереджених сил і співвідношення між пружними сталими півпросторів. Досліджено вплив на поступальні зміщення і стрибки нормальних напружень наявності зосереджених сил або тільки в одному, або обох півпросторах для різних комбінацій матеріалів півпросторів і форми включення.

Ключові слова: фундаментальні розв'язки, неоднорідний трансверсально-ізотропний простір, кругове включення, узагальнені функції.

Міжфазні області, тобто області з'єднання різних матеріалів, які перебувають під дією пружних і температурних полів, завжди були предметом досліджень багатьох авторів як області можливого руйнування.

Для різних середовищ цієї проблемі присвячено чимало робіт. Наприклад, у [3–7] розглянуто задачі стаціонарної термопружності для тіл із теплопроникним дисковим включенням, між поверхнями якого існує неідеальний тепловий контакт, а також задачі з тонким теплоактивним дисковим включенням. Задачі зведено до гіперсингулярних інтегральних рівнянь першого та другого роду, для яких отримано точні розв'язки.

У роботах [2, 9–12, 15, 18] неосесиметричні задачі пружності і термопружності про міжфазні концентратори напружень типу тріщин або жорстких включень у кусково-однорідних трансверсально-ізотропних просторах за допомогою методу сингулярних інтегральних співвідношень [36] зведено до систем двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) і запропоновано метод їхнього розв'язування. Аналогічний підхід застосовано в роботах [8, 13, 14, 20–23] до розв'язання задач про міжфазні і внутрішні дефекти в кусково-однорідних анізотропних середовищах. Задачі термопружності в однорідних і кусково-однорідних трансверсально-ізотропних просторах з міжфазними включеннями при дії теплових джерел досліджено в роботах [32, 34].

При математичній постановці і розв'язанні задач про дефекти необхідно задати граничні умови на самому дефекті, такі як напруження на берегах тріщини або переміщення на включенні. Оскільки при фізичній постановці задач про визначення полів напружень і переміщень в околі концентраторів напружень відомими є напруження або переміщення на границі області, в деяких внутрішніх точках або на нескінченності (для необмежених тіл), то визначення граничних умов на дефекті є окремою проблемою.

У рамках лінійної теорії пружності для розв'язання цієї проблеми потрібно знати розподіл поля напружень і переміщень у відповідних кусково-однорідних тілах без дефектів за наявності об'ємних сил.

Зокрема, для кусково-однорідного ізотропного і трансверсально-ізотропного просторів такі розв'язки наведено відповідно в роботах [40] і [46], однак у [40] вони мають достатньо громіздку структуру. В роботах [27] і [37] побудовано функції Гріна для кусково-однорідних трансверсально-ізотроп-

✉ krivoy-odessa@ukr.net

них просторів за наявності зосередженого теплового джерела та відповідно за відсутності і наявності термодифузії. Для шаруватого термопружного середовища функцію Гріна побудовано в роботах [24, 42]. Функції Гріна для кусково-однорідних трансверсально-ізотропних просторів за наявності зосередженого джерела тепла та відсутності термодифузії побудовано в [27, 28], а за наявності термодифузії – у [39]. У [41] побудовано функцію Гріна для тривимірного трансверсально-ізотропного простору з урахуванням орієнтації осей симетрії. Для п'єзо- та магнітоелектричних складових трансверсально-ізотропних просторів функції Гріна побудовано в [28, 42, 48]. Фундаментальні розв'язки для пористих трансверсально-ізотропних матеріалів побудовано в [29, 43], а для функціонально-градієнтних матеріалів – у [25, 47]. У [24, 39, 40] побудовано функції Гріна для шаруватого термочутливого середовища. У [26, 44, 45] аналогічні задачі для трансверсально-ізотропних композитних матеріалів розв'язано чисельними методами.

У роботах [16–19, 30, 31, 33, 35] запропоновано метод фундаментальних розв'язків у просторі $\mathfrak{V}(\mathbb{R}^3)$ узагальнених функцій повільного зростання, який є ефективним методом розв'язання цієї проблеми.

При математичній постановці задач про дослідження напружено-деформованого стану тіл з внутрішніми і міжфазними дефектами у роботах [10–12] задавали значення результуючих сил і моментів на включенні.

У цій статті пропонується дещо інший підхід: вважається, що середовище завантажене в довільній області, а саме включення перебуває в стані рівноваги, тому результуючі сили і моменти на ньому вважаються відсутніми. Зокрема, розглянуто кругове абсолютно жорстке міжфазне включення, що знаходиться в умовах гладкого контакту в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі, а у довільних точках простору прикладена одна або дві зосереджені сили.

1. Постановка задачі. Нехай у довільній точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору діє зосереджена сила $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$. У площині $z = 0$ всюди, за винятком кругової області $\Omega = \{\sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$, два різних трансверсально-ізотропних півпростори ідеально контактують. Напружено-деформований стан простору описується вектором

$$\mathbf{v} = \{v_k\}_{k=1, \dots, 9} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}, u, v, w\}. \quad (1)$$

Позначимо стрибки та суми пружних характеристик при перетині площини $z = 0$ так:

$$\chi_k^\pm(x, y) = \langle \zeta_k(x, y) \rangle^\pm = \zeta_k^+(x, y) \pm \zeta_k^-(x, y), \quad \{\zeta_k^\pm\}^9 = \{v_k\}^9 \Big|_{z=\pm 0}, \quad k = 1, \dots, 9. \quad (2)$$

Тоді умови ідеального контакту різних трансверсально-ізотропних півпросторів поза областю Ω запишемо у вигляді

$$\chi_k^-(x, y) = 0, \quad k = 1, \dots, 9, \quad k \neq 1, 2, 6, \quad (x, y) \notin \Omega. \quad (3)$$

В області Ω міститься абсолютно жорстке включення, яке перебуває в умовах гладкого контакту з півпросторами. У цьому випадку стрибки та суми дотичних напружень дорівнюють нулеві:

$$\chi_k^\pm(x, y) = 0, \quad k = 4, 5, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (4)$$

а стрибки та суми нормальних зміщень визначаються такими формулами:

$$\begin{aligned} \chi_6^+ &= \mathfrak{S}^+(x, y) + 2(\delta_z + \varphi_y y + \varphi_x x), & \chi_6^- &= \mathfrak{S}^-(x, y), & (x, y) &\in \Omega, \\ \mathfrak{S}^\pm(x, y) &= \mathfrak{S}_0^+(x, y) \pm \mathfrak{S}_0^-(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

де δ_z , φ_y , φ_x – відповідно поступальне переміщення включення і кути повороту включення навколо відповідних осей; функції $\mathfrak{G}_0^\pm(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, описують форму граней включення, причому $\mathfrak{G}_0^+(x, y) > 0$, $\mathfrak{G}_0^-(x, y) < 0$. Крім того, будемо вважати виконаною умову $|\mathfrak{G}^-(x, y)| < 0.3a$. Це означає, що включення можемо вважати тонким, і оскільки воно є абсолютно жорстким, то вплив його граней на півпростір (граничні умови) можна знести на площину $z = 0$. Такий підхід є деяким наближенням до точної постановки, однак, як показує порівняння з розв'язками окремих задач у точній постановці [35], похибка є незначною і прямує до нуля при зменшенні товщини включення. У той же час за такого підходу значно спрощується математична модель задачі, що дозволяє отримати її точний розв'язок. Цей підхід, зокрема, застосовано в [10–12, 14] для дослідження залежності від форми включення концентрації напружень в околі міжфазних дефектів у складових анізотропного простору.

Величини δ_z , φ_y , φ_x визначаємо із шести рівнянь рівноваги

$$\iint_{\Omega} \chi_1^-(x, y) dx dy = 0, \quad \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \chi_1^-(x, y) dx dy = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

2. Побудова сингулярних інтегральних співвідношень. Виходячи з диференціальних рівнянь рівноваги і узагальненого закону Гука, у просторі узагальнених функцій повільного зростання $\mathfrak{Z}'(\mathbb{R}^3)$ запишемо таку крайову задачу відносно компонент вектора \mathbf{v} :

$$\mathbf{D}[z, \partial_1, \partial_2, \partial_3] \mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{v}, \mathbf{F} \in \mathfrak{Z}'(\mathbb{R}^3), \quad (7)$$

$$\chi_k^-(x, y) = 0, \quad k = 1, \dots, 9, \quad k \neq 1, 2, 6, \quad (x, y) \notin \Omega, \quad (8)$$

$$\chi_k^\pm(x, y) = 0, \quad k = 4, 5, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (9)$$

$$\chi_6^+ = \mathfrak{G}^+(x, y) + 2(\delta_z + \varphi_y y + \varphi_x x), \quad \chi_6^- = \mathfrak{G}^-(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (10)$$

$$v_k(x, y, z)|_{(x, y, z) \rightarrow \infty} = 0, \quad k = 1, \dots, 9. \quad (11)$$

Тут введено позначення

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{D}_0^\top \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^\top = \{F_{0j}\}^9 = -\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \|P_1, P_2, P_3, \mathbf{O}_{1 \times 6}\|,$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{11} & s_{13} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix},$$

$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$; $s_{kj} = \theta(z)s_{kj}^+ + \theta(-z)s_{kj}^-$, s_{kj}^\pm – коефіцієнти узагальненого закону Гука відповідно для верхнього $z > 0$ і нижнього $z < 0$ півпросторів; $\mathbf{O}_{3 \times 3}$ – нульова матриця розмірності 3×3 .

Розв'язок крайових задач (7)–(11) отримаємо з урахуванням власти-

востей узагальнених функцій і результатів робіт [8–14, 36]. Розглянемо випадок зосередженої вздовж осі Oz сили $\mathbf{P} = (0, 0, P_3)$. Після граничного переходу $z \rightarrow \pm 0$ в отриманих розв'язках складемо суми фізичних величин χ_k^+ , $k = 3, 4, 5, 9$. В результаті отримаємо такі інтегральні співвідношення:

$$\begin{aligned}
\chi_3^+ &= q_{11}\chi_3^-(x, y) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left\{ q_{12} \left[\chi_4^-(t, \tau) \partial_2 \frac{1}{r_0} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \chi_5^-(t, \tau) \partial_1 \frac{1}{r_0} \right] - q_{14}\chi_9^-(t, \tau) \frac{1}{r_0^3} \right\} dt d\tau + \\
&\quad + q_{13} \sum_{j=7}^8 \partial_{j-6}\chi_j^-(x, y) + P_3 \sum_{n=1}^2 \frac{A_{1,n} |z_0|}{(r_*^2 + (\tilde{\xi}_n z_0)^2)^{3/2}}, \\
\chi_4^+ &= q_{22}\chi_4^- - q_{24}\partial_2\chi_9^- + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left\{ -q_{21}\chi_3^- \partial_2 \frac{1}{r_0} + \chi_4^- \left[q_{22}\partial_1 \frac{x-t}{r_0^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \partial_2 \frac{y-\tau}{r_0^2} \right] - q_{22}\chi_5^- \partial_1 \frac{y-\tau}{r_0^2} - q_{23}\chi_7^- \partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} - \chi_8^- \left[\partial_2^2 \frac{1}{r_0} q_{23} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \partial_1^2 \frac{1}{r_0} \tilde{q}_{12} \right] \right\} dt d\tau + (y - y_0) P_3 \sum_{n=1}^2 \frac{A_{2,n}}{(r_*^2 + (\tilde{\xi}_n z_0)^2)^{3/2}}, \\
\chi_5^+ &= q_{22}\chi_5^- - q_{24}\partial_1\chi_9^- + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left\{ -q_{21}\chi_3^- \partial_1 \frac{1}{r_0} - q_{22}\chi_4^- \partial_1 \frac{y-\tau}{r_0^2} + \right. \\
&\quad \left. + \chi_5^- \left[q_{22}\partial_2 \frac{y-\tau}{r_0^2} - \partial_1 \frac{x-t}{r_0^2} \right] - \chi_7^- \left[\partial_1^2 \frac{1}{r_0} q_{23} + \partial_2^2 \frac{1}{r_0} \tilde{q}_{12} \right] - \right. \\
&\quad \left. - q_{23}\chi_8^- \partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} \right\} dt d\tau + (x - x_0) P_3 \sum_{n=1}^2 \frac{A_{2,n}}{(r_*^2 + (\tilde{\xi}_n z_0)^2)^{3/2}}, \\
\chi_9^+ &= \chi_9^- q_{44} + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{q_{41}}{r_0} \chi_3^- - q_{42} \left[\frac{y-\tau}{r_0^2} \chi_4^- + \frac{x-t}{r_0^2} \chi_5^- \right] + q_{43} \left[\chi_7^- \partial_1 \frac{1}{r_0} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \chi_8^- \partial_2 \frac{1}{r_0} \right] \right\} dt d\tau + P_3 \sum_{n=1}^2 \frac{A_{4,n}}{(r_*^2 + (\tilde{\xi}_n z_0)^2)^{1/2}}. \tag{12}
\end{aligned}$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned}
A_{1,n} &= \theta(z_0) A_{1,n}^+ |\xi_n^+| + \theta(-z_0) A_{1,n}^- |\xi_n^-|, \\
A_{k,n} &= \theta(z_0) A_{k,n}^+ + \theta(-z_0) A_{k,n}^-, \quad k = 2, 4, \\
r_0 &= \sqrt{(x-t)^2 + (y-\tau)^2}, \quad r_* = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \\
\tilde{\xi}_n &= \theta(z_0) \xi_n^+ + \theta(-z_0) \xi_n^-.
\end{aligned}$$

Вирази для сталих q_{kn} , q_{kn}^{\pm} через коефіцієнти узагальненого закону Гука, а також формули для $A_{k,n}^{\pm}$ через q_{kn} , q_{kn}^{\pm} наведено в роботі [11].

Зазначимо, що співвідношення (12) узагальнюють співвідношення з роботи [36] для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору за відсутності зосереджених сил.

3. Зведення задачі до двовимірної системи СІР і побудова її точного розв'язку. Використавши другу, третю та четверту рівність із двовимірних сингулярних інтегральних співвідношень для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору (12) і врахувавши умови (3)–(5), відносно невідомих стрибків нормальних напружень і дотичних зміщень отримаємо систему двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left\{ q_{21} \chi_3^- \partial_2 \frac{1}{r_0} + q_{23} \chi_7^- \partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} + \chi_8^- \left[\partial_2^2 \frac{1}{r_0} q_{23} + \partial_1^2 \frac{1}{r_0} \tilde{q}_{12} \right] \right\} dt d\tau = \\
& = -q_{24} \partial_2 \chi_9^- + \sum_{n=1}^2 A_{2,n} \partial_2 \int_0^{\infty} e^{-\bar{\xi}_n |z_0| \rho} J_0(\rho r_0) d\rho, \\
& \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left\{ q_{21} \chi_3^- \partial_1 \frac{1}{r_0} + \chi_7^- \left[\partial_1^2 \frac{1}{r_0} q_{23} + \partial_2^2 \frac{1}{r_0} \tilde{q}_{12} \right] + q_{23} \chi_8^- \partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} \right\} dt d\tau = \\
& = -q_{24} \partial_1 \chi_9^- + \sum_{n=1}^2 A_{2,n} \partial_1 \int_0^{\infty} e^{-\bar{\xi}_n |z_0| \rho} J_0(\rho r_*) d\rho, \\
& \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{q_{41}}{r_0} \chi_3^- + q_{43} \left[\chi_7^- \partial_1 \frac{1}{r_0} + \chi_8^- \partial_2 \frac{1}{r_0} \right] \right\} = \chi_9^+ - q_{44} \chi_9^- - \\
& - \sum_{n=1}^2 A_{4,n} \int_0^{\infty} e^{-\bar{\xi}_n |z_0| \rho} J_0(\rho r_*) d\rho. \tag{13}
\end{aligned}$$

Тут використано такі рівності [36]:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} e^{-\bar{\xi}_n^{\pm} |z_0| \tau} J_0(\tau r_*) d\tau = \frac{1}{(r_*^2 + (\bar{\xi}_n^{\pm} z_0)^2)^{1/2}}, \\
& \int_0^{\infty} \frac{e^{-\bar{\xi}_n^{\pm} |z_0| \tau}}{\rho^{-1}} J_0(\tau r_*) d\tau = \frac{\bar{\xi}_n^{\pm} |z_0|}{(r_*^2 + (\bar{\xi}_n^{\pm} z_0)^2)^{3/2}}, \\
& \partial_1 \int_0^{\infty} e^{-\bar{\xi}_n^{\pm} |z_0| \tau} J_0(\tau r_*) d\tau = -\frac{x - x_0}{(r_*^2 + (\bar{\xi}_n^{\pm} z_0)^2)^{3/2}}, \\
& \partial_2 \int_0^{\infty} e^{-\bar{\xi}_n^{\pm} |z_0| \tau} J_0(\tau r_*) d\tau = -\frac{y - y_0}{(r_*^2 + (\bar{\xi}_n^{\pm} z_0)^2)^{3/2}}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Ввівши комплексні комбінації стрибків і сум $u = \chi_{73}^- + i\chi_{83}^-$, $\bar{u} = \chi_{73}^- - i\chi_{83}^-$, отримаємо таку систему:

$$\begin{aligned}
& q_{21} DK[\chi_3^-] + \frac{q_{23}^+}{2} D\bar{D}K[u] + \frac{q_{23}^-}{2} D^2K[\bar{u}] = -q_{24} D\mathfrak{G}^-(x, y) + \\
& + DP_3 \sum_{n=1}^2 A_{k,n} \int_0^{\infty} e^{-\bar{\xi}_n |z_0| \tau} J_0(\tau r_*) d\tau, \\
& q_{21} \bar{D}K[\chi_3^-] + \frac{q_{23}^+}{2} \bar{D}DK[\bar{u}] + \frac{q_{23}^-}{2} \bar{D}^2K[u] = -q_{24} \bar{D}\mathfrak{G}^-(x, y) + \\
& + \bar{D} \sum_{n=1}^2 A_{k,n} \int_0^{\infty} e^{-\bar{\xi}_n |z_0| \tau} J_0(\tau r_*) d\tau,
\end{aligned}$$

$$q_{41}K[\chi_3^-] + \frac{q_{43}}{2}(\bar{D}K[u] + DK[\bar{u}]) = \mathfrak{G}^+(x, y) - q_{44}\mathfrak{G}^-(x, y) + 2\zeta_6^0 - \sum_{n=1}^2 A_{4,n} \int_0^\infty e^{-\xi_n |z_0|^\tau} J_0(\tau r_*) d\tau, \quad D = \partial_1 - i\partial_2, \quad (15)$$

Співвідношення для операторів \bar{D} і $K[\cdot]$ наведено в [35].

Точний розв'язок системи (13) отримаємо, застосовуючи підхід, описаний у роботах [9–12]. Для цього перейдемо до пружних характеристик простору в циліндричних координатах (ρ, φ, z) і введемо нові функції:

$$v_1^-(\rho, \varphi) = \chi_3^-(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \quad v_3(r, \varphi) = e^{-i\varphi} u^-(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \quad (16)$$

які подамо так:

$$v_j^\pm(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n^{j,\pm}(\rho) e^{in\varphi}, \quad (17)$$

де

$$V_n^{j,-}(\rho) = \Phi_n[v_j^-] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_j^-(\rho, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, \quad j = 1, 3, 5,$$

$$V_{-n}^{3,-}(\rho) = \bar{V}_n^{3,-}(\rho), \quad \bar{V}_n^{3,-}(\rho) = \Phi_n[\bar{v}_3^-].$$

Для визначення коефіцієнтів $V_n^{j,-}(\rho)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, у розвиненні (17) перейдемо в системі (13) до циліндричної системи координат та застосуємо скінченне перетворення Фур'є. Тоді, враховуючи формулу [2]

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho_* \cos(\varphi - \psi) + \rho_*^2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\varphi - \psi)} \int_0^\infty J_k(t\rho) J_k(t\rho_*) dt,$$

подання (16) та теорему про згортку, після нескладних перетворень отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\mathbf{B}W_{n,n}[\mathbf{U}] = \mathbf{G}_n, \quad W_{n,n}[U_{3n}] = G_{3n}, \quad 0 < \rho < a, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (18)$$

$$\mathbf{U} = \{U_{1,n}, U_{2,n}\},$$

$$U_{1,n}(\rho) = V_n^{1,-}(\rho), \quad U_{k,n}(\rho) = 0.5(\tilde{V}_n^{3,-}(\rho) + (-1)^k \tilde{\tilde{V}}_{-n}^{3,-}(\rho)), \quad k = 2, 3,$$

$$\tilde{V}_n^{3,-}(\rho) = \rho^{-n-1} \partial_\rho [\rho^{n+1} V_n^{3,-}(\rho)], \quad \tilde{\tilde{V}}_{-n}^{3,-}(\rho) = \rho^{n-1} \partial_\rho [\rho^{-n+1} \bar{V}_{-n}^{3,-}(\rho)],$$

$$\tilde{q}_{23}^\pm = q_{23}^+ \pm q_{23}^-,$$

$$\mathbf{B} = \{b_{ij}\}_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} q_{21} & \tilde{q}_{23}^+ \\ q_{41} & q_{43} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \{b_{ij}^*\}_{i,j=1,2}, \quad \mathbf{G}_n = \{G_{1,n}, G_{1,n}\},$$

$$G_{1,n} = 0.5\rho^n c_n^+ - q_{24}\Theta_n^-(\rho) + e^{-in\psi_0} P_3 f_{1,n}(\rho), \quad G_{3,n} = b_3 \rho^n c_n^-, \quad b_3 = \frac{1}{g_{23}^-},$$

$$G_{2,n} = \Theta_n^+(\rho) - q_{44}\Theta_n^-(\rho) + 2\delta_3 \delta_{n0} + \rho\omega_n + e^{-in\psi_0} P_3 f_{2,n}(\rho),$$

$$g_{j,n}(\rho) = \sum_{m=1}^2 A_{j,m} \left[\int_0^\infty e^{-\xi_m |z_0|^\tau} J_n(\tau\rho) J_n(\tau\rho_0) d\tau \right],$$

$$\omega_n = \varphi_y(\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}) - i\varphi_x(\delta_{n,1} - \delta_{n,-1}), \quad c_n^\pm = c_n \pm \bar{c}_0 \delta_{0,n}.$$

Для оператора $W_{n,n}$ існує обернений [9–12], який є ізоморфізмом у просторі $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$ і допускає подання

$$W_{n,n}^*[f] = -2\pi^{-1}\rho^{n-2}\partial_\rho \mathfrak{S}_*[\rho^{-2n}\partial_\rho \mathfrak{S}_0[\rho^{n+1}f(\rho)]]. \quad (19)$$

Враховуючи співвідношення

$$W_{n,n}^*[\rho^n] = \frac{2\mathfrak{x}_n \rho^n}{\pi\sqrt{a^2 - \rho^2}}, \quad \mathfrak{x}_n = \frac{(2n+1)(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

отримаємо

$$U_{j,n}(\rho) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \left\{ b_{j1}^* 0.5\mathfrak{x}_n c_n^+ \rho^n + b_{j2}^* (2\delta_3 \delta_{n0} + \rho\omega_n) \right\} - \\ - W_{n,n}^* \left[b_{j2}^* \Theta_n^+(\rho) - s_{j1} \Theta_n^-(\rho) \right] + e^{-in\psi_0} P_3 W_{n,n}^* [f_{j,n}(\rho)], \quad (20)$$

$$f_{j,n}(\rho) = \sum_{m=1}^2 A_{j,m}^* \left[\int_0^\infty e^{-\tilde{\xi}_m |z_0| \tau} J_n(\tau\rho) J_n(\tau\rho_0) d\tau \right],$$

$$A_{j,m}^* = b_{j1}^* A_{2,m} + b_{j2}^* A_{4,m}, \quad s_{j1} = b_{j1}^* q_{24} + b_{j2}^* q_{44}.$$

Якщо форма включення є симетричною відносно площини $z = 0$, то $\Theta_n^+(\rho) = 0$, $\mathfrak{y}^+(x, y) = 2\mathfrak{y}_0^+(x, y) = 2\mathfrak{y}_0(x, y)$. У цьому випадку маємо

$$U_{j,n}(\rho) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \left\{ b_{j1}^* 0.5\mathfrak{x}_n c_n^+ \rho^n + b_{j2}^* (2\delta_3 \delta_{n0} + \rho\omega_n) \right\} + W_{n,n}^* [\eta_{j,n}(\rho)],$$

$$U_{3,n}(\rho) = \frac{2b_3}{\pi} \frac{c_n^- \mathfrak{x}_n \rho^n}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}, \quad \eta_{j,n}(\rho) = s_{j1} \delta_{n,0} \mathfrak{y}_0(\rho) + e^{-in\psi_0} P_3 f_{j,n}(\rho).$$

Враховуючи, що $U_{2,n}(\rho) + U_{3,n}(\rho) = \tilde{V}_n^{3,-}(\rho)$, $U_{2,n}(\rho) - U_{3,n}(\rho) = \tilde{V}_{-n}^{3,-}(\rho)$, запишемо

$$\tilde{V}_n^{3,-}(\rho) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \left\{ \mathfrak{x}_n \rho^n (b_{21}^* 0.5c_n^+ + b_3 c_n^-) + \right. \\ \left. + b_{22}^* (2\delta_3 \delta_{n0} + \rho\omega_n) \right\} + W_{n,n}^* [\eta_{j,n}(\rho)],$$

$$\tilde{V}_{-n}^{3,-}(\rho) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \left\{ \mathfrak{x}_n \rho^n (b_{21}^* 0.5c_n^+ - b_3 c_n^-) + \right. \\ \left. + b_{22}^* (2\delta_3 \delta_{n0} + \rho\omega_n) \right\} + W_{n,n}^* [\eta_{j,n}(\rho)],$$

де c_n^\pm – сталі, які визначимо з умов

$$\int_0^a \tilde{V}_n^{3,-}(\rho) \rho^{n+1} d\rho = 0. \quad (21)$$

Таким чином, з урахуванням співвідношень

$$\begin{aligned}
V_n^{1,-}(\rho) &= U_{1,n}, & V_n^{3,-}(\rho) &= W_{n+1,n}[U_{2,n} + U_{3,n}], \\
\bar{V}_n^{3,-}(\rho) &= -W_{n-1,n}[U_{2,n} - U_{3,n}], \\
W_{n+1,n}[f(\rho)] &= \rho^{-n-1} \int_0^\rho r^{n+1} f(r) dr, \\
W_{n-1,n}[f(\rho)] &= \rho^{n-1} \int_\rho^a r^{-n+1} f(r) dr
\end{aligned} \tag{22}$$

та формули (17) отримаємо

$$\begin{aligned}
v_1^-(\rho, \varphi) &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \left\{ \frac{2}{q_{41}} \delta_z + \frac{q_{43}}{a q_{41}} \eta_{2,0}^* \right\} + W_{0,0}^*[\eta_1(\rho)] + \\
&+ \frac{4}{\pi} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \left\{ m_0 (\varphi_y \cos \varphi - \varphi_x \sin \varphi) - \right. \\
&- P_3 m_1 \cos(\varphi - \psi_0) f_{2,1}^* \left. \right\} + P_3 \cos(\varphi - \psi_0) W_{1,1}^*[f_{1,1}(\rho)] - \\
&- P_3 \sum_{n=2}^{\infty} \cos n(\varphi - \psi_0) \left\{ \frac{\rho^n s_n f_{2,n}^*}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} - W_{n,n}^*[f_{1,n}(\rho)] \right\},
\end{aligned} \tag{23}$$

$$s_n = \frac{b_{11}^*(2n+1)}{a^{2n+1}(b_{21}^* 0.5 + b_3) x_n^2},$$

$$m_0 = \frac{2b_{12}^* b_3 - |\mathbf{B}^{-1}|}{b_{21}^* + 2b_3}, \quad m_1 = \frac{3b_{11}^*}{4a^3(b_{21}^* + 2b_3)}.$$

Поступальні та кругові переміщення визначимо з умов (6):

$$\begin{aligned}
\delta_z &= -\frac{q_{41} \eta_{1,0}^* + q_{43} \eta_{2,0}^*}{2a} = -\frac{(q_{41} s_{11} + q_{43} s_{21})}{2a} \int_0^a \frac{t \vartheta_0(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} - \\
&- \frac{P_3}{2a} \left(q_{41} \int_0^a \frac{t f_{1,0}(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} + q_{43} \int_0^a \frac{t f_{2,0}(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right),
\end{aligned} \tag{24}$$

$$f_{j,0}^* = \int_0^a W_{0,0}^*[f_{2,0}(\rho)] \rho d\rho = \int_0^a \frac{t f_{j,0}(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^2 A_{j,m}^* \arcsin\left(\frac{2a}{r_m}\right), \quad j = 1, 2,$$

$$r_m = \sqrt{(a + \rho_0)^2 + (\tilde{\xi}_m z_0)^2} + \sqrt{(a - \rho_0)^2 + (\tilde{\xi}_m z_0)^2},$$

$$\varphi_y = \frac{3 \cos \psi_0}{4a^3 m_0} P_3 \left(\frac{b_{11}^*}{b_{21}^* + 2b_3} f_{2,1}^* - \pi f_{1,1}^* \right),$$

$$\varphi_x = \frac{3 \sin \psi_0}{4a^3 m_0} P_3 \left(\frac{b_{11}^*}{b_{21}^* + 2b_3} f_{2,1}^* + \pi f_{1,1}^* \right). \tag{25}$$

У випадку, коли зосереджену силу прикладено вздовж осі Oz , маємо $\rho_0 = 0$, а $f_{j,n}^* \neq 0$ тільки при $n = 0$, кути повороту включення φ_y , φ_x при цьому також дорівнюють нулеві. Отже, подання (23) набуде вигляду

$$v_1^-(\rho) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \left\{ \frac{2}{q_{41}} \delta_3 + \frac{q_{43}}{aq_{41}} \frac{2}{\pi} \left(s_{21} W_{0,0}^*[\vartheta_0(\rho)] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{\pi} P_3 \sum_{m=1}^2 A_{2,m}^* \arcsin\left(\frac{2a}{r_m}\right) \right) \right\} + W_{0,0}^*[\eta_{1,0}(\rho)]. \quad (26)$$

У випадку монетоподібного включення товщини h отримаємо

$$\int_0^a W_{0,0}^*[\vartheta_0(\rho)] \rho d\rho = \frac{2ah}{\pi}, \quad W_{0,0}^*[\vartheta_0(\rho)] = \frac{2h}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}},$$

а у випадку включення у вигляді еліпсоїда обертання навколо осі Oz з півосями a та h , тобто $\vartheta_0(\rho) = 2ha^{-1} \sqrt{a^2 - \rho^2}$, отримаємо

$$W_{0,0}^*[\vartheta_0(\rho)] = \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k a^{2k} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k-1}{m} \frac{k\rho^{2(k-m)}}{2m+1} (a^2 - \rho^2)^{m+1/2},$$

$$\tilde{c}_k = (-1)^k \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)}{a^{2k}} \frac{(2k+1)}{k!} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \quad \int_0^a W_{0,0}^*[\vartheta_0(\rho)] \rho d\rho = \frac{2ah}{\pi},$$

$$W_{0,0}^*[f_{j,0}(\rho)] = -\frac{2}{\pi} P_3 \sum_{m=1}^2 A_{j,m}^* \left\{ \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\tilde{\xi}_m |z_0|)^{2n+1}} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\tilde{\xi}_m |z_0|)^{2n+1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\rho^{2m} (a^2 - \rho^2)^{n-m+1/2}}{2(n-m)+1} \right\}.$$

4. Числові результати і їхній аналіз. Із використанням отриманого розв'язку досліджено залежність поведінки стрибка нормальних напружень і значення поступального переміщення включення від розташування зосереджених сил і пружних властивостей матеріалів півпросторів. Позначимо через δ_z^+ переміщення включення під дією зосередженої сили $\mathbf{P}^+ = (0, 0, P_3)$ при $z_0 > 0$, через δ_z^- – переміщення під дією зосередженої сили $\mathbf{P}^- = (0, 0, -P_3)$ при $z_0 < 0$, через δ_z – поступальне переміщення включення за наявності двох зосереджених сил $\mathbf{P}^{\pm} = (0, 0, \pm P_3)$ відповідно в точках $M_0^{\pm}(0, 0, \pm z_0)$. У табл. 1 і табл. 2 наведено значення коефіцієнтів c_{ij} узагальненого закону Гука та їхніх відношень $\zeta_{ij} = c_{ij}^+/c_{ij}^-$ для деяких комбінацій трансверсально-ізотропних матеріалів [1]. Зокрема, для кераміки А (BaTiO_3) – матеріал **m1**; магнію (Mg) – матеріал **m2**; β -кварцу – матеріал **m3**; кадмію (Cd) – матеріал **m4**.

Таблиця 1. Значення коефіцієнтів c_{ij} .

| Матеріал | $c_{ij} \cdot 10^{11}, \text{H/m}^2$ | | | | | | |
|-----------|--------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | c_{11} | c_{12} | c_{13} | c_{33} | c_{44} | c_{55} | c_{66} |
| m1 | 1.66 | 0.766 | 0.710 | 1.62 | 0.429 | 0.429 | 0.447 |
| m2 | 0.595 | 0.256 | 0.214 | 0.6174 | 0.1647 | 0.1647 | 0.1696 |
| m3 | 1.166 | 0.167 | 0.328 | 1.104 | 0.3606 | 0.3606 | 0.4995 |
| m4 | 1.08 | 0.389 | 0.375 | 0.46 | 0.156 | 0.156 | 0.310 |

Таблиця 2. Значення відношення коефіцієнтів $\zeta_{ij} = c_{ij}^+ / c_{ij}^-$.

| Комбінації матеріалів | $\zeta_{ij} = c_{ij}^+ / c_{ij}^-$ | | | | | |
|-----------------------|------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | c_{11}^+ / c_{11}^- | c_{12}^+ / c_{12}^- | c_{13}^+ / c_{13}^- | c_{33}^+ / c_{33}^- | c_{44}^+ / c_{44}^- | c_{66}^+ / c_{66}^- |
| m1 – m4 | 2.889 | 2.992 | 3.317 | 1.771 | 2.604 | 2.635 |
| m1 – m3 | 1.05 | 2.439 | 1.497 | 2.638 | 1.072 | 0.705 |
| m2 – m4 | 0.551 | 0.658 | 0.570 | 1.219 | 1.055 | 0.547 |

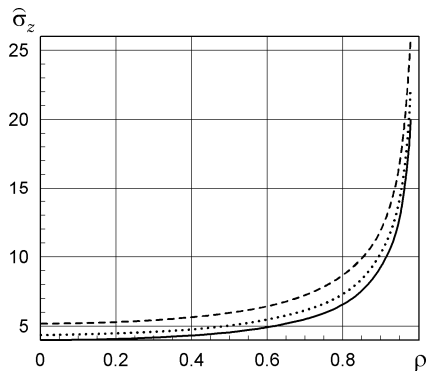
У табл. 3 наведено відносні значення поступального переміщення тонкого включення при різних варіантах завантаження для деяких комбінацій трансверсально-ізотропних матеріалів.

Таблиця 3. Значення поступального переміщення δ_z включення.

| Комбінації матеріалів | $a\delta_z^+ / P_3$ | $a\delta_z^- / P_3$ | $a\delta_z / P_3$ |
|-----------------------|---------------------|---------------------|-------------------|
| m1 – m4 | 0.739 | -0.166 | 0.572 |
| m1 – m3 | 0.5962 | -0.329 | 0.266 |
| m2 – m4 | 0.271 | -0.2014 | 0.0704 |

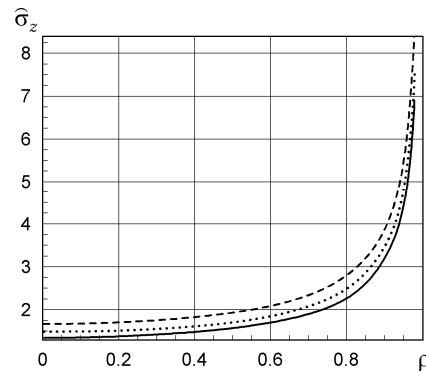
Наведені в табл. 3 значення показують, що за наявності однієї зосередженої сили переміщення включення відбувається в напрямку дії сили. Якщо зосереджені сили прикладено до обох півпросторів, то при $\zeta_{33} < 1$ переміщення здійснюються в бік верхнього півпростору, а у випадку, коли $\zeta_{33} > 1$, – у бік нижнього півпростору.

На рис. 1, рис. 2 наведено графіки залежності відносних стрибків нормальних напружень $\hat{\sigma}_z = v_1^-(\rho) / P_3$ від дії зосереджених сил і пружних властивостей матеріалів півпросторів, якщо радіус кругового включення $a = 1$. Суцільна крива відповідає силі, що розташована у верхньому півпросторі, пунктирна – силі, яка прикладена у нижньому півпросторі, точкова – силі, що прикладена до двох півпросторів одночасно.



m1 – m3

Рис. 1



m2 – m4

Рис. 2

Результати обчислень показують, що стрибки нормальних напружень на включенні приймають більші значення для простору, складеного із матеріалів **m1 – m3**, для якого показник $\zeta_{33} = 2.638$ є значно більшим від відповідного показника $\zeta_{33} = 1.219$ для простору **m2 – m4**. Слід також відмітити, що стрибки нормальних напружень в обох випадках є більшими

(штрихована лінія), якщо зосереджена сила прикладена до «м'якшого» матеріалу в напрямку осі Oz . Наявність двох симетрично розташованих сил приводить до деякого зменшення вказаної різниці (точкова лінія).

Висновки. Отримано розподіл напружень і переміщень в околі міжфазного кругового абсолютно жорсткого включення, що перебуває в умовах гладкого контакту в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі, у в довільній точці якого прикладена одна або дві зосереджені сили. Досліджено вплив напрямку дії сил, а також співвідношень між пружними сталими на поля напружень і деформацій в околі включення.

1. Александров К. С., Рыжова Т. В. Упругие свойства кристаллов. Обзор // Кристаллография. – 1961. – **6**, № 2. – С. 289–314.
2. Ефимов В. В., Кривой А. Ф., Попов Г. Я. Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 2. – С. 42–58.
Te same: Efimov V. V., Krivoi A. F., Popov G. Ya. Problems on the stress concentration near a circular imperfection in a composite elastic medium // Mech. Solids. – 1998. – **33**, No. 2. – P. 35–49.
3. Кім Г. С., Андрійчук Р. М. Задача стаціонарної теплопровідності для кусково-однорідного простору за тепловиділення у круговій області // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 115–122.
4. Кім Г. С., Сушко О. П. Задачі стаціонарної теплопровідності і термопружності для тіла з теплопроникним дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 4. – С. 150–159.
Te same: Kit H. S., Sushko O. P. Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with a heat permeable disk-shaped inclusion (crack) // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 3. – P. 309–321.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0300-3>.
5. Кім Г. С., Сушко О. П. Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 58–70.
Te same: Kit H. S., Sushko O. P. Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack) // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 4. – P. 561–577. – <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0422-7>.
6. Кім Г. С., Сушко О. П. Розподіл стаціонарної температури та напружень у тілі з теплопроникним дисковим включенням // Методи розв'язування прикл. задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – С. 145–153.
7. Кім Г., Сушко О. Стаціонарне температурне поле у півбезмежному тілі з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2011. – Вип. 13. – С. 67–80.
8. Кривий О. Ф. Взаємний вплив міжфазних тунельних тріщини і включення в кусково-однорідному анізотропному просторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 118–124.
Te same: Kryvyi O. F. Mutual influence of an interface tunnel crack and an interface inclusion in a piecewise homogeneous anisotropic space // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 4. – P. 409–416.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2455-9>.
9. Кривий О. Ф. Кругова міжфазна тріщина в неоднорідному трансверсально-ізотропному просторі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 6. – С. 15–22.
Te same: Kryvyi O. F. Interface crack in the inhomogeneous transversely isotropic space // Mater. Sci. – 2012. – **47**, No. 6. – P. 726–736.
– <https://doi.org/10.1007/s11003-012-9450-9>.
10. Кривий О. Ф. Міжфазне відшароване включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 2. – С. 77–84.
Te same: Kryvyi O. F. Delaminated interface inclusion in a piecewise homogeneous transversely isotropic space // Mater. Sci. – 2014. – **50**, No. 2. – P. 245–253.
– <https://doi.org/10.1007/s11003-014-9714-7>.

11. *Кривий О. Ф.* Міжфазне кругове включення при змішаних умовах взаємодії з кусково-однорідним трансверсально-ізотропним простором // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2011. – **54**, № 2. – С. 89–102.
Te same: *Kryvyy O. F.* Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space // *J. Math. Sci.* – 2012. – **184**, No. 1. – P. 101–119.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0856-6>.
12. *Кривий О. Ф.* Сингулярні інтегральні співвідношення і рівняння для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору з міжфазними дефектами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 1. – С. 23–35.
Te same: *Kryvyy O. F.* Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects // *J. Math. Sci.* – 2011. – **176**, No. 4. – P. 515–531.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0419-2>.
13. *Кривий О. Ф.* Тунельна внутрішня тріщина в кусково-однорідному анізотропному просторі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – **55**, № 4. – С. 54–63.
Te same: *Kryvyy O. F.* Tunnel internal crack in a piecewise homogeneous anisotropic space // *J. Math. Sci.* – 2014. – **198**, No. 1. – P. 62–74.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-014-1773-7>.
14. *Кривий О. Ф.* Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, № 2. – С. 55–65.
15. *Кривий О. Ф., Морозов Ю. О.* Розв'язок задачі теплопровідності для трансверсально-ізотропного кусково-однорідного простору з двома круговими включеннями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2017. – **60**, № 2. – С. 130–141.
Te same: *Kryvyy O. F., Morozov Yu. O.* Solution of the problem of heat conduction for the transversely isotropic piecewise-homogeneous space with two circular inclusions // *J. Math. Sci.* – 2019. – **243**, No. 1. – P. 162–182.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04533-1>.
16. *Кривий О. Ф., Морозов Ю. О.* Фундаментальні розв'язки для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного пружного простору // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 1. – С. 122–132.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.1.122-132>.
17. *Кривий А. Ф.* Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскости // *Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки.* – 2001. – **6**, Вип. 3. – С. 108–115.
18. *Кривий А. Ф.* Фундаментальное решение для четырехсоставной анизотропной плоскости // *Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки.* – 2003. – **8**, Вип. 2. – С. 140–149.
19. *Кривий А. Ф., Морозов Ю. А.* Решение задачи теплопроводности для двух компланарных трещин в составном трансверсально-изотропном пространстве // *Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки.* – 2014. – № 1. – С. 76–83.
20. *Кривий А. Ф., Попов Г. Я.* Межфазные туннельные трещины в составном анизотропном пространстве // *Прикл. математика и механика.* – 2008. – **72**, № 4. – С. 689–700.
Te same: *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space // *J. Appl. Math. Mech.* – 2008. – **72**, No. 4. – P. 499–507.
– <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.08.001>.
21. *Кривий А. Ф., Попов Г. Я.* Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве // *Прикл. механика.* – 2008. – **44**, № 6. – С. 36–45.
Te same: *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, No. 6. – P. 626–634. – <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0084-4>.
22. *Кривий А. Ф., Попов Г. Я., Радиолло М. В.* Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости // *Прикл. математика и механика.* – 1986. – **50**, № 4. – С. 622–632.
Te same: *Krivoi A. F., Popov G. Ya., Radiollo M. V.* Certain problems of an arbitrarily oriented stringer in a composite anisotropic plane // *J. Appl. Math. Mech.* – 1986. – **50**, No. 4. – P. 475–483.
– [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(86\)90012-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(86)90012-2).
23. *Кривий А. Ф., Радиолло М. В.* Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1984. – № 3. – С. 84–92.

24. *Kushnir R. M., Protsyuk Yu. B.* Термопружний стан шаруватих термочутливих тіл обертання за квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 7–18.
Te same: *Kushnir R. M., Protsyuk Yu. B.* Thermoelastic state of layered thermo-sensitive bodies of revolution for the quadratic dependence of the heat-conduction coefficients // Mater Sci. – 2011. – **46**, No. 1. – P. 1–15.
– <https://doi.org/10.1007/s11003-010-9258-4>.
25. *Akbari F., Khojasteh A., Rahimian M.* Three-dimensional interfacial Green's function for exponentially graded transversely isotropic bi-materials // Civ. Eng. Infrastruct. J. – 2016. – **49**, No. 1. – P. 71–96.
– <https://doi.org/10.7508/cej.2016.01.006>.
26. *Boiko D. S., Tokovyy Y. V.* Determination of three-dimensional stresses in a semi-infinite elastic transversely isotropic composite // Mech. Compos. Mater. – 2021. – **57**, No. 4. – P. 481–492. – <https://doi.org/10.1007/s11029-021-09971-0>.
27. *Hou P.-F., Leung A. Y. T., He Y.-J.* Three-dimensional Green's functions for transversely isotropic thermoelastic bimaterials // Int. J. Solids Struct. – 2008. – **45**, No. 24. – P. 6100–6113. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.07.022>.
28. *Hou P.-F., Li Z.-S., Zhang Y.* Three-dimensional quasi-static Green's function for an infinite transversely isotropic pyroelectric material under a step point heat source // Mech. Res. Commun. – 2014. – **62**. – P. 66–76.
– <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2014.08.008>.
29. *Hou P.-F., Zhao M., Tong J., Fu B.* Three-dimensional steady-state Green's functions for fluid-saturated, transversely isotropic, poroelastic bimaterials // J. Hydrology. – 2013. – **496**. – P. 217–224. – <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2013.05.017>.
30. *Kryvyi O. F., Morozov Yu. O.* Inhomogeneous transversely isotropic space under influence of concentrated power and temperature sources // J. Phys.: Conf. Ser. – Proc. of the VII Int. Conf. TPCM 2021 «Topical Problems of Continuum Mechanics» (4–8 Oct. 2021, Tsaghkadzor, Armenia). – 2022. – **2231**. – Art. 012016.
– <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012016>.
31. *Kryvyi O. F., Morozov Yu. O.* The fundamental solution of the problem of thermoelasticity for a piecewise homogeneous transversely isotropic elastic space // Дослідження в математиці і механіці. – 2020. – **25**, № 1(35). – С. 16–30.
32. *Kryvyi O., Morozov Yu.* Interphase circular inclusion in a piecewise-homogeneous transversely isotropic space under the action of a heat flux // ICTAEM-2018: Proc. 1st Int. Conf. on Theor. Appl. Exper. Mech. / E. Gdoutos (ed). – P. 394–396. – https://doi.org/10.1007/978-3-319-91989-8_94.
33. *Kryvyi O., Morozov Yu.* The influence of mixed conditions on the stress concentration in the neighborhood of interfacial inclusions in an inhomogeneous transversely isotropic space // ICTAEM-2020: Proc. 3rd Int. Conf. on Theor. Appl. Exper. Mech. / E. Gdoutos, M. Konsta-Gdoutos (eds). – Structural Integrity. Vol. 16. – Springer, 2020. – P. 204–209. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_38.
34. *Kryvyi O., Morozov Yu.* The problem of stationary thermoelasticity for a piecewise homogeneous transversely isotropic space under the influence of a heat flux specified at infinity is considered // J. Phys.: Conf. Ser. – Proc. of the VI Int. Conf. «Topical Problems of Continuum Mechanics» (1–6 Oct. 2019, Dilijan, Armenia). – 2019. – **1474**. – Art. 012025. – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1474/1/012025>.
35. *Kryvyi O., Morozov Yu.* Thermally active interphase inclusion in a smooth contact conditions with transversely isotropic half-spaces // Frattura ed Integrita Strutturale. – 2020. – **14**, No. 52. – P. 33–50. – doi: 10.3221/IGF-ESIS.52.04.
36. *Kryvyi O.* The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium // Modern Analysis and Applications. – Ser. Operator Theory: Advances and Applications. – Vol. 191. – Basel: Birkhäuser, 2009. – P. 395–406.
– https://doi.org/10.1007/978-3-7643-9921-4_25.
37. *Kumar R., Gupta V.* Green's function for transversely isotropic thermoelastic diffusion bimaterials // J. Therm. Stresses. – 2014. – **37**, No. 10. – P. 1201–1229.
– <https://doi.org/10.1080/01495739.2014.936248>.
38. *Kushnir R.* Book review: Hetnarski R. B., Eslami M. R. Thermal stresses – advanced theory and applications // J. Therm. Stresses. – 2010. – **33**, No. 1. – P. 76–78. – <https://doi.org/10.1080/01495730903538421>.
39. *Kushnir R., Protsiuk B.* A method of the Green's functions for quasistatic thermoelasticity problems in layered thermosensitive bodies under complex heat exchange // Modern Analysis and Applications. – Ser. Operator Theory: Advances and Applications. – Vol. 191. – Basel: Birkhäuser, 2009. – P. 143–154.

- https://doi.org/10.1007/978-3-7643-9921-4_9.
40. Li X.-F., Fan T.-Y. The asymptotic stress field for a rigid circular inclusion at the interface of two bonded dissimilar elastic half-space materials // *Int. J. Solids Struct.* – 2001. – **38**, No. 44-45. – P. 8019–8035.
– [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00010-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00010-5).
 41. Mantić V., Tàvara L., Ortiz J. E., París F. Recent developments in the evaluation of the 3D fundamental solution and its derivatives for transversely isotropic elastic materials // *Electron. J. Bound. Elem.* – 2012. – **10**, No. 1. – P. 1–41.
– <https://doi.org/10.14713/ejbe.v10i1.1116>.
 42. Pan E., Chen W. Green's functions in a transversely isotropic magneto-electroelastic bimaterial space // *Static Green's functions in anisotropic media.* – Cambridge University Press, 2015. – xviii+337 p. – (Chap. 7. – P. 220–259).
– <https://doi.org/10.1017/CBO9781139541015.008>.
 43. Sahebkar K., Eskandari-Ghadi M. Displacement ring load Green's functions for saturated porous transversely isotropic tri-material full-space // *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* – 2017. – **41**, No. 3. – P. 359–381.
– <https://doi.org/10.1002/nag.2560>.
 44. Tokovyy Yu. Direct integration of three-dimensional thermoelasticity equations for a transversely isotropic layer // *J. Therm. Stresses.* – 2019. – **42**, No. 1. – P. 49–64.
– <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1526150>.
 45. Tokovyy Yu. V., Ma C. C. Three-dimensional elastic analysis of transversely-isotropic composites // *J. Mech.* – 2017. – **33**, No. 6. – P. 821–830.
– <https://doi.org/10.1017/jmech.2017.91>.
 46. Yue Z. Q. Elastic fields in two joined transversely isotropic solids due to concentrated forces // *Int. J. Eng. Sci.* – 1995 – **33**, No. 3. – P. 351–369.
– [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)00063-P](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)00063-P).
 47. Zafari Y., Shahmohamadi M., Khojasteh A., Rahimian M. Asymmetric Green's functions for a functionally graded transversely isotropic tri-material // *Appl. Math. Model.* – 2019. – **72**. – P. 176–201.
– <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.02.038>.
 48. Zhao Y.-F., Zhao M.-H., Pan E., Fan C.-Y. Green's functions and extended displacement discontinuity method for interfacial cracks in three-dimensional transversely isotropic magneto-electro-elastic bi-materials // *Int. J. Solids Struct.* – 2015. – **52**. – P. 56–71. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.09.018>.

INFLUENCE OF CONCENTRATED FORCES ON THE INTERFACIAL INCLUSION UNDER THE CONDITIONS OF SMOOTH CONTACT IN AN INHOMOGENEOUS TRANSVERSELY ISOTROPIC SPACE

The influence of concentrated forces on a circular inclusion which is under conditions of smooth contact on the interface of two different transversely isotropic half-spaces is investigated. The problem is reduced to the Riemann boundary value problem with respect to part of variables in the space of generalized functions. The solution is constructed in an explicit form, which made it possible to obtain the dependence of translational and circumferential displacements of the inclusion and jumps of stresses and displacements on the inclusion on the concentrated forces and the relations between the elastic constants of half-spaces. The effect of the presence of concentrated forces either only in one or in both half-spaces on translational displacements and jumps of normal stresses for various combinations of materials of half-spaces and the shape of the inclusion is studied.

Key words: *fundamental solutions, inhomogeneous transversely isotropic space, circular inclusion, generalized functions.*

¹ Нац. ун-т «Одеська морська акад.», Одеса,

² Одеськ. нац. політехн. ун-т, Одеса