УДК 519.63: 517.956

Я. О. Баранецький[✉], І. І. Демків, П. І. Каленюк

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛЕЖНОГО ВІД ЧАСУ КОЕФІЦІЄНТА ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ІНВОЛЮЦІЄЮ ТА УМОВАМИ АНТИПЕРІОДИЧНОСТІ

Методом відокремлення змінних побудовано розв'язок досліджуваної задачі з невідомим коефіцієнтом у диференціальному рівнянні. Вивчено властивості спектральної задачі для диференціального рівняння другого порядку з інволюцією. Досліджено залежність спектра оператора задачі та його кратності, а також структури системи кореневих функцій і часткових розв'язків задачі від інволютивної частини рівняння. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку оберненої задачі. Для визначення шуканого коефіцієнта знайдено та розв'язано інтегральне рівняння Вольтерра другого роду.

***Ключові слова**: обернена задача, рівняння теплопровідності, метод відокремлення змінних, нелокальні умови, інволюція, базис Рісса.*

Вступ. Обернені задачі математичної фізики для різних типів диференціальних рівнянь широко застосовують у моделюванні процесів теплопровідності, в акустиці, економіці, оптичній томографії, медицині тощо. Останнім часом різні постановки обернених задач використовують, наприклад, у медицині при моделюванні гіпертермії, тромбозу та склерозу судин.

Обернені задачі теплопровідності використовують у різних галузях прикладної теплотехніки. Зокрема, в роботі [16] автори дослідили математичну модель процесу дифузії тепла в замкнутому металевому стержні, ізоляція якого «злегка проникна». Тому температура в стержні з одного боку ізоляції впливає на процес дифузії тепла в стержні з іншого боку ізоляції. Для моделювання процесу запропоновано таке рівняння теплопровідності з інволюцією:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u(-x,t)}{\partial x^2},$$

$$(x,t) \in \Omega = \{-\pi < x < \pi,\ 0 < t < T\}. \tag{1}$$

У статті [11] для рівняння

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(-x,t)}{\partial x^2} = f(x),$$

$$(x,t) \in \Omega = \{-\pi < x < \pi,\ 0 < t < T\}, \tag{2}$$

досліджено обернені задачі визначення пари функцій $\{u(x,t), f(x)\}$ з крайовими умовами

$$\frac{\partial u(-\pi,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \qquad u(-\pi,t) - u(\pi,t) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(-\pi,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \qquad u(-\pi,t) + u(\pi,t) = 0. \tag{4}$$

У праці [25] для рівняння (1) розглядалась обернена задача із нелокальними умовами, які є слабкими збуреннями умов (3):

$$\frac{\partial u(-\pi,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} - \alpha u(\pi,t) = 0, \qquad u(-\pi,t) - u(\pi,t) = 0.$$

У статті [27] для рівняння (2) досліджено обернену задачу визначення пари функцій $\{u(x,t), f(x)\}$ з початковою умовою

[✉] baryarom@ukr.net

$$u(x,0) = \varphi(x)\,,$$

умовою перевизначення

$$u(x,E) = \psi(x)$$

та умовами типу Іонкіна [27]

$$\frac{\partial u(-\pi,t)}{\partial x} + \alpha\frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \qquad u(-\pi,t) - u(\pi,t) = 0\,,$$

$$(x,t) \in \Omega = \{-\pi < x < \pi, 0 < t < T\}\,.$$

У роботі [20] розглянуто обернену задачу математичної біології з нелокальними крайовими умовами для моделі популяції як задачу пошуку функції джерела, що залежить від часу. Для рівняння

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) + r(t)f(x,t)\,,$$

$$(x,t) \in \Omega = \{0 < x < 1,\ 0 < t < T\}\,,$$

досліджено задачу про визначення пари функцій $\{u(x,t), r(t)\}$ з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x)\,,$$

інтегральною умовою перевизначення

$$\int_0^1 xu(x,t)\,dt = E(t)$$

і збуреними умовами антиперіодичності

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0, \qquad u(0,t) + bu(1,t) = 0\,.$$

У статтях [17–19] розглянуто обернені задачі з нелокальними крайовими умовами, що застосовують у математичних моделях опису віку населення.

Крайові та початково-крайові задачі для рівнянь з частинними похідними та інволюцією вивчались в працях [9–14, 22, 26, 27]. Для звичайних диференціальних операторів з інволюцією крайові задачі досліджувались в роботах [1, 2, 4, 5, 9, 15, 16, 23].

1. Основні позначення та результати. Нехай

$$W_2^2(-1,1) := \{y \in L_2(-1,1) : y^{(m)} \in C[-1,1],\ y^{(2)} \in L_2(-1,1),\ m = 0,1\}\,,$$

$$(y;u)_{W_2^2(-1,1)} := \sum_{k=0}^{2} (y^{(k)};u^{(k)})_{L_2(-1,1)}\,,$$

$$\|y\|^2_{W_2^2(-1,1)} := (y;y)_{W_2^2(-1,1)}\,;$$

E – тотожне перетворення в просторі $L_2(-1,1)$;

$I : L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$, $Iy(x) \equiv y(-x)$ – оператор інволюції у просторі $L_2(-1,1)$;

$L_{j,2}(-1,1) := \{y \in L_2(-1,1) : y = p_j y\}$, $j = 0,1$,

$p_j := \frac{1}{2}\left(E + (-1)^j I\right)$ – ортопроектори простору $L_2(-1,1)$,

Означення 1. Систему елементів $\{e_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$ називають *замкнутою* (*повною*) у сепарабельному гільбертовому просторі H, якщо лінійна оболонка цієї системи всюди щільна в H, тобто будь-який елемент простору H можна наблизити лінійною комбінацією елементів цієї системи з будь-якою точністю за нормою простору H.

Означення 2. Систему елементів $\{e_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$ називають *тотальною* в H, якщо лише нульовий елемент $\mathbf{0}$ простору H є ортогональним до всіх елементів цієї системи.

Означення 3. Систему елементів $\{g_s\}_{s=1}^{\infty} \subset H$ називають *біортогональною* в H до системи елементів $\{e_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$, якщо $(g_s; e_m)_H = \delta_{s,m}$, $s, m \in \mathbb{N}$.

Означення 4. Систему елементів $\{e_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H$ називають *базисом Рісса* простору H, якщо існує обмежений разом з оберненим оператор $A : H \to H$ такий, що система $\{Ae_m\}_{m=1}^{\infty}$ є ортонормованим базисом в H.

Означення 5. Нехай оператор $A : H \to H$ має власне значення $\lambda \in \mathbb{C}$. Будь-який розв'язок рівнянь $(A - \lambda E)^2 v = \mathbf{0}$, $(A - \lambda E)v \neq \mathbf{0}$ будемо називати *кореневою функцією* цього оператора, яка відповідає власному значенню $\lambda \in \mathbb{C}$ [7].

Розглянемо в області $D_T = \{(x,t), -1 < x < 1, 0 < t \le T\}$ рівняння теплопровідності з інволюцією

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \alpha_1 (1 + \gamma x)\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(-x,t)}{\partial x^2}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(-x,t)}{\partial x}\right) - r(t)u(x,t) + f(x,t),$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \gamma \in \mathbb{R}, \qquad (x,t) \in D_T, \tag{5}$$

для якого справджуються крайові умови

$$u(-1,t) + u(1,t) = 0,$$

$$\beta_1 \frac{\partial u(-1,t)}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0, \qquad 0 \le t \le T, \qquad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

початкова умова

$$u(x,0) = \eta(x), \qquad -1 \le x \le 1, \tag{7}$$

та умова перевизначення

$$\int_{-1}^{1} u(x,t)\,dx = E(t). \tag{8}$$

Означення 6. Пару функцій $\{r(t), u(x,t)\}$ із множини $C[-1,1] + \left(C^{2,1}(D_T) \bigcap C^{1,0}(\bar{D}_T)\right)$ будемо називати *класичним розв'язком* оберненої задачі (5)–(8).

Нехай $L : L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$ – оператор задачі

$$-v''(x) + \alpha_1(1 + \gamma x)\big(v''(x) + v''(-x)\big) + \alpha_2\big(v'(x) - v'(-x)\big) = f(x),$$

$$-1 < x < 1, \tag{9}$$

$$\ell_1 v := v(-1) + v(1) = 0,$$

$$\ell_2 v := \beta_1 v'(-1) + \beta_2 v'(1) = 0, \qquad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \quad \beta_1 + \beta_2 \neq 0, \tag{10}$$

$$D(L) = \{v \in W_2^2(-1,1) : \ell_1 v = \ell_2 v = 0\}.$$

Теорема 1. (*i*°). *Для будь-яких* $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ *за умови, що* $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$, *оператор* L *має систему кореневих функцій*

$$V_h := \Big\{ v_{s,k}(x) \in L_2(-1,1) : v_{1,k}(x) = \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi x,\ v_{0,k}(x) =$$

$$= (1 + hx)\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi x,\ h = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_2 + \beta_1},\ k = 1, 2, \ldots \Big\}, \qquad (11)$$

яка є базисом Рісса простору $L_2(-1,1)$. *Система* V_h *має біортогональну систему* W_h:

$$W_h := \Big\{ w_{s,k}(x) \in L_2(-1,1) : w_{1,k}(x) = (1 - hx)\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi x,$$

$$w_{0,k}(x) = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi x,\ k = 1, 2, \ldots \Big\}. \qquad (12)$$

(*ii*°). *Нехай* $\gamma = \alpha_2 = \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_2 + \beta_1}$. *Тоді множина* $\sigma \cup \sigma_1$, *де*

$$\sigma = \left\{ \lambda_k \in \mathbb{R},\ \lambda_k = \pi^2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^2,\ k = 1, 2, \ldots \right\},$$

$$\sigma_1 := \{ \lambda_{1,k} \in \mathbb{R},\ \lambda_{1,k} = (1 - 2\alpha_1)\lambda_k,\ \lambda_k \in \sigma,\ k = 1, 2, \ldots \},$$

є множиною власних значень оператора L, *і кожному* $\lambda_k \in \sigma$ *відповідає власна функція* $v_{1,k}(x)$, *а кожному* $\lambda_{1,k} \in \sigma_1$ *відповідає власна функція* $v_{0,k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$.

(*iii*°). *Нехай* $\alpha_1 = 0$, $\gamma \neq \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_2 + \beta_1}$. *Тоді оператор* L *має множину двократних власних значень* σ, *і кожному* $\lambda_k \in \sigma$ *відповідає власна функція* $v_{1,k}(x)$ *та коренева функція* $v_{0,k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$.

(*iv*°). *Нехай* $\alpha_1 = 0$, $\gamma = \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_2 + \beta_1}$. *Тоді оператор* L *має множину двократних власних значень* σ, *і кожному* $\lambda_k \in \sigma$ *відповідають власні функції* $v_{1,k}(x)$ *і* $v_{0,k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Введемо функції

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{1} f_{s,k}(t) v_{s,k}(x), \qquad \eta(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{1} \eta_{s,k}(t) v_{s,k}(x).$$

Теорема 2. (*i*°). *Нехай справджуються умови* $\gamma = \alpha_2 = \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_2 + \beta_1}$ *і такі припущення:*

***A1*):** $\eta(x) \in C^4[-1,1]$, $\eta(-1) + \eta(1) = 0$, $\beta_1 \eta'(-1) + \beta_2 \eta'(1) = 0$, $\int_{-1}^{1} \eta(x)\, dx = E(0)$;

***A2*):** $E(x) \in C^1[-1,1]$, $\int_{-1}^{1} f(x,t)\, dx \neq 0$;

***A3*):** $f(x,t) \in C(\bar{D}_T) \cap C^4(D_T)$, $f(-1,t) + f(1,t) = 0$, $\beta_1 \dfrac{\partial f(-1,t)}{\partial x} + \beta_2 \dfrac{\partial f(1,t)}{\partial x} = 0$.

***A4*):** $\mu_k = \pi(2k - 1)h$, $k = 1, 2, \ldots$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (5)−(7) *у вигляді ряду*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\eta_{0,k} e^{-\lambda_{1,k} t} + \int_0^t r(\tau) f_{0,k}(\tau) e^{-\lambda_{1,k}(t-\tau)}\, d\tau \right) v_{0,k}(x) +$$

$$+\left(\eta_{1,k}e^{-\lambda_k t}+\int_0^t r(\tau)f_{1,k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau\right)v_{1,k}(x)\,, \tag{13}$$

і пара функцій $\{r(t),u(x,t)\}$ *є єдиним розв'язком оберненої задачі* (5)–(8).

(*ii*°). *Нехай справджуються умови* $\alpha_1=0$, $\gamma\neq\dfrac{\beta_1-\beta_2}{\beta_2+\beta_1}$ *і припущення* ***A1*)–*A3*).** *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (5)–(7) *у вигляді ряду*

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[(\eta_{0,k}-\mu_k\eta_{1,k}t)e^{-\lambda_k t}+\int_0^t r(\tau)f_{0,k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau\right]v_{0,k}(x)+\right.$$

$$-\mu_k\left[\int_0^t\left(\int_0^\tau r(\rho)f_{1,k}(\rho)e^{-\lambda_k(\tau-\rho)}\,d\rho\right)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau\right]v_{0,k}(x)+$$

$$\left.+\left(\eta_{1,k}e^{-\lambda_k t}+\int_0^t r(\tau)f_{1,k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau\right)v_{1,k}(x)\right\}, \tag{14}$$

і пара функцій $\{r(t),u(x,t)\}$ *є єдиним розв'язком оберненої задачі* (5)–(8).

(*iii*°). *Нехай справджуються умови* $\alpha_1=0$, $\gamma=\dfrac{\beta_1-\beta_2}{\beta_2+\beta_1}$ *і припущення* ***A1*)–*A3*).** *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (5)–(7) *у вигляді ряду*

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\eta_{0,k}e^{-\lambda_k t}+\int_0^t r(\tau)f_{0,k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau\right)v_{0,k}(x)+$$

$$+\left(\eta_{1,k}e^{-\lambda_k t}+\int_0^t r(\tau)f_{1,k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau\right)v_{1,k}(x)\,, \tag{15}$$

і пара функцій $\{r(t),u(x,t)\}$ *є єдиним розв'язком оберненої задачі* (5)–(8).

2. Доведення теореми 1.

Розглянемо задачу на власні значення для рівняння

$$-v''(x)=\lambda v(x),\qquad \lambda\in\mathbb{C},\qquad -1\le x\le 1\,, \tag{16}$$

з крайовими умовами (10).

Означимо фундаментальну систему розв'язків рівняння (16):

$$v_0(x,\rho)=e^{\rho x}+e^{-\rho x}\,,$$

$$v_1(x,\rho)=e^{\rho x}-e^{-\rho x},\qquad \operatorname{Re}\rho\le 0,\qquad \lambda=\rho^2\,.$$

Підставимо загальний розв'язок

$$v(x,\rho)=C_0v_0(x,\rho)+C_1v_1(x,\rho),\qquad C_0,\ C_1\in\mathbb{C}\,,$$

рівняння (16) у крайові умови (10).

Для визначення параметрів C_0, C_1 отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з трикутною матрицею коефіцієнтів

$$\Omega(\rho)=\begin{pmatrix}\omega_1(\rho) & 0\\ \omega_2(\rho) & \omega_3(\rho)\end{pmatrix},$$

де

$$\omega_1(\rho)=2(e^{\rho}+e^{-\rho})\,,\qquad \omega_2(\rho)=2\rho(\beta_1-\beta_2)(e^{-\rho}-e^{\rho})\,,$$

$$\omega_3(\rho)=2\rho(\beta_1+\beta_2)(e^{-\rho}+e^{\rho})\,.$$

Для визначення власних значень задачі (16), (10) отримаємо характеристичне рівняння $\det \Omega(\rho) = 4\rho(\beta_1 + \beta_2)(e^{-\rho} + e^{\rho})^2$, яке має корені $0,\ \pi\left(k - \frac{1}{2}\right),\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Тому задача (16), (10) має власні значення $\lambda_k = \pi^2\left(k - \frac{1}{2}\right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$, і відповідні власні функції $v_{1,k}(x) := \sin \pi\left(k - \frac{1}{2}\right)x$, $k = 1, 2, \ldots$.

Приєднані функції задачі означимо співвідношеннями

$$v_{0,k}(x) := (1 + hx)\cos \pi\left(k - \frac{1}{2}\right)x, \qquad h \in \mathbb{R}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Підставляючи ці вирази у крайові умови (10), отримаємо, що $h = \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_2 + \beta_1}$.

Отже, оператор задачі (16), (10) має множину власних значень σ і систему функцій V_h, які є кореневими в сенсі співвідношень [7]:

$$-v''_{1,k}(x) = \lambda_k v_{1,k}(x),$$

$$-v''_{0,k}(x) = \lambda_k v_{0,k}(x) + \mu_k v_{1,k}(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

де $\mu_k = \pi(2k - 1)h$, $k = 1, 2, \ldots$.

Зауваження 1. У випадку $\beta_1 = \beta_2$ крайові умови (10) співпадають з умовами антиперіодичності, $\mu_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, а система функцій (11) є ортонормованим базисом

$$V_0 = \left\{\tau_{s,k}(x) \in L_2(-1,1) : \tau_{0,k}(x) = \cos \pi\left(k - \frac{1}{2}\right)x,\right.$$

$$\left.\tau_{1,k}(x) = \sin \pi\left(k - \frac{1}{2}\right)x,\ k = 1, 2, \ldots\right\}$$

простору $L_2(-1,1)$.

У випадку $\beta_1 = -\beta_2$ крайові умови (10) є виродженими [8] і $\det \Omega(\rho) \equiv 0$.

Оператор спряженої до (16), (10) (див. [3, 20]) задачі

$$-w''(x) = \bar{\lambda} w(x), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad -1 \le x \le 1,$$

$$\beta_2 w(-1) + \beta_1 w(1) = 0,$$

$$w'(-1) + w'(1) = 0$$

має систему кореневих функцій (12), яка є біортогональною до системи (11) у сенсі рівностей

$$(v_{r,k}; w_{s,m})_{L_2(-1,1)} = \delta_{r,s}\delta_{r,m}, \qquad r, s = 0, 1, \qquad k, m = 1, 2, \ldots .$$

Лема 1. *Для будь-яких чисел* $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\beta_1 \ne -\beta_2$, *система функцій* V_h *є базисом Рісса простору* $L_2(-1,1)$.

Д о в е д е н н я. Крайові умови (10) є регулярними за Біркгофом [8]. Тому системи функцій V_h, W_h є повними та мінімальними в просторі $L_2(-1,1)$. З означення цих систем для довільної функції $\varphi \in L_2(-1,1)$ маємо нерівності Бесселя [6]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{1} (\varphi, v_{r,k})^2_{L_2(-1,1)} \le M_0 \|\varphi\|^2_{L_2(-1,1)},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}(\varphi, w_{s,m})^2_{L_2(-1,1)} \le M_0 \,\|\varphi\|^2_{L_2(-1,1)}, \quad M_0 = 2(1+h^2).$$

Тому на підставі теореми Н. К. Барі [6], отримаємо твердження леми. ♦

Отже, доведено твердження ***(i°)*** теореми 1.

Нехай $O(V_h,\sigma)$ – множина операторів $L : L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$, які мають точковий спектр σ і систему функцій V_h, кореневих в сенсі співвідношень (17) для деяких дійсних μ_k, $k = 1,2,\dots$.

Розглянемо оператор $L : L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$, породжений рівнянням

$$Lv := -v''(x) + \alpha_2(v'(x) - v'(-x)) = \lambda v(x) = 0,$$

$$\lambda \in \mathbb{C}, \quad \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad -1 < x < 1, \tag{18}$$

і крайовими умовами (10).

Підставляючи функції (11) у рівняння (18), отримаємо співвідношення (17), де $\mu_k = (h - \alpha_2)(2k\pi - 1)$, $k = 1,2,\dots$. Отже, $L \in O(V_h,\sigma)$. Це означає, що справджується твердження ***(iii°)*** теореми 1.

Якщо виконується рівність $\alpha = h$, тоді $\mu_k = 0$, тобто елементи системи V_h є власними функціями оператора L. Отже, справджується твердження ***(iv°)*** теореми 1.

Нехай $\sigma_1 := \{\lambda_{1,k} \in \mathbb{R}, k = 1,2,\dots\}$, $O(V_h,\sigma,\sigma_1)$ – множина операторів $L : L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$, які мають точковий спектр $\sigma \cup \sigma_1$ і для яких елементи системи V_h є власними функціями:

$$Lv_{1,k}(x) = \lambda_k v_{1,k}(x), \qquad \lambda_k \in \sigma,$$

$$Lv_{0,k}(x) = \lambda_{1,k} v_{0,k}(x), \qquad \lambda_{1,k} \in \sigma_1, \quad k = 1,2,\dots. \tag{19}$$

Розглянемо оператор L задачі (9), (10).

Підставляючи функції (11) у рівняння (9), отримаємо співвідношення

$$Lv_{1,k}(x) = \lambda_k v_{1,k}(x),$$

$$Lv_{0,k}(x) = \lambda_k v_{0,k}(x) - 2\alpha_1\lambda_k(1+\gamma x)\tau_{0,k}(x) + \mu_k v_{1,k}(x),$$

$$\mu_k = (h - \alpha_2)(2k\pi - 1), \quad k = 1,2,\dots,$$

$$Lv_{0,k}(x) = \lambda_{1,k} v_{0,k}(x) - 2\alpha_1\lambda_k(\gamma - h)x\tau_{0,k}(x) + \mu_k v_{1,k}(x),$$

$$\lambda_{1,k} = (1 - 2\alpha_1)\lambda_k, \quad k = 1,2,\dots.$$

Отже, $L \notin O(V_h,\sigma)$.

Якщо $\gamma = \alpha_2 = h = \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_2 + \beta_1}$, тоді $\mu_k = 0$, $k = 1,2,\dots$. Тому рівності (19) виконуються у випадку, коли $\sigma_1 := \{\lambda_{1,k} \in \mathbb{R}, \lambda_{1,k} = (1 - 2\alpha_1)\lambda_k, k = 1,2,\dots\}$, тобто V_h – система власних функцій оператора L, і $L \in O(V_h,\sigma,\sigma_1)$.

Отже, справджується твердження ***(ii°)*** теореми 1. ♦

Зауваження 2. У випадку, коли $\alpha_2 = \gamma = 0$, спектральні властивості оператора L вивчено в працях [22, 23].

3. Доведення теореми 2.

Нехай виконуються умови $\gamma = \alpha_2 = \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_2 + \beta_1}$ і припущення ***A1)–A3)*** теореми 2. Часткові розв'язки задачі (5)−(7) визначаємо співвідношеннями

$$u_{0,k}(x,t) = T_{0,k}(t)v_{0,k}(x),$$

$$u_{1,k}(x,t) = T_{1,k}(t)v_{1,k}(x), \qquad k = 1,2,\dots. \tag{20}$$

Для визначення функцій $T_{r,k}(t)$, $r = 0,1$, отримуємо задачі, які розв'язуємо послідовно:

$$T'_{0,k}(t) = -\lambda_{1,k}T_{0,k}(t) + r(t)f_{0,k}(t),$$

$$T_{0,k}(0) = \eta_{0,k}$$

$$T'_{1,k}(t) = -\lambda_k T_{1,k}(t) + r(t)f_{1,k}(t),$$

$$T_{1,k}(0) = \eta_{1,k}, \qquad k = 1,2,\dots.$$

Отже, маємо

$$T_{0,k}(t) = \eta_{0,k}e^{-\lambda_{1,k}t} + \int_0^t r(\tau)f_{0,k}(\tau)e^{-\lambda_{1,k}(t-\tau)}\,d\tau,$$

$$T_{1,k}(t) = \eta_{1,k}e^{-\lambda_k t} + \int_0^t r(\tau)f_{1,k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau, \qquad k = 1,2,\dots,$$

$$u_{0,k}(x,t) = \left(\eta_{0,k}e^{-\lambda_{1,k}t} + \int_0^t r(\tau)f_{0,k}(\tau)e^{-\lambda_{1,k}(t-\tau)}\,d\tau\right)v_{0,k}(x),$$

$$u_{1,k}(x,t) = \left(\eta_{1,k}e^{-\lambda_k t} + \int_0^t r(\tau)f_{1,k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau\right)v_{1,k}(x), \qquad k = 1,2,\dots.$$

З неперервності функції $\eta(x)$ та обмеженості функцій (11) маємо нерівності

$$\max_{s,k}\left|\eta_{s,k}\right| = M_0 < \infty, \qquad s = 0,1, \qquad k = 1,2,\dots.$$

Нехай

$$\max_t |r(t)| = M_1, \quad \max_{k,x}\left|v_{1,k}(x)\right| = 1 + |h| = M_2, \quad \max_{s,k,t}\left|f_{s,k}(t)\right| = M_3,$$

$$s = 0,1, \qquad k = 1,2,\dots. \tag{21}$$

Враховуючи (21) і припущення теореми, отримаємо оцінки

$$\left|u_{1,k}(x,t)\right| \le \left(M_0 + M_1M_2\right)e^{-\lambda_k\varepsilon} = M_4e^{-\lambda_k\varepsilon}, \qquad M_4 = M_0 + M_1M_2, \tag{22}$$

$$\left|u_{0,k}(x,t)\right| \le M_2\left(M_1 + M_0M_2\right)e^{-\lambda_{1,k}\varepsilon} = M_5e^{-\lambda_{1,k}\varepsilon}, \qquad M_5 = M_2M_4. \tag{23}$$

Отже, при $M_6 = (1 + M_3)M_4$ і $t \ge \varepsilon > 0$ функціональний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1} u_{s,k}(x,t) \tag{24}$$

мажорується абсолютно збіжним числовим рядом $M_6\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda_{1,k}\varepsilon} + e^{-\lambda_k\varepsilon}\right)$. Тому за ознакою Вейєрштрасса ряд (24) рівномірно збігається і є неперервною в області D_T при $t \ge \varepsilon > 0$ функцією.

Таким чином, сума ряду (24) визначає неперервну в області D_T функцію $u(x,t)$, яка задовольняє початкову умову (7).

Продиференціюємо поелементно ряд (24) за змінною t :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}\frac{\partial u_{s,k}(x,t)}{\partial t}=\left[-\lambda_{1,k}\left(\eta_{0,k}e^{-\lambda_{1,k}t}+\int_0^t r(\tau)f_{0,k}(\tau)e^{-\lambda_{1,k}(t-\tau)}\,d\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\,r(t)f_{0,k}(t)\right]v_{0,k}(x)+\left[-\lambda_k\left(\eta_{0,k}e^{-\lambda_k t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^t r(\tau)f_{1,k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau\right)+r(t)f_{1,k}(t)\right]v_{1,k}(x).$$

Для елементів отриманого ряду справджуються такі оцінки:

$$\left|\frac{\partial u_{0,k}(x,t)}{\partial t}\right|\le M_1M_3\left|f_{0,k}\right|+\lambda_{1,k}M_3\left(M_0+TM_1M_2\right)e^{-\lambda_{1,k}\varepsilon}=$$

$$=M_3\left(M_1\left|f_{0,k}\right|+\lambda_{1,k}M_7e^{-\lambda_{1,k}\varepsilon}\right), \tag{25}$$

$$\left|\frac{\partial u_{1,k}(x,t)}{\partial t}\right|\le M_1\left|f_{1,k}\right|+\lambda_k\left(M_0+TM_1M_2\right)e^{-\lambda_k\varepsilon}\le M_1\left|f_{1,k}\right|+\lambda_kM_7e^{-\lambda_k\varepsilon},$$

$$\varepsilon>0,\quad M_7=M_0+TM_1M_2,\quad k=1,2,\ldots. \tag{26}$$

Отже, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}\left|\frac{\partial u_{s,k}(x,t)}{\partial t}\right|$$

мажорується при $t\ge\varepsilon>0$ рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[M_7(M_3+1)\left(\lambda_{1,k}e^{-\lambda_{1,k}\varepsilon}+\lambda_ke^{-\lambda_k\varepsilon}\right)+M_1(M_3+1)\left(\left|f_{1,k}(t)\right|+\left|f_{0,k}(t)\right|\right)\right].$$

З припущення ***A3)*** теореми 2 за ознакою Абеля випливає рівномірна збіжність і неперервність на $(0,T]$ суми ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|f_{0,k}(t)\right|+\left|f_{1,k}(t)\right|\right)$. Тому існує таке $M_8>0$, що правильною є нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|f_{0,k}(t)\right|+\left|f_{1,k}(t)\right|\right)<M_8.$$

Таким чином, при $t\ge\varepsilon>0$ для деякого $M_9>0$ отримуємо нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}\left|\frac{\partial u_{s,k}(x,t)}{\partial t}\right|<M_9<\infty.$$

Тому сума ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}\frac{\partial u_{s,k}(x,t)}{\partial t}$ є неперервною в області D_T функцією і співпадає з $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$.

Продиференціюємо поелементно ряд (24) двічі за аргументом x:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\lambda_{1,k}\left(\eta_{0,k}e^{-\lambda_{1,k}t}+\int_0^t r(\tau)f_{0,k}(\tau)\,e^{-\lambda_{1,k}(t-\tau)}\,d\tau\right)v_{0,k}(x)\right.$$

$$\left.-\lambda_k\left(\eta_{1,k}e^{-\lambda_k t}+\int_0^t r(\tau)f_{1,k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau\right)v_{1,k}(x)\right].$$

Беручи до уваги оцінки (22), (23), отримуємо нерівності

$$\left|\frac{\partial^2u_{1,k}(x,t)}{\partial x^2}\right|\le M_4\lambda_ke^{-\lambda_k\varepsilon},$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_{0,k}(x,t)}{\partial x^2}\right| \le M_5 \lambda_{1,k} e^{-\lambda_{1,k}\varepsilon}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Отже, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}\frac{\partial^2 u_{s,k}(x,t)}{\partial x^2}$ при деяких $t \ge \varepsilon > 0$ мажорується рядом

$$M_6 \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_{1,k} e^{-\lambda_{1,k}\varepsilon} + \lambda_k e^{-\lambda_k \varepsilon}\right).$$

Тому його сума є неперервною в області D_T функцією і співпадає з $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$.

Аналогічно досліджуємо неперервність в D_T функції $\frac{\partial^2 u(-x,t)}{\partial x^2}$.

Далі, за теоремами вкладення отримуємо неперервність в області D_T функцій $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(-x,t)}{\partial x}$.

Отже, сума ряду (13) є класичним розв'язком задачі (5)–(7).

Побудуємо рівняння для визначення функції $r(t)$:

$$\int_0^1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx = E'(t) = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)}\Bigg(r(t) f_{0,k}(t) - \lambda_{1,k}\ \eta_{0,k} e^{-\lambda_{1,k} t} -$$

$$- \lambda_{1,k}\int_0^t r(\tau) f_{0,k}(\tau) e^{-\lambda_{1,k}(t-\tau)}\, d\tau\Bigg),$$

$$r(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)} f_{0,k}(t) = E'(t) - \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)}\lambda_{1,k}\Bigg(\eta_{0,k} e^{-\lambda_{1,k} t} -$$

$$- \int_0^t r(\tau) f_{0,k}(\tau) e^{-\lambda_{1,k}(t-\tau)}\, d\tau\Bigg)\Bigg),$$

$$r(t) = \Bigg[E'(t) + (1-2\alpha_1)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \pi(2k-1)\Bigg(\eta_{0,k} e^{-\lambda_{1,k} t} +$$

$$+ \int_0^t r(\tau) f_{0,k}(\tau) e^{-\lambda_{1,k}(t-\tau)}\, d\tau\Bigg)\Bigg]\Bigg[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)} f_{0,k}(t)\Bigg]^{-1}.$$

Отже, для визначення функції $r(t)$ отримали інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$r(t) = F(t) + \int_0^t K(t,\tau) r(\tau)\, d\tau, \tag{27}$$

де

$$F(t) = \frac{E'(t) + (1-2\alpha_1)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \pi(2k-1)\eta_{0,k} e^{-\lambda_{1,k} t}}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)} f_{0,k}(t)}, \tag{28}$$

$$K(t,\tau) = \frac{(1-2\alpha_1)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \pi(2k-1) f_{0,k}(\tau) e^{-\lambda_{1,k}(t-\tau)}}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)} f_{0,k}(t)}. \tag{29}$$

Знаменники дробів (28), (29) відмінні від нуля, оскільки виконується припущення ***A2)*** теореми 2: $\int\limits_{-1}^{1} f(x,t)\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)} f_{0,k}(t) \neq 0$.

За припущеннями ***A1)–A3)*** функція $F(t)$ та ядро $K(t,\tau)$ є неперервними функціями на $[0,T]$, $[0,T]\times[0,T]$ відповідно. Отже, рівняння (27) має єдиний розв'язок – неперервну на $[0,T]$ функцію $r(t)$, яка разом із розв'язком $u(x,t)$ прямої задачі (5)–(7), заданим рядом Фур'є (13), утворюють єдиний розв'язок $\{r(t), u(x,t)\}$ на $[-1,1]\times[0,T]$ оберненої задачі (5)–(8).

Отже, твердження ***(i°)*** теореми 2 доведено.

Доведемо твердження ***(ii°)*** теореми 2. Нехай $\alpha_1 = 0$, тобто $\lambda_{1,k} = \lambda_k$. У випадку $\gamma \neq \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_2 + \beta_1}$ елементи системи V_h є кореневими функціями оператора L, для яких виконуються рівності (17).

Часткові розв'язки задачі (5)–(7) визначаємо співвідношеннями (20). Для визначення функцій $T_{r,k}(t)$, $r = 0,1$, $k = 1,2,\dots$, отримуємо задачі

$$T'_{0,k}(t) = -\lambda_k T_{0,k}(t) + r(t) f_{0,k}(t), \qquad T_{0,k}(0) = \eta_{0,k},$$

$$T'_{1,k}(t) = -\lambda_k T_{1,k}(t) + r(t) f_{1,k}(t), \qquad T_{1,k}(0) = \eta_{1,k}, \qquad k = 1,2,\dots,$$

які розв'язуємо послідовно.

Отже, маємо

$$T_{0,k}(t) = \eta_{0,k} e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t r(\tau) f_{0,k}(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)}\,d\tau,$$

$$T_{1,k}(t) = \eta_{1,k} e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t r(\tau) f_{1,k}(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)}\,d\tau, \qquad k = 1,2,\dots,$$

$$u_{0,k}(x,t) = \left(\eta_{0,k} e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t r(\tau) f_{0,k}(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)}\,d\tau\right) v_{0,k}(x)$$

$$u_{1,k}(x,t) = \left(\eta_{1,k} e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t r(\tau) f_{1,k}(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)}\,d\tau\right) v_{1,k}(x).$$

Враховуючи припущення ***A1)–A3)*** теореми та оцінки (22), (23), при деяких $t \geq \varepsilon > 0$ отримаємо такі оцінки:

$$\left|u_{0,k}(x,t)\right| \leq M_4 e^{-\lambda_k \varepsilon},$$

$$\left|u_{1,k}(x,t)\right| \leq M_5 e^{-\lambda_k \varepsilon}, \qquad k = 1,2,\dots$$

Отже, функціональний ряд (24) мажорується при $t \geq \varepsilon > 0$ абсолютно збіжним числовим рядом $2M_6 \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \varepsilon}$.

Тому за ознакою Вейєрштрасса ряд (24) є рівномірно збіжним, а його сума є неперервною в області D_T функцією, яка задовольняє початкову умову (7).

Безпосередньою підстановкою переконуємося, що

$$\frac{\partial u_{0,k}(x,t)}{\partial t} = \left[-\lambda_k \left(\eta_{0,k} + \int\limits_0^t r(\tau) f_{0,k}(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)}\,d\tau\right) + r(t) f_{0,k}(t)\right] v_{0,k}(x),$$

$$\frac{\partial u_{1,k}(x,t)}{\partial t} = \left[-\lambda_k\left(\eta_{1,k} + \int\limits_0^t r(\tau) f_{1,k}(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)}\, d\tau\right) + r(\tau) f_{1,k}(t)\right] v_{1,k}(x),$$

$$k = 1, 2, \ldots .$$

Для елементів отриманих рядів з урахуванням оцінок (25), (26) при $t \ge \varepsilon > 0$ справджуються такі оцінки:

$$\left|\frac{\partial u_{0,k}(x,t)}{\partial t}\right| \le M_3 \left[\max_t |r(t)| \left|f_{0,k}(t)\right| + \lambda_k\left(\left|\eta_{0,k}\right| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \max_t |r(t)| \max_{t,k} \left|f_{0,k}(t)\right|\right)\right] e^{-\lambda_k \varepsilon} \le$$

$$\le M_3 (M_1 \left|f_{0,k}(t)\right| + \lambda_k M_3 M_7) e^{-\lambda_k \varepsilon},$$

$$\left|\frac{\partial u_{1,k}(x,t)}{\partial t}\right| \le \left|f_{1,k}(t)\right| \max_t |r(t)| + \lambda_k\left(\left|\eta_{1,k}\right| + \max_{t,x} \left|f_{1,k}(t)\right| |r(t)|\, T\right) e^{-\lambda_k \varepsilon} \le$$

$$\le (M_1 \left|f_{1,k}(t)\right| + \lambda_k M_7) e^{-\lambda_k \varepsilon}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Тому

$$\left|\frac{\partial u_{0,k}(x,t)}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial u_{1,k}(x,t)}{\partial t}\right| \le (1 + M_3) \lambda_k M_7 e^{-\lambda_k \varepsilon} +$$

$$+ M_1 (1 + M_3)\left(\left|f_{0,k}(t)\right| + \left|f_{1,k}(t)\right|\right), \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Таким чином, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{s=0}^{1} \left|\frac{\partial u_{s,k}(x,t)}{\partial t}\right|$ при $t \ge \varepsilon > 0$ з урахуванням нерівності (23) мажорується абсолютно збіжним рядом

$$(1 + M_3) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lambda_k M_7 e^{-\lambda_k \varepsilon} + M_1\left(\left|f_{0,k}(t)\right| + \left|f_{1,k}(t)\right|\right)\right].$$

Продиференціюємо поелементно ряд (24) двічі за аргументом x:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{1} \frac{\partial^2 u_{s,k}(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\lambda_k T_{0,k}(t) v_{0,k}(x) - \right.$$

$$\left. - (\lambda_k T_{1,k}(t) + \mu_k T_{0,k}(t)) v_{1,k}(x)\right]. \tag{30}$$

Для елементів ряду справджуються оцінки

$$\left|\frac{\partial^2 u_{0,k}(x,t)}{\partial x^2}\right| \le \lambda_k M_4 e^{-\lambda_k \varepsilon},$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_{1,k}(x,t)}{\partial x^2}\right| \le \lambda_k (M_5 e^{-\lambda_k \varepsilon} + |\mu_k|\, M_4) e^{-\lambda_k \varepsilon} =$$

$$= \lambda_k (M_5 + 2 M_4 |h - \alpha_2| \sqrt{\lambda_k^{-1}}) e^{-\lambda_k \varepsilon}$$

Отже, ряд (30) при деяких $t \ge \varepsilon > 0$ та $M_{10} = 2|h - \alpha_2|\, M_4 > 0$ мажорується рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (M_4 \lambda_k + M_{10} \sqrt{\lambda_k}\,) e^{-\lambda_k \varepsilon}$.

Тому сума ряду (30) є неперервною в області D_T функцією і співпадає з $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$.

Аналогічно доводимо неперервність функції $\dfrac{\partial^2 u(-x,t)}{\partial x^2}$.

Далі за теоремами вкладення отримуємо неперервність в області D_T функцій $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(-x,t)}{\partial x}$.

Отже, функція $u(x,t)$, визначена рядом (14), є класичним розв'язком задачі (5)–(7).

Побудуємо рівняння для визначення функції $r(t)$:

$$\int_0^1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,dx = E(t) = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)}\left[r(t)f_{0,k}(t) - \lambda_k\left(\eta_{0,k}e^{-\lambda_k t} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_0^t r(\tau)f_{0,k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau\right)\right],$$

$$r(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)}f_{0,k}(t) = E'(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)}\lambda_k\left(\eta_{0,k}e^{-\lambda_k t} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^t r(\tau)f_{0,k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau\right)\right],$$

$$r(t) = \left[E(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\pi(2k-1)\left(\eta_{0,k}e^{-\lambda_k t} + \int_0^t r(\tau)f_{0,k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\,d\tau\right)\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)}f_{0,k}(t)\right]^{-1}.$$

Отже, для визначення функції $r(t)$ отримали інтегральне рівняння (27), де

$$F(t) = \frac{E'(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\pi(2k-1)\eta_{0,k}e^{-\lambda_k t}}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)}f_{0,k}(t)}, \tag{31}$$

$$K(t,\tau) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\pi(2k-1)f_{0,k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)}f_{0,k}(t)}. \tag{32}$$

Знаменники дробів (31), (32) відміннні від нуля, оскільки виконується припущення ***A2)*** теореми 2: $\int_{-1}^{1} f(x,t)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)}f_{0,k}(t) \neq 0$.

Згідно з припущеннями ***A1)–A3)*** функція $F(t)$ і ядро $K(t,\tau)$ є неперервними функціями на $[0,T]$ та $[0,T]\times[0,T]$ відповідно. Отже, інтегральне рівняння (27) має єдиний розв'язок – неперервну на $[0,T]$ функцію $r(t)$, яка разом із розв'язком $u(x,t)$ прямої задачі (5)–(7), визначеним рядом (10), утворюють єдиний розв'язок $\{r(t), u(x,t)\}$ оберненої задачі (5)–(8).

Твердження ***(ii°)*** теореми 2 доведено.

Нехай $\alpha_2 = h = \dfrac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1}$. У цьому випадку елементи системи $V(h)$ є власними функціями оператора L, для яких виконуються рівності

$$Lv_{r,k}(x) = \lambda_k v_{r,k}(x), \qquad r = 0,1, \qquad k = 1,2,\ldots.$$

Далі доведення твердження ***(iii°)*** теореми 2 повторює доведення твердження ***(i°)*** цієї теореми. ♦

Зауваження 3. У випадку, коли число α_1 є раціональним числом, множини σ, σ_1 перетинаються. Тому частина власних значень оператора L має кратність 2. Аналіз цього випадку проведено в працях [24, 25].

1. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І.* Крайові задачі з регулярними, але не сильно регулярними за Біркгофом умовами для оператора двократного диференціювання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 4. – С. 7–23.
   Те саме: *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I.* Boundary-value problems with Birkhoff regular but not strongly regular conditions for a second-order differential operator // J. Math. Sci. – 2019. – **238**, No. 1. – P. 1–21.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-019-04214-z.
2. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І.* Нелокальна багатоточкова задача з кратним спектром для звичайного диференціального рівняння порядку $2n$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 3. – С. 32–45.
   Те саме: *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I.* Nonlocal multipoint problem with multiple spectrum for an ordinary (2**n**)th order differential equation // J. Math. Sci. – 2020. – **246**, No. 2. – P. 152–169.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-020-04727-y.
3. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І., Коляса Л. І.* Спектральні властивості несамоспряжених нелокальних крайових задач для оператора диференціювання парного порядку // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 6. – С. 739–751.
   Те саме: *Baranets'kyi Ya. O., Kalenyuk P. I., Kolyasa L. I.* Spectral properties of nonself-adjoint nonlocal boundary-value problems for the operator of differentiation of even order // Ukr. Math. J. – 2018. – **70**, No. 6. – P. 851–865.
   – https://doi.org/10.1007/s11253-018-1538-4.
4. *Владыкина В. Е., Шкаликов А. А.* Регулярные обыкновенные диф-ференциальные операторы с инволюцией // Мат. заметки. – 2019. – **106**, № 5. – С. 643–659.
   – https://doi.org/10.4213/mzm12557.
   Те саме: *Vladykina V. E., Shkalikov A. A.* Regular ordinary differential operators with involution // Math. Notes. – 2019. – **106**, No. 5. – P. 674–687.
   – https://doi.org/10.1134/S0001434619110026.
5. *Владыкина В. Е., Шкаликов А. А.* Спектральные свойства обыкновенных дифференциальних операторов с инволюцией // Докл. РАН. – 2019. – **484**, № 1. – С. 12–17.
   Те саме:*Vladykina V. E., Shkalikov A. A.* Spectral properties of ordinary differential operators with involution // Dokl. Math. – 2019. – **99**, No. 1. – P. 5–10.
   – https://doi.org/10.1134/S1064562419010046.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – Москва: Наука, 1965. – 448 с.
   Те саме: *Gohberg I. C., Krein M. G.* Introduction to the theory of linear nonself-adjoint operators. – Providence: Amer. Math. Soc., 1969. – xv+378 p.
7. *Ильин В. А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1976. – **142**: Сб статей: Теория чисел, математический анализ и их приложения. – С. 148–155.
   Те саме: *Il'in V. A.* Existence of a reduced system of eigen- and associated functions for a nonselfadjoint ordinary differential operator // Proc. Steklov Inst. Math. – 1979. – **142**: Number theory, mathematical analysis and their applications. – P. 157–164.
8. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.
   Те саме: *Naimark M. A.* Linear differential operators. – Part I: Elementary theory of linear differential operators. – New York: Frederick Ungar Publ. Co., 1967. – xiii+144 p.

9. *Оразов И., Садыбеков М. А.* Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сиб. мат. журн. – 2012. – **53**, № 1. – С. 180–186.
Те саме: *Orazov I., Sadybekov M. A.* On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature // Sib. Math. J. – 2012. – **53**, No. 1. – P. 146–151.
– https://doi.org/10.1134/S0037446612010120.
10. *Сарсенби А. А.* Некорректная задача для уравнения типа теплопроводности с инволюцией // Zhurnal SVMO. – 2019. – **21,** No. 1. – P. 48–59.
– https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201901.48-59.
11. *Al-Salti N., Kerbal S., Kirane M.* Initial-boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation // Math. Model. Nat. Phenom. –2019. – **14**, No. 3. – Article Number 312.
– https://doi.org/10.1051/mmnp/2019014.
12. *Ashyralyev A., Sarsenbi A.* Well-posedness of a parabolic equation with involution // Numer. Funct. Anal. Optim. – 2017. – **38**, No. 10. – P. 1295–1304.
– https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997.
13. *Ashyralyev A., Sarsenbi A. M.* Well-posedness of an elliptic equations with an involution // Electron. J. Differ. Equat. – 2015. – **2015**, No. 284. – P. 1–8.
14. *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kopach M. I., Solomko A. V.* The nonlocal boundary value problem with perturbations of mixed boundary conditions for an elliptic equation with constant coefficients. I // Карпат. мат. публікації. – 2019. – **11**, № 2. – С. 228–239. – https://doi.org/10.15330/cmp.11.2.228-239.
15. *Baranetskij Ya. O., Kalenyuk P. I., Kopach M. I., Solomko A. V.* The nonlocal multipoint problem with Dirichlet-type conditions for an ordinary differential equation of even order with involution // Мат. студії. – 2020. – **54**, № 1. – С. 64–78.
– https://doi.org/10.30970/ms.54.1.64-78.
16. *Cabada A., Tojo A. F.* Equations with involutions // Workshop on Differential Equations 2014, March 27–30, 2014, Malá Morávka, Czech Republic. – 2014. – P. 240.
– http://workshop.math.cas.cz/wde/2014/contrib.php.
17. *Hazanee A., Lesnic D.* Determination of a time-dependent coefficient in the bioheat equation // Int. J. Mech. Sci. – 2014. – **88**. – P. 259–266.
– https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.05.017.
18. *Hazanee A., Lesnic D.* Determination of a time-dependent heat source from nonlocal boundary conditions // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2013. – **37**. – P. 936–956.
19. *Hazanee A., Lesnic D., Ismailov M. I., Kerimov N. B.* An inverse time-dependent source problem for the heat equation with a non-classical boundary condition // Appl. Math. Modell. – 2015. – **39.** – P. 6258–6272.
20. *Hazanee A., Lesnic D., Ismailov M. I., Kerimov N. B.* Inverse time-dependent source problems for the heat equation with nonlocal boundary conditions // Appl. Math. Comput. – 2019. – **346**. – P. 800–815.
– https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.10.059.
21. *Kirane M., Al-Salti N.* Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation // J. Nonlin. Sci. Appl. – 2016. – **9**, No. 3. – P. 1243–1251.
– http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.03.49.
22. *Kritskov L. V., Sarsenbi A. M.* Basicity in L_p of root functions for differential equations with involution // Electron. J. Differ. Equat. – 2015. – **2015**, No. 278. – P. 1–9.
23. *Kritskov L. V., Sadybekov M. A., Sarsenbi A. M.* Properties in L_p of root functions for a nonlocal problem with involution // Turk. J. Math. – 2019. – **43**, No. 1. – P. 393–401.
24. *Sadybekov M., Dildabek G., Ivanova M. B.* Direct and inverse problems for nonlocal heat equation with boundary conditions of periodic type // Bound. Value Probl. – 2022. – **53**. – 24 p. – https://doi.org/10.1186/s13661-022-01632-y.
25. *Sadybekov M. A., Dildabek G., Ivanova M. B.* On an inverse problem of reconstructing a heat conduction process from nonlocal data // Adv. Math. Phys. (Hindawi). – **2018**. – 8301656. – https://doi.org/10.1155/2018/8301656.
26. *Sarsenbi A. A.* On a class of inverse problems for a parabolic equation with involution // AIP Conference Proceedings. – 2017. – **1880**. – 040021.
– https://doi.org/10.1063/1.5000637.
27. *Sarsenbi A.* Solvability of a mixed problem for a heat equation with an involution perturbation // AIP Conference Proceedings. – 2019. – **2183**. – 070025.
– https://doi.org/10.1063/1.5136187.

INVERSE PROBLEMS OF DETERMINATION OF A TIME-DEPENDENT COEFFICIENT OF PARABOLIC EQUATION WITH INVOLUTION AND ANTI-PERIODICITY CONDITIONS

The solution of the investigated problem with an unknown coefficient in the equation is constructed using the method of separation of variables. The properties of the spectral problem for the second-order differential equation with involution are studied. The dependencies of the spectrum of operator of the problem and its multiplicity as well as structure of the system of root functions and partial solutions of the problem on the involution part of the equation are investigated. The conditions for the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem are established. For determination of the required coefficient, Volterra integral equation of the second kind is found and solved.

Key words*: *inverse problem, heat conduction equation, method of separation of variables, nonlocal conditions, involution, Riesz basis.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
12.10.21