

**ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В ОРТОТРОПНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ
ОБОЛОНЦІ НЕРЕГУЛЯРНОЇ ШАРУВАТОЇ СТРУКТУРИ**

Досліджено напружено-деформований стан замкнutoї ортотропної циліндричної оболонки нерегулярної шаруватої структури за нагрівання її лінійними джерелами тепла. Для формулювання задачі використовуються рівняння теорії оболонок типу Тимошенка, що враховує поперечну анізотропію, і двовимірні рівняння теплопровідності неоднорідних анізотропних оболонок. Методами інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа знайдено розв'язок нестационарної задачі теплопровідності та квазістатичної задачі термопружності для скінченної шарнірно опертої кругової циліндричної оболонки. Числові результати наведено для двошарової оболонки, шари якої виготовлені з різних графітів.

Ключові слова: термопружність, шарувата оболонка, температурне навантаження, циліндрична оболонка.

Вступ. Анізотропні шаруваті композитні матеріали широко використовуються у різних галузях сучасної техніки як елементи конструкцій, що в процесі експлуатації піддаються дії високих температурних навантажень, які можуть викликати значні напруження і деформації. Крім пластин, найпоширенішими такими елементами є циліндричні оболонки. Широке використання шаруватих оболонок із анізотропних вогнетривких матеріалів вимагає дослідження їх напружено-деформованого стану на основі розширених моделей оболонок, які би враховували термомеханічні анізотропні властивості цих матеріалів, пов'язані з трансверсальною їх стисливістю.

Елементи конструкцій шаруватої структури досліджувались багатьма авторами [1–4, 7, 15]. Розроблено уточнені моделі, які враховують характерні особливості композитних матеріалів, зокрема високу анізотропію термомеханічних властивостей матеріалу в поперечному напрямку [1, 5, 12]. Побудовано точні розв'язки задач термопружності для шаруватих оболонок на основі тривимірних рівнянь [9, 19]. Аналітичні розв'язки за допомогою рівнянь класичної і різних уточнених теорій отримано в [2, 3, 8, 14]. Аналіз впливу коефіцієнта зв'язності на динамічну поведінку композитних оболонок з використанням рівнянь взаємозв'язаної термопружності наведено в [6]. Для вивчення термопружних процесів в оболонках шаруватої структури метод скінчених елементів застосовано в праці [13]. Термоелектромеханічний аналіз багатошарових одновимірних п'єзоелектричних циліндричних оболонок відкритого профілю виконано у статті [9]. У [10] для оцінки критичних значень температури, переміщень і міжшарових напружень у шаруватих оболонках при температурних навантаженнях використано теорію деформування вищого порядку. Детальний огляд різних моделей і методів дослідження неоднорідних елементів тонкостінних конструкцій наведено в [7, 15–17].

У цій статті на основі рівнянь теорії термопружності оболонок із шістьма ступенями свободи та двовимірних рівнянь теплопровідності досліджено термопружний стан шаруватої циліндричної оболонки нерегулярної структури за нагріву її внутрішніми джерелами тепла.

1. Визначення температурного поля. Розглянемо неоднорідну ортотропну кругову циліндричну оболонку з радіусом серединної поверхні R , сталою товщиною $2h$ і довжиною l . Точки оболонки належать до циліндричної системи координат x, θ, z , де x – осьова, θ – колова, z – радіальна

✉ flyachok@ukr.net

координати. Нехай у початковий момент часу температура оболонки дорівнює нулеві. Починаючи з моменту $\tau > 0$, оболонка нагрівається внутрішніми лінійно розподіленими по товщині джерелами тепла $w_t(x, \theta, z, \tau) = (1 + z/h)w^c(x, \theta)w^t(\tau)$. Між поверхнями $z = \pm h$ і зовнішнім середовищем відбувається конвективний теплообмін. Приймаємо, що температура лінійно залежить від поперечної координати. Температурне поле $t(x, \theta, z, \tau)$ такої оболонки визначаємо із системи двовимірних рівнянь теплопровідності [5]:

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)}T_1 - 2\alpha_z T_1 + \Delta_{(2)}T_2 + \frac{A_{33}^\lambda}{hR}T_2 + 2\alpha_z t_z - A^c \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - B^c \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= -W_1^t, \\ \Delta_{(2)}T_1 + \Delta_{(3)}T_2 + \left(\frac{B_{33}^\lambda}{hR} - \frac{A_{33}^\lambda}{h^2} - 2\alpha_z \right) T_2 - B^c \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - D^c \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= -W_2^t, \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)} &= A_{11}^\lambda \partial_{11}^2 + \frac{A_{22}^\lambda}{r^2} \partial_{22}^2, \quad \Delta_{(2)} = B_{11}^\lambda \partial_{11}^2 + \frac{B_{22}^\lambda}{r^2} \partial_{22}^2, \quad \Delta_{(3)} = D_{11}^\lambda \partial_{11}^2 + \frac{D_{22}^\lambda}{r^2} \partial_{22}^2, \\ \{A_{ii}^\lambda, B_{ii}^\lambda, D_{ii}^\lambda\} &= \int_{-h}^h \lambda_{ii}(z) \{1, z/h, (z/h)^2\} dz, \\ \{A^c, B^c, D^c\} &= \int_{-h}^h c_v(z) \{1, z/h, (z/h)^2\} dz, \\ T_j &= \frac{2j-1}{2h^j} \int_{-h}^h t z^{j-1} dz, \quad W_j^t = \int_{-h}^h w_t(z/h)^{j-1} dz, \quad j = 1, 2, \\ c_v &= \text{ср}, \quad \partial_1 = \partial/\partial x, \quad \partial_2 = \partial/\partial \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

$\lambda_{ii}(z)$ – коефіцієнти теплопровідності, t_z – температура зовнішнього середовища на поверхнях $z = \pm h$; α_z – коефіцієнт тепловіддачі з цих поверхонь, $c(z)$ – питома теплоємність, $\rho(z)$ – питома густина; τ – змінна часу, $t(x, y, z, \tau)$ – функція температурного поля.

Для однозначності розв'язку системи (1) задаємо граничні умови на краях оболонки $x = 0$ і $x = \ell$:

$$T_1 = T_2 = 0 \quad (3)$$

і початкові умови в момент часу $\tau = 0$:

$$T_1(x, \theta, 0) = 0, \quad T_2(x, \theta, 0) = 0. \quad (4)$$

Розв'язок системи (1) за умов (3) і (4) знаходимо методами інтегрального перетворення Лапласа за часом і скінченного перетворення Фур'є за координатами. Тоді одержимо

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{C^*} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{Z_j(\tau')}{p_j - p_i} \left[(C_3 p_j - g_4) Q_{1nm} - (C_2 p_j - g_2) Q_{2nm} \right] \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi n}{\ell} x \cos m\theta, \\ T_2 &= \frac{1}{C^*} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{Z_j(\tau')}{p_j - p_i} \left[(C_1 p_j - g_1) Q_{2nm} - (C_2 p_j - g_3) Q_{1nm} \right] \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi n}{\ell} x \cos m\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned}
g_1 &= (\Lambda_{11}^{(1)} \mu_n^2 + \Lambda_{22}^{(1)} m^2) \delta^2 + B_i, & g_2 &= (\Lambda_{11}^{(2)} \mu_n^2 + \Lambda_{22}^{(2)} m^2) \delta^2 - \delta \Lambda_{33}^{(1)}, \\
g_3 &= (\Lambda_{11}^{(2)} \mu_n^2 + \Lambda_{22}^{(2)} m^2) \delta^2, & g_4 &= (\Lambda_{11}^{(3)} \mu_n^2 + \Lambda_{22}^{(3)} m^2) \delta^2 + \Lambda_{33}^{(1)} - \delta \Lambda_{33}^{(2)} + B_i, \\
\{\Lambda_{ii}^{(1)}, \Lambda_{ii}^{(2)}, \Lambda_{ii}^{(3)}\} &= \frac{1}{2h\lambda_0} \{A_{ii}^\lambda, B_{ii}^\lambda, D_{ii}^\lambda\}, \\
\{C_1, C_2, C_3\} &= \frac{1}{2hc_v^0} \{A^c, B^c, D^c\}, \\
B_i &= \frac{\alpha_z h}{\lambda_0}, & \delta &= \frac{h}{R}, & \mu_n &= \frac{\pi n R}{\ell}, & \tau' &= \frac{\lambda_0}{c_v^0 h^2} \tau,
\end{aligned}$$

λ_0 і c_v^0 – деякі характерні коефіцієнти теплопровідності і теплоємності відповідно; $-p_1$ і $-p_2$ – корені квадратного рівняння

$$\begin{aligned}
C^* p^2 + [C_1 g_4 + C_3 g_1 - C_2 (g_3 + g_2)] p + g_1 g_4 - g_2 g_3 &= 0, \\
C^* &= C_1 C_3 - (C_2)^2,
\end{aligned}$$

$$Q_{jmn} = \frac{2hk_m}{(2j-1)\pi\ell} \int_0^\ell \int_{-\pi}^\pi w^c(x, \theta) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \cos m\theta dx d\theta,$$

$$k_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \neq 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$Z_j(\tau') = \frac{h}{2\lambda_0} \int_0^{\tau'} w^t(v) e^{-p_j(\tau'-v)} dv, \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

2. Визначення напружено-деформованого стану. Для дослідження напружено-деформованого стану оболонки, спричиненого температурним полем (5), використаємо рівняння рівноваги в узагальнених переміщеннях u_i , γ_i , $i = 1, 2, 3$, які запишемо в операторній формі [5]:

$$\sum_k^6 L_{rk} y_k = b_r, \quad r, k = 1, 2, \dots, 6. \quad (8)$$

Тут $y_i = u_i$, $i = 1, 2, 3$, – переміщення точок серединної поверхні, $y_{3+i} = \gamma_i$ – кути повороту нормалі і поперечна нормальна деформація, а диференціальні оператори L_{rk} ($L_{rk} = L_{kr}$) і вільні члени b_r мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
L_{11} &= A_{11} \partial_{11}^2 + A_{66}/R^2 \partial_{22}^2, & L_{12} &= (A_{12} + A_{66})/R \partial_{12}^2, & L_{13} &= A_{12}/R \partial_1, \\
L_{14} &= B_{11} \partial_{11}^2 + B_{66}/R^2 \partial_{22}^2, & L_{15} &= (B_{12} + B_{66})/R \partial_{12}^2, \\
L_{16} &= (A_{13} + B_{12}/R) \partial_1, & L_{22} &= A_{66} \partial_{11}^2 + A_{22}/R^2 \partial_{22}^2 - k' A_{55}/R^2, \\
L_{23} &= (A_{22} + k' A_{55})/R^2 \partial_2, & L_{24} &= (B_{12} + B_{66})/R \partial_{12}^2, \\
L_{25} &= B_{66} \partial_{11}^2 + B_{22}/R^2 \partial_{22}^2 + k' A_{55}/R, \\
L_{26} &= (A_{23}/R + (B_{22} + k' B_{55})/R^2) \partial_2, \\
L_{33} &= -k' A_{44} \partial_{11}^2 - k' A_{55}/R^2 \partial_{22}^2 + A_{22}/R^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{34} &= (B_{12}/R - k'A_{44})\partial_1, \\
L_{35} &= (B_{22}/R - k'A_{55})/R \partial_2, \\
L_{36} &= -k'B_{44}\partial_{11}^2 + (B_{22} - k'B_{55}\partial_{22}^2)/R^2 + A_{23}/R, \\
L_{44} &= D_{11}\partial_{11}^2 + D_{66}/R^2 \partial_{22}^2 - k'A_{44}, \quad L_{45} = (D_{12} + D_{66})/R \partial_{12}^2, \\
L_{46} &= (D_{12}/R + B_{13} - k'B_{44})\partial_1, \quad L_{55} = D_{66}\partial_{11}^2 + D_{22}/R^2 \partial_{22}^2 - k'A_{55}, \\
L_{56} &= ((B_{23} - k'B_{55})/R + D_{22}/R^2)\partial_2, \\
L_{66} &= A_{33} + 2B_{23}/R + D_{22}/R^2 - k'D_{44}\partial_{11}^2 - k'D_{55}/R^2 \partial_{22}^2, \\
b_1 &= A_{11}^t\partial_1 T_1 + B_{11}^t/h \partial_1 T_2, \quad b_2 = A_{22}^t/R \partial_2 T_1 + B_{22}^t/(Rh)\partial_2 T_2, \\
b_3 &= A_{22}^t/R T_1 + B_{22}^t/(Rh) T_2, \quad b_4 = B_{11}^t\partial_1 T_1 + D_{11}^t/h \partial_1 T_2, \\
b_5 &= B_{22}/R \partial_2 T_1 + D_{22}^t/(Rh)\partial_2 T_2, \\
b_6 &= (A_{33}^t + B_{22}^t/R) T_1 + (D_{22}^t/R + B_{33}^t)/h T_2,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} &= \int_{-h}^h c_{ij}(z)\{1, z, z^2\} dz, \\
\{A_{ii}^t, B_{ii}^t, D_{ii}^t\} &= \int_{-h}^h \beta_{ii}^t(z)\{1, z, z^2\} dz,
\end{aligned} \tag{9}$$

$\beta_{ii}^t(z) = c_{i1}(z)\alpha_1^t(z) + c_{i2}(z)\alpha_2^t(z) + c_{i3}(z)\alpha_3^t(z)$; $c_{ij}(z)$ – коефіцієнти пружності ортотропного тіла [15], $\alpha_i^t(z)$ – коефіцієнти лінійного теплового розширення, k' – коефіцієнт зсуву [11].

До системи (8) долучаємо граничні умови шарнірного опирання на краях оболонки $x = 0$ і $x = \ell$:

$$u_2 = u_3 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \quad N_1 = M_1 = 0, \tag{10}$$

де N_1 і M_1 – відповідно нормальне зусилля і момент.

Система диференціальних рівнянь (8) разом з граничними умовами (10) складає крайову квазістатичну задачу температурних напружень для ортотропних неоднорідних циліндричних оболонок в узагальнених переміщеннях. Розв'язуємо цю задачу методом скінченного подвійного перетворення Фур'є за координатами x і θ . За відомими узагальненими переміщеннями знаходимо температурні напруження

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= c_{11}(\partial_1 u_1 + z\partial_1 \gamma_1) + c_{12}[\partial_2 u_2 + u_3 + z(\gamma_3 + \partial_2 \gamma_2)]/(R + z) + \\
&\quad + c_{13}\gamma_3 - \beta_{11}t, \\
\sigma_{22} &= c_{12}(\partial_1 u_1 + z\partial_1 \gamma_1) + c_{22}[\partial_2 u_2 + u_3 + z(\gamma_3 + \partial_2 \gamma_2)]/(R + z) + \\
&\quad + c_{23}\gamma_3 - \beta_{22}t, \\
\sigma_{33} &= c_{13}(\partial_1 u_1 + z\partial_1 \gamma_1) + c_{23}[\partial_2 u_2 + u_3 + z(\gamma_3 + \partial_2 \gamma_2)]/(R + z) + \\
&\quad + c_{33}\gamma_3 - \beta_{33}t, \\
\sigma_{12} &= c_{66}[\partial_1 u_2 + z\partial_1 \gamma_2 + (\partial_2 u_1 + z\partial_2 \gamma_1)/(R + z)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= c_{44}(\gamma_1 + \partial_1 u_3 + z\partial_1 \gamma_3), \\ \sigma_{23} &= c_{55}[\gamma_2 R + \partial_2 u_3 + z\partial_2 \gamma_3 - u_2]/(R + z).\end{aligned}\quad (11)$$

3. Числовий приклад. Аналіз результатів. Як приклад розглянемо двошарову оболонку нерегулярної структури. Нехай $q^{(1)} = \{c_{ij}^{(1)}, \beta_{ii}^{(1)}, \lambda_{ii}^{(1)}, c_v^{(1)}\}$ і $q^{(2)} = \{c_{ij}^{(2)}, \beta_{ii}^{(2)}, \lambda_{ii}^{(2)}, c_v^{(2)}\}$ – фізико-механічні характеристики першого і другого шарів відповідно, а h_1 і h_2 – їхні товщини, $h_1 + h_2 = h$. Тоді вирази для інтегральних характеристик $A^q = \{A_{ij}, A_{ii}^t, A_{ii}^\lambda, A^c\}$, $B^q = \{B_{ij}, B_{ii}^t, B_{ii}^\lambda, B^c\}$ і $D^q = \{D_{ij}, D_{ii}^t, D_{ii}^\lambda, D^c\}$ через фізико-механічні характеристики шарів визначаємо за формулами [4]

$$\begin{aligned}A^q &= h \left[2q^{(1)} + (q^{(2)} - q^{(1)}) \left(2 - \frac{h_1}{h} \right) \right], \\ B^q &= h^2 \left[\frac{1}{2}(q^{(2)} - q^{(1)}) \frac{h_1}{h} \left(2 - \frac{h_1}{h} \right) \right], \\ D^q &= \frac{h^3}{3} \left\{ 2q^{(1)} + (q^{(2)} - q^{(1)}) \left[1 + \left(1 - \frac{h_1}{h} \right)^3 \right] \right\}.\end{aligned}\quad (12)$$

Числові дослідження виконували для випадку, коли функції розподілу джерел тепла $w^c(x, \theta)$ і $w^t(\tau)$ мають вигляд

$$w^c(x, \theta) = \frac{w_t^*}{4} \left[1 - \cos \frac{x - (x_0 - d)}{d} \right] \left(1 + \cos \frac{\pi\theta}{\eta} \right) N(x)N(\theta), \quad (13)$$

$$w^t(\tau) = 1 - e^{-\beta^* \tau}, \quad (14)$$

де

$$N(x) = S_-(x - (x_0 - d)) - S_+(x - (x_0 + d)),$$

$$N(\theta) = S_-(\theta + \eta) - S_+(\theta - \eta),$$

$$S_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad S_-(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

– одиничні функції, $2d$ і 2η – відповідно ширина і кут області нагріву, $(x_0, 0)$ – координати центра цієї області, $w_t^*, \beta^* = \text{const}$.

Зі співвідношень (6) і (13) одержуємо вирази для коефіцієнтів Фур'є Q_{jnm} :

– для $m \neq \pi/\eta$, $n \neq \ell/d$:

$$\begin{aligned}Q_{jnm} &= \frac{4hw_t^*}{(2j-1)\pi^2} \left(\frac{n}{(\ell/d)^2 - n^2} + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{m}{(\pi/\eta)^2 - m^2} + \frac{1}{m} \right) \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi nd}{\ell} \sin \frac{\pi nx_0}{\ell} \sin m\eta,\end{aligned}$$

– для $m \neq \pi/\eta$, $n = \ell/d$:

$$Q_{jnm} = \frac{2hw_t^*}{(2j-1)\pi n} \left(\frac{m}{(\pi/\eta)^2 - m^2} + \frac{1}{m} \right) \sin \frac{\pi x_0}{d} \sin m\eta,$$

– для $m = \pi/\eta$, $n \neq \ell/d$:

$$Q_{jnm} = \frac{2hw_t^*}{(2j-1)\pi m} \left(\frac{n}{(\ell/d)^2 - n^2} + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{\pi n d}{\ell} \sin \frac{\pi n x_0}{\ell},$$

– для $m = \pi/\eta$, $n = \ell/d$:

$$Q_{jnm} = \frac{hw_t^*}{(2j-1)\pi m} \sin \frac{\pi x_0}{d},$$

– для $n \neq \ell/d$:

$$Q_{jn0} = \frac{2hw_t^*}{(2j-1)\pi^2} \left(\frac{n}{(\ell/d)^2 - n^2} + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{\pi n d}{\ell} \sin \frac{\pi n x_0}{\ell},$$

– для $n = \ell/d$:

$$Q_{jn0} = \frac{h\eta w_t^*}{(2j-1)\pi n} \sin \frac{\pi x_0}{d}.$$

Функцію часу обчислюємо за формулами (7) і (14):

$$Z_j(\tau') = \frac{h}{2\lambda_0} \left[\frac{1}{p_j} (1 - e^{-p_j \tau'}) + \frac{1}{\beta^* - p_j} (e^{-\beta^* \tau'} - e^{-p_j \tau'}) \right].$$

Для обчислень за матеріали шарів оболонки вибрано графіти типу D (ZTA), C (ZTA) і піролітичний графіт двох видів PG і PG* [18], фізико-механічні характеристики яких подаємо в табл. 1.

Таблиця 1

	Тип матеріалу		
	C	D	PG, PG*
E_1 , ГПа	19.67	4.82	29.6
E_2 , ГПа	4.82	19.67	29.6
E_3 , ГПа	4.82	19.67	8.9
G_{12} , ГПа	3.42	3.42	12.23
G_{23} , ГПа	1.85	7.57	1.48
ν_{21}	0.05	0.2	-0.21
ν_{23}	0.3	0.3	0.9
ν_{31}	0.2	0.05	0.3
$\alpha_1^t \cdot 10^{-6}$, К ⁻¹	2.26	26.93	1.08
$\alpha_2^t \cdot 10^{-6}$, К ⁻¹	26.93	2.26	1.08
$\alpha_3^t \cdot 10^{-6}$, К ⁻¹	26.93	2.26	10.8; 32.4
λ_1 , Вт/(м·К)	180.58	67.13	118.81
λ_2 , Вт/(м·К)	67.13	180.58	118.81
λ_3 , Вт/(м·К)	67.13	180.58	59.4
c , Дж/(кг·К)	710	710	750

Значення інших параметрів є такими: $h/R = 0.05$, $\ell/R = 3$, $\eta = \pi/4$, $d/\ell = (R/\ell) \sin \eta$, $x_0 = \ell/2$, $\lambda_0 = \lambda_3^{(1)}$, $c_v^0 = c_v^{(1)}$, $k' = 5/6$, $Bi = 1$, $h_2/h_1 = 1$, $\tau' = 10$, $\beta^* = 2$.

Досліджували чотири типи двошарових оболонок. Перші (внутрішні) шари всіх типів оболонок виготовлені з графіту типу D. Другі (зовнішні)

шари виготовлені або з графіту типу D (однорідна оболонка), або з графіту типу C, або з піролітичного графіту типу PG і PG*. Ці типи оболонок будемо позначати відповідно D|D, C|D, PG|D і PG*|D. Тепломеханічні властивості першого шару позначаємо через $\{E_i^{(1)}, \alpha_i^{t(1)}, \lambda_i^{(1)}, c_v^{(1)}\}$, а другого – через $\{E_i^{(2)}, \alpha_i^{t(2)}, \lambda_i^{(2)}, c_v^{(2)}\}$.

Обчислено безрозмірні нормальні напруження $\sigma'_i = \frac{\lambda_3^{(1)} \sigma_{ii}}{h^2 E_1^{(1)} \alpha_1^{t(1)} w_t^*}$,

$i = 1, 2$, і радіальні прогини $w' = \frac{\lambda_3^{(1)} u_3}{Rh^2 \alpha_1^{t(1)} w_t^*}$ для чотирьох типів двошарових

оболонок D|D, C|D, PG|D і PG*|D.

Суцільні лінії на рисунках відповідають оболонці типу D|D, штрихпунктирні – типу C|D, пунктирні – типу PG|D і штрихові – типу PG*|D.

Залежність осьового σ'_1 і колового σ'_2 напружень від безрозмірної поперечної координати $z' = z/h$ показано на рис. 1 і рис. 2.

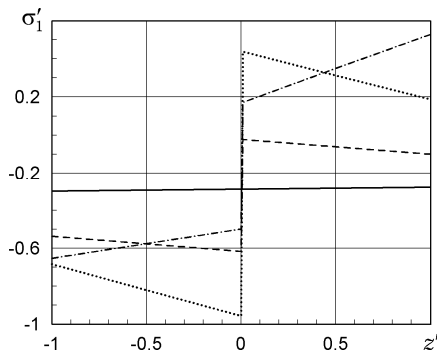


Рис. 1

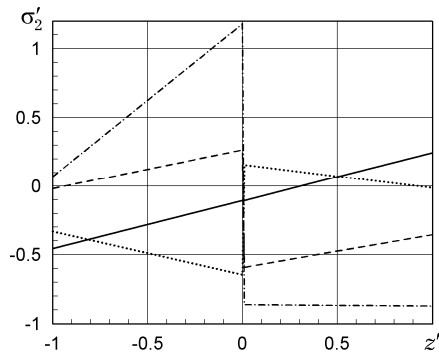


Рис. 2

Напруження по товщині шарів змінюються лінійно і на лінії поділу різних матеріалів зазнають розриву. Найбільший розрив для напруження σ'_1 спостерігається в оболонці типу PG|D, а для напруження σ'_2 – в оболонці типу C|D. Для всіх типів оболонок напруження σ'_1 у першому шарі є стискувальним, а в другому – розтягувальним. Із рисунків видно, що неоднорідність істотно впливає на величину і знак напружень уздовж товщини оболонки.

Зміну напружень σ'_1 і σ'_2 , обчислених на поверхні $z' = -1$, уздовж твірної $\theta = 0$ від її середини до кінця ($0.5 \leq x' = x/\ell \leq 1$) ілюструють рис. 3 і рис. 4, а їхню зміну вздовж напрямної $x' = 0.5$ від середини нагрітої області $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi/3$ – рис. 5 і рис. 6.

Осьові напруження σ'_1 в області нагріву для всіх типів оболонок є стискувальними і досягають максимальних значень у точці $(0.5, 0)$. Найбільші значення σ'_1 спостерігаємо в оболонці типу PG|D, а найменші – в однорідній оболонці D|D.

Колові напруження σ'_2 як уздовж твірної, так і вздовж напрямної мають коливний характер. Ці напруження в області нагріву для оболонок типу D|D, PG|D і PG*|D є стискувальними, причому найбільші значення досягаються для оболонок D|D, а найменші – для PG*|D. Для оболонок типу C|D напруження σ'_2 в області нагріву є розтягувальними, а поза нею – стискувальними.

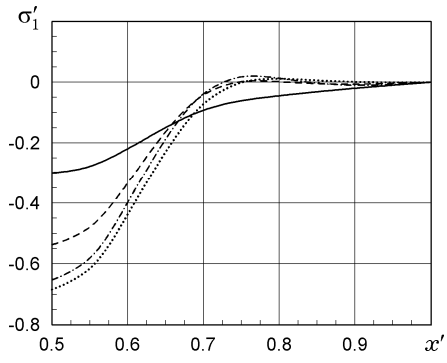


Рис. 3

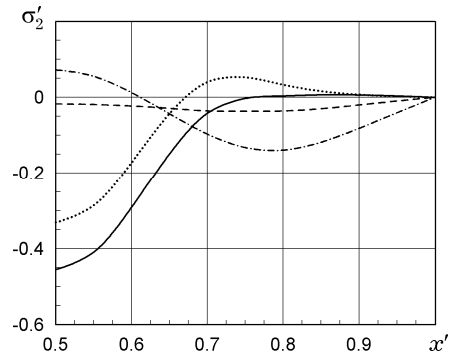


Рис. 4

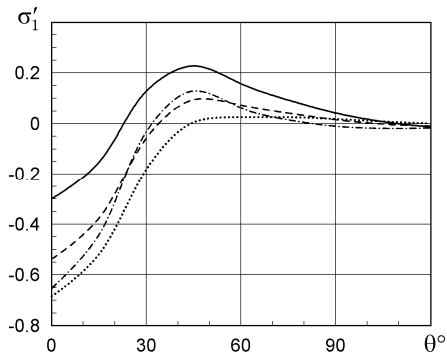


Рис. 5

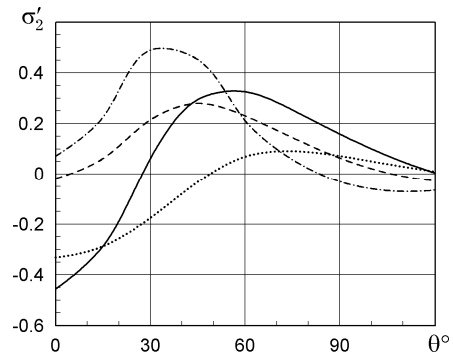


Рис. 6

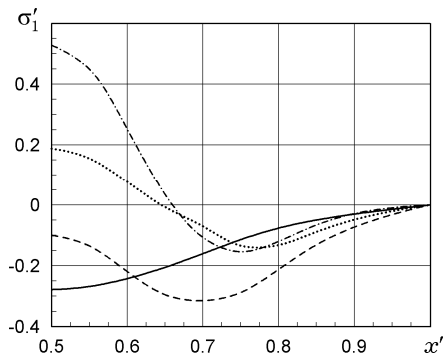


Рис. 7

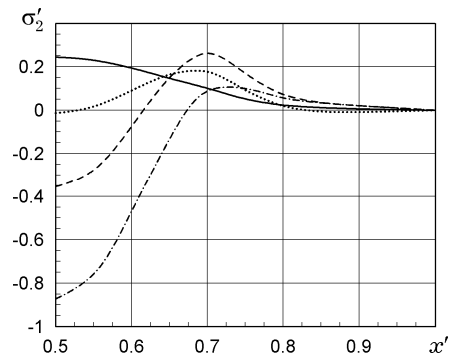


Рис. 8

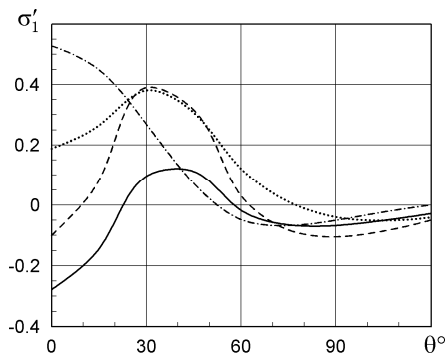


Рис. 9

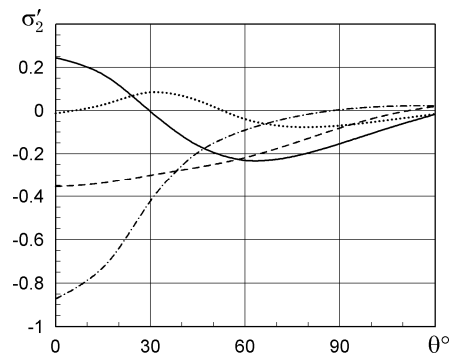


Рис. 10

Рис. 7 –рис. 10 ілюструють зміну осевих і колових напружень, обчислених на зовнішній поверхні $z' = 1$ уздовж твірної (рис. 7, рис. 8) і вздовж напрямної (рис. 9, рис. 10).

На зовнішній поверхні вздовж напрямної коливний характер мають напруження для всіх типів оболонок, а вздовж твірної – тільки напруження неоднорідних оболонок. Максимальних значень напруження досягають у центрі області нагріву, причому максимальні напруження для оболонок типу D|D і C|D завжди мають різні знаки.

Зміну радіального прогину w' вздовж твірної і вздовж напрямної показано відповідно на рис. 11 і рис. 12.

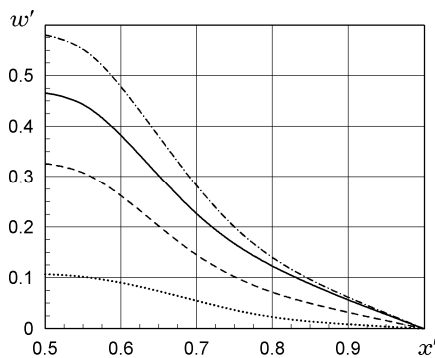


Рис. 11

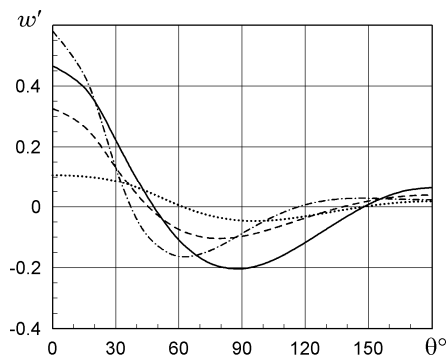


Рис. 12

Максимальні величини радіальних прогинів зафіксовано в центрі області нагріву, причому оболонки типу C|D зазнають найбільших прогинів, а оболонки типу PG|D – найменших. Уздовж твірної прогини монотонно зменшуються до нуля з наближенням до країв оболонки, а вздовж напрямної коливаються між додатними і від'ємними значеннями.

Висновки. На основі рівнянь лінійної зсувної теорії першого порядку досліджено переміщення і напруження неоднорідної за товщиною ортотропної кругової замкнутої циліндричної оболонки, яка нагрівається лінійно розподіленими по товщині джерелами тепла. Замкнутий розв'язок нестационарної задачі теплопровідності і квазістатичної задачі незв'язаної термопружності для скінченної шарнірно опертої на кінцях оболонки знайдено методами інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа. Числовий аналіз виконано для двохшарової оболонки нерегулярної структури, шари якої виготовлено з графітів. Одержані результати можуть бути використані для аналізу напружено-деформованого стану оболонок з покриттями.

1. Жидик У. В. Шарувата поперечно армована циліндрична оболонка за нестационарного нагрівання // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2019. – Вип. 17. – С. 113–120. – <https://doi.org/10.15407/apmm2019.17.113-120>.
2. Жидик У. В., Флячок В. М. Температурні поля в пологих оболонках шаруватої структури // Квалілогія книги. – 2017. – № 1(31). – С. 94–97.
3. Жидик У., Николишин М., Флячок В. Розрахунок термопружного стану шаруватої анізотропної циліндричної оболонки при локальному нагріванні джерелами тепла // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 71–76.
4. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
5. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Жидик У. В., Флячок В. М. Моделювання термопружних процесів в неоднорідних анізотропних оболонках з початковими деформаціями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 2. – С. 122–136.
Те саме: Kushnir R. M., Nykolyshyn M. M., Zhydyk U. V., Flyachok V. M. Modeling of thermoelastic processes in heterogeneous anisotropic shells with initial deformations // J. Math. Sci. – 2011. – 178, No. 5. – P. 512–530. – <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0566-5>.

6. *Brischetto S., Carrera E.* Coupled thermo-mechanical analysis of one-layered and multilayered isotropic and composite shells // *Comput. Model. Eng. & Sci.* – 2010. – **56**, № 3. – P. 249–302. – <https://doi.org/10.3970/cmesci.2010.056.249>.
7. *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 1 – Vol. 11. – LXXXIII+6643 p.
8. *Fazelzadeh S. A., Rahmani S., Ghavanloo E., Marzocca P.* Thermoelastic vibration of doubly-curved nano-composite shells reinforced by graphene nanoplatelets // *J. Therm. Stresses.* – 2019. – **42**, No. 1. – P. 1–17. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1524733>.
9. *Li Y., Yang L., Zhang L., Gao Y.* Exact thermoelectroelastic solution of layered one-dimensional quasicrystal cylindrical shells // *J. Therm. Stresses.* – 2018. – **41**, No. 10-12. – P. 1450–1467. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1520618>.
10. *Matsunaga H.* Thermal buckling of cross-ply laminated composite shallow shells according to a global higher-order deformation theory // *Compos. Struct.* – 2007. – **81**, No. 2. – P. 210–221. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2006.08.008>.
11. *Mirsky I.* Vibrations of orthotropic, thick, cylindrical shells // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1964. – **36**, No. 1. – P. 41–51. – <https://doi.org/10.1121/1.1918910>.
12. *Ootao Y., Tanigawa Y., Miyatake K.* Transient thermal stresses of a cross-ply laminated cylindrical shell using a higher-order shear deformation theory // *J. Therm. Stresses.* – 2010. – **33**, No. 1. – P. 55–74. – <https://doi.org/10.1080/014957390903310524>.
13. *Pandey S., Pradyumna S.* Transient stress analysis of sandwich plate and shell panels with functionally graded material core under thermal shock // *J. Therm. Stresses.* – 2018. – **41**, No. 5. – P. 543–567. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1422999>.
14. *Punera D., Kant T., Desai Y. M.* Thermoelastic analysis of laminated and functionally graded sandwich cylindrical shells with two refined higher order models // *J. Therm. Stresses.* – 2018. – **41**, No. 1. – P. 54–79. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1373379>.
15. *Reddy J. N.* *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis.* – Boca Raton: CRC Press, 2003. – 858 p.
16. *Swaminathan K., Sangeetha D. M.* Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods // *Compos. Struct.* – 2017. – **160**. – P. 43–60. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.047>.
17. *Thai H.-T., Kim S.-E.* A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells // *Compos. Struct.* – 2015. – **128**, No. 1. – P. 70–86. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.010>.
18. *The industrial graphite engineering handbook.* – New York: Union Carbide Corp. 1970.
19. *Tokovyy Y. V., Chyzh A. I., Ma C.-C.* Thermal analysis of radially-inhomogeneous hollow cylinders vs cylindrical shells // *Proc. of the Sixth Asian Conference on Mechanics of Functional Materials and Structures (ACMFMS 2018), October 26–29, 2018, Tainan.* – Taiwan, 2018. – P. 216–219.

THERMAL STRESSES IN THE ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL OF IRREGULAR LAYERED STRUCTURE

The stress-strain state of a closed orthotropic cylindrical shell of an irregular layered structure subjected to the heating by linear heat sources is investigated. For the statement of the problem the equations of Timoshenko-type shell theory which takes into account the transverse anisotropy, and two-dimensional equations of heat conduction of inhomogeneous anisotropic shells are used. The solution of the nonstationary problem of heat conduction and the quasistatic problem of thermoelasticity for a finite hinged supported circular cylindrical shell is found by using the methods of Fourier and Laplace integral transformations. Numerical results are presented for a two-layer shell, the layers of which are made of different graphites.

Key words: thermoelasticity, layered shell, thermal load, cylindrical shell.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
² Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
14.07.22