

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН НАМАГНІЧЕНОЇ ФЕРИТОВОЇ ПЛАСТИНИ ПРИ ПОШИРЕННІ ОБ'ЄМНИХ МАГНІТОСТАТИЧНИХ ХВИЛЬ


З використанням розвинутої раніше моделі електромагнітотермомеханіки та результатів проведених досліджень закономірностей поширення об'ємних магнітостатичних хвиль у металізованій нормально намагніченій феритовій пластині записано вихідні співвідношення, що описують її тепловий та напружений стани. Зокрема, отримано вирази для енергетичних і силових чинників дії електромагнітного поля, що їх зумовлюють. Запропоновано методіку розв'язування сформульованої задачі та проаналізовано частотні залежності температури, нормальних та дотичних напружень у межах смуги пропускання, у якій можливим є збудження таких хвиль, а також розподіли температури та напружень за товщинною координатою.

Ключові слова: металізована нормально намагнічена феритова пластинка, об'ємні магнітостатичні хвилі, смуга пропускання частот, несиметричний тензор напружень, термонапружений стан.

Вибір раціональних режимів експлуатації електротехнічних пристроїв, які містять елементи зі специфічними магнітними властивостями (феромагнітні, феритові), зокрема, такі, що використовують особливості поширення магнітостатичних хвиль (МСХ) (різні фільтри, лінії затримки, фазообертачі, перегворювачі частот тощо) [28, 29], пов'язаний із математичним моделюванням і дослідженням взаємозв'язаних електромагнітних, теплових і механічних процесів у наявних магнітних середовищах. Особливість моделювання полягає в необхідності залучення і розвитку теорій електромеханічної взаємодії, які враховують моментні силові чинники [2, 4, 7–9, 15, 25, 27], зокрема, за врахування підходів класичної теорії пружності [15, 26].

Дослідженню явищ поширення поверхневих і об'ємних МСХ у феритових елементах електротехнічних пристроїв присвячена численна література [1, 10–14, 16, 17, 22 та ін.]. Як відомо, частина енергії електромагнітного поля, яку несуть МСХ, частково розсіюється (поглинається) в магнетик та викликає його нагрів [3–5, 7]. Напруження, спричинені нагрівом, а також силовими чинниками дії поля (пондеромоторними силами та механічним моментом сил) [2, 8, 18, 24], можуть досягати значних рівнів. Ці фактори мають дестабілізуючий вплив на параметри та роботу пристроїв.

Однак у більшості робіт вивчають лише умови виникнення МСХ і не розглядають зумовлені хвилями нагрів і деформування відповідних елементів. У літературі практично відсутні роботи, в яких розраховують тепловий і напружений стани в плівкових магнітних матеріалах. Тому необхідно розробити ефективні розрахункові моделі та методи визначення і дослідження електромагнітного поля, тепловиділень, пондеромоторних сил і моментів сил, а також температури і механічних напружень у феритових плівках залежно від характеру зовнішнього електромагнітного поля (ЕМП), його частоти, амплітуди, умов теплообміну із зовнішнім середовищем, теплофізичних і механічних характеристик матеріалу тощо. Частковому вирішенню окреслених питань присвячена ця робота, яка є продовженням праці [6, 7]. Так, у роботі [7] розглянуто магнетик, що знаходиться під дією нормального сталого і дотичного гармонічного магнітних полів, і досліджено умови виникнення у ньому малих гіромагнітних коливань. Встановлено залежності намагнічування та індукції магнітного поля, а також енергетичних і силових чинників від напруженості зовнішнього поля. У [6] з використанням відомої [10] методіки визначення характеристик магнітного поля, що

 roman_ivasko@ukr.net

ґрунтується на методі малого параметра (за який вибрано відношення амплітуди H_1 дотичного гармонічного поля \mathbf{H}_1 частоти ω до амплітуди H_0 нормального сталого магнітного поля \mathbf{H}_0) за обмеження двома членами розкладу. Визначено умови збудження МСХ і досліджено закономірності поширення об'ємних хвиль у металізованій нормально намагніченій (вектор намагнічування \mathbf{M}_s паралельний до вектора \mathbf{H}_0 , оскільки ним індукований) феритовій пластині товщини ℓ (рис. 1) залежно від характеру зовнішнього ЕМП та електрофізичних характеристик її матеріалу. Зауважимо, що МСХ можуть поширюватись лише у площині xOy в напрямку осі Oz , тобто в об'ємі пластини.

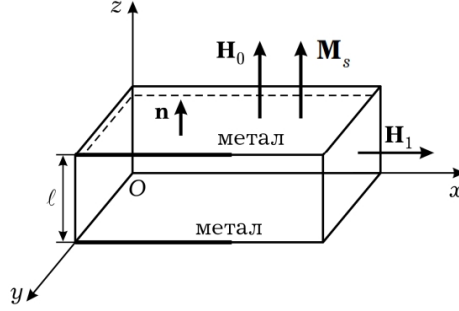


Рис. 1

При вивченні процесів збудження та поширення МСХ характеристики гармонік напруженості, намагніченості та індукції ЕМП $a \equiv \{h, m, b\}$ подавали у вигляді [10, 22]

$$a_j(x, y, z) = \bar{a}_j(z) e^{-i(k_x x + k_y y)}, \quad j = x, y, z,$$

де k_x, k_y – хвильові числа, що відповідають осям Ox і Oy .

1. Енергетичні та силові чинники дії магнітного поля. Для визначення теплового і напруженого станів у намагніченій феритовій пластині необхідні вирази для енергетичних і силових чинників дії магнітного поля – тепловиділень, пондеромоторних сил та моментів (тензора натягів Максвелла). Аналогічно, як і в роботі [5], при їх окресленні приймемо, що визначальними є усереднені за часом значення. Їх отримаємо, використовуючи знайдені в [6] розв'язки для напруженості магнітного поля, намагніченості та індукції магнітного поля в першому та другому наближеннях (відповідно формули (11), (17), (20)–(22) у роботі [6]), виходячи зі співвідношень (30)–(35) з роботи [7]. Аналіз показує, що вони містять множник $e^{-2(k_2 x + k_2 y)}$, тобто вирази чинників дії зовнішнього ЕМП можна подати у вигляді

$$A = \bar{A} e^{-2(k_2 x + k_2 y)}, \quad A = \{Q, T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, T_{xy}, T_{xz}, T_{zx}, T_{yz}, T_{zy}, \pi_{xy}\}, \quad (1)$$

де значення величин \bar{A} відповідно будуть

– тепловиділення:

$$\bar{Q} = \mu_0 H_1^2 \alpha_S \omega_M \omega^2 \xi_1(\omega) d^{-1}(\omega) \cos^2 k_z z; \quad (2)$$

– компоненти тензора натягів Максвелла:

$$\bar{T}_{xx} = -\mu_0 H_1^2 \left[\langle h_{2z} \rangle + \frac{k_z^2}{4k_0^2} \sin^2 k_z z + \frac{\omega_H \omega_M \gamma_x(\omega)}{2d(\omega)} \cos^2 k_z z \right],$$

$$\bar{T}_{yy} = -\mu_0 H_1^2 \left[\langle h_{2z} \rangle + \frac{k_z^2}{4k_0^2} \sin^2 k_z z + \frac{\omega_H \omega_M \gamma_y(\omega)}{2d(\omega)} \cos^2 k_z z \right],$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{zz} &= \mu_0 H_1^2 \left[\mu \langle h_{2z} \rangle + \frac{k_z^2}{4k_0^2} \sin^2 k_z z - \frac{\tau_{zz}(\omega)}{2d(\omega)} \cos^2 k_z z \right], \\
\bar{T}_{xy} &= \frac{\mu_0 H_1^2}{2d(\omega)} \tau_{xy}(\omega) \cos^2 k_z z, \quad \bar{T}_{yx} = \frac{\mu_0 H_1^2}{2d(\omega)} \tau_{yx}(\omega) \cos^2 k_z z, \\
\bar{T}_{xz} &= \bar{T}_{zx} = \bar{T}_{yz} = \bar{T}_{zy} = \mu_0 H_1^2 \left(\mu \langle h_{2x} \rangle + \frac{k_2 k_z}{4k_0^2} \sin 2k_z z \right). \tag{3}
\end{aligned}$$

Єдиною відмінною від нуля компонентою антисиметричного тензора натягів Максвелла [7] є

$$\bar{\pi}_{xy} = -\mu_0 H_1^2 \frac{\alpha_s \omega_H \omega_M \omega^2}{d(\omega)} \cos^2 k_z z. \tag{4}$$

У формулах (2)–(4) введено позначення

$$\begin{aligned}
\tau_{zz}(\omega) &\equiv d(\omega) + \omega_H \omega_M \xi_1(\omega), \\
\tau_{xy}(\omega) &\equiv d(\omega) - \omega_H \omega_M \gamma_y(\omega), \quad \tau_{yx}(\omega) \equiv d(\omega) - \omega_H \omega_M \gamma_x(\omega), \tag{5}
\end{aligned}$$

де $\omega_H \equiv \gamma_s H_0$ і $\omega_M \equiv \gamma_s M_s$ – власні частоти коливань відповідно векторів напруженості поля та намагніченості; γ_s – магнітоmechanічне (гіромагнітне) відношення [10, 17]; α_s – параметр втрат [7]. Позначення решти величин відповідають використаним у [6, 7].

2. Постановка задачі термопружності. При знаходженні температури і напружень тонку магнітну плівку моделюватимемо нескінченним шаром товщини ℓ , який віднесемо до прямокутної системи координат (x, y, z) (рис. 1). Приймаємо, що на верхній основі $z = \ell$ шару відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого дорівнює початковій температурі T_0 у шарі, а нижня основа $z = 0$ теплоізольована. Вважаємо також, що поверхня $z = \ell$ вільна від силового навантаження, а основа шару $z = 0$ жорстко скріплена з діелектричним півпростором.

Температуру та механічні напруження визначатимемо з використанням теорії незв'язаної квазістатичної задачі термопружності [2, 21]. Враховуючи подання (1) для тепловиділень і компонент тензора натягів Максвелла, відхилення \bar{T} температури від початкової T_0 ($\bar{T} = T - T_0$) та компоненти тензора напружень σ_{ij} і вектора переміщень u_i шукатимемо в аналогічному до (1) вигляді. Тоді основними співвідношеннями *термопружності* з урахуванням виразів (2)–(5) будуть

– *рівняння теплопровідності:*

$$4 \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} + 4x_0^2 \bar{T} + \frac{\bar{Q}}{a}, \tag{6}$$

де $x_0^2 \equiv k_{2x}^2 + k_{2y}^2$, a і a – коефіцієнти тепло- і температуропровідності;

– *балансові співвідношення механіки (рівняння рівноваги):*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} (\bar{\sigma}_{xz} + \bar{T}_{xz}) &= 2 \left[k_{2x} (\bar{\sigma}_{xx} + \bar{T}_{xx}) + k_{2y} (\bar{\sigma}_{xy} + \bar{T}_{xy}) \right], \\
\frac{d}{dz} (\bar{\sigma}_{yz} + \bar{T}_{yz}) &= 2 \left[k_{2x} (\bar{\sigma}_{yx} + \bar{T}_{yx}) + k_{2y} (\bar{\sigma}_{yy} + \bar{T}_{yy}) \right], \\
\frac{d}{dz} (\bar{\sigma}_{zz} + \bar{T}_{zz}) &= 2 \left[k_{2x} (\bar{\sigma}_{zx} + \bar{T}_{zx}) + k_{2y} (\bar{\sigma}_{zy} + \bar{T}_{zy}) \right]; \tag{7}
\end{aligned}$$

– співвідношення Коші для тензора деформацій:

$$\begin{aligned}\bar{e}_{xx} &= -2k_{2x}\bar{u}_x, & \bar{e}_{yy} &= -2k_{2y}\bar{u}_y, \\ \bar{e}_{zz} &= d\bar{u}_z/dz, & \bar{e}_{xy} &= \bar{e}_{yx} = -(k_{2x}\bar{u}_y + k_{2y}\bar{u}_x), \\ \bar{e}_{xz} &= \bar{e}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{u}_x}{dz} - 2k_{2x}\bar{u}_z\right), & \bar{e}_{yz} &= \bar{e}_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{u}_y}{dz} - 2k_{2y}\bar{u}_z\right);\end{aligned}\quad (8)$$

– закон Дюгамеля – Неймана:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx} &= \frac{E_p}{(1 + \nu_p)(1 - 2\nu_p)} \times \\ &\quad \times \left\{ \nu_p \frac{d\bar{u}_z}{dz} - 2 \left[(1 - \nu_p)k_{2x}\bar{u}_x + \nu_p k_{2y}\bar{u}_y \right] - (1 + \nu_p)\alpha_T \bar{T} \right\}, \\ \bar{\sigma}_{yy} &= \frac{E_p}{(1 + \nu_p)(1 - 2\nu_p)} \times \\ &\quad \times \left\{ \nu_p \frac{d\bar{u}_z}{dz} - 2 \left[\nu_p k_{2x}\bar{u}_x + (1 - \nu_p)k_{2y}\bar{u}_y \right] - (1 + \nu_p)\alpha_T \bar{T} \right\}, \\ \bar{\sigma}_{zz} &= \frac{E_p}{(1 + \nu_p)(1 - 2\nu_p)} \times \\ &\quad \times \left\{ (1 - \nu_p) \frac{d\bar{u}_z}{dz} - 2\nu_p (k_{2x}\bar{u}_x + k_{2y}\bar{u}_y) - (1 + \nu_p)\alpha_T \bar{T} \right\}, \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \bar{\sigma}_{yx} = -\frac{E_p}{1 + \nu_p} (k_{2x}\bar{u}_y + k_{2y}\bar{u}_x), \\ \bar{\sigma}_{xz} &= \bar{\sigma}_{zx} = \frac{E_p}{2(1 + \nu_p)} \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz} - 2k_{2x}\bar{u}_z \right), \\ \bar{\sigma}_{yz} &= \bar{\sigma}_{zy} = \frac{E_p}{2(1 + \nu_p)} \left(\frac{d\bar{u}_y}{dz} - 2k_{2y}\bar{u}_z \right).\end{aligned}\quad (9)$$

Компоненти антисиметричної частини тензора натягів Максвелла задаються формулами (29) з роботи [7].

Підставляючи закон Дюгамеля – Неймана (9) у балансові співвідношення (7), отримаємо рівняння для переміщень

$$\begin{aligned}(1 - 2\nu_p)\Delta_s \bar{u}_x - 2k_{2x} \frac{d\bar{u}_z}{dz} + 4k_{2x}(k_{2x}\bar{u}_x + k_{2y}\bar{u}_y) &= v_x, \\ (1 - 2\nu_p)\Delta_s \bar{u}_y - 2k_{2y} \frac{d\bar{u}_z}{dz} + 4k_{2y}(k_{2x}\bar{u}_x + k_{2y}\bar{u}_y) &= v_y, \\ (1 - \nu_p)\Delta_s \bar{u}_z - \frac{d}{dz}(k_{2x}\bar{u}_x + k_{2y}\bar{u}_y) - 2\alpha_0^2 \bar{u}_z &= v_z.\end{aligned}\quad (10)$$

Тут

$$\begin{aligned}v_x &\equiv \frac{2(1 + \nu_p)(1 - 2\nu_p)}{E_p} \left[2k_{2x} \left(\bar{T}_{xx} - \frac{\alpha_T E_p}{1 - 2\nu_p} \bar{T} \right) + 2k_{2y} \bar{T}_{xy} - \frac{d\bar{T}_{xz}}{dz} \right], \\ v_y &\equiv \frac{2(1 + \nu_p)(1 - 2\nu_p)}{E_p} \left[2k_{2y} \left(\bar{T}_{yy} - \frac{\alpha_T E_p}{1 - 2\nu_p} \bar{T} \right) + 2k_{2x} \bar{T}_{yx} - \frac{d\bar{T}_{yz}}{dz} \right],\end{aligned}$$

$$v_z \equiv \frac{2(1 + \nu_p)(1 - 2\nu_p)}{E_p} \left[\frac{\alpha_T E_p}{1 - 2\nu_p} \frac{d\bar{T}}{dz} + 2(k_{2x} \bar{T}_{zx} + k_{2y} \bar{T}_{zy}) - \frac{d\bar{T}_{zz}}{dz} \right], \quad (11)$$

$\Delta_s \equiv d^2/dz^2 + 4\alpha_0^2$, E_p і ν_p – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини, α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Після нескладних перетворень із системи (10) можемо отримати незалежні рівняння для визначення невідомих функцій \bar{u}_x , \bar{u}_y , \bar{u}_z :

$$\Delta_s^2 \bar{u}_j = \theta_j, \quad j = x, y, z, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{(1 - \nu_p)(1 - 2\nu_p)} \left\{ (1 - \nu_p) \Delta_s v_x + 2k_{2x} \left[\frac{dv_z}{dz} - (k_{2x} v_x + k_{2y} v_y) \right] \right\}, \\ \theta_y &= \frac{1}{(1 - \nu_p)(1 - 2\nu_p)} \left\{ (1 - \nu_p) \Delta_s v_y + 2k_{2y} \left[\frac{dv_z}{dz} - (k_{2x} v_x + k_{2y} v_y) \right] \right\}, \\ \theta_z &= \frac{1}{(1 - \nu_p)(1 - 2\nu_p)} \left\{ (1 - 2\nu_p) \Delta_s v_z + 4\alpha_0^2 v_z + \frac{d}{dz} (k_{2x} v_x + k_{2y} v_y) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

3. Термопружний стан у металізованій нормально намагніченій пластині, обумовлений об'ємними МСХ. Наведемо отримані розв'язки задач термопружності (6)–(13). За прийнятих теплових граничних умов розв'язок рівняння теплопровідності (6) буде таким:

$$\begin{aligned} \bar{T}(z, t) &= \frac{Q_0}{16\alpha} \left\{ \frac{(k_z^2 - 4k_2^2) \cos 2\sqrt{2}k_2 z + d(k_2) [4k_2^2 \cos^2 k_2 z - k_z^2]}{k_2^2 (k_z^2 - 2k_2^2) d(k_2)} - \right. \\ &\quad \left. - 32 \text{Bi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 - 2k_2^2) \cos \mu_n z \cdot e^{-(\mu_n^2 - 8k_2^2)at}}{(\mu_n^2 - 8k_2^2)(\mu_n^2 - 4k_2^2) [\text{Bi}(\text{Bi} + 1) + \mu_n^2 \ell^2] \cos \mu_n \ell} \right\}, \end{aligned}$$

де

$$Q_0 \equiv \frac{\alpha_S \omega_M \omega^2 \xi_1(\omega)}{d(\omega)} \mu_0 H_1^2,$$

$$d(k_2) \equiv \cos 2\sqrt{2}k_2 \ell - \frac{2\sqrt{2}k_2 \ell}{\text{Bi}} \sin 2\sqrt{2}k_2 \ell,$$

а μ_n – корені трансцендентного рівняння $\text{Bi} \cos \mu_n \ell = \mu_n \ell \cdot \sin \mu_n \ell$, $\text{Bi} = L\ell$, L – відносний коефіцієнт тепловіддачі з поверхні $z = 0$.

Розв'язки рівнянь (10)–(12) для переміщень отримаємо у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{u}_x(z) &= \bar{u}_y(z) = (A_{1x} + A_{2x}z) \cdot \cos 2\sqrt{2}k_2 z + \\ &\quad + (B_{1x} + B_{2x}z) \cdot \sin 2\sqrt{2}k_2 z + \bar{u}_{*x}(z), \\ \bar{u}_z(z) &= (A_{1z} + A_{2z}z) \cdot \cos 2\sqrt{2}k_2 z + (B_{1z} + B_{2z}z) \cdot \sin 2\sqrt{2}k_2 z + \bar{u}_{*z}(z). \end{aligned} \quad (14)$$

Тут

$$\begin{aligned} \bar{u}_{*x}(z) &= \frac{(1 + \nu_p) \mu_0 H_1^2}{4(1 - \nu_p) E_p k_2} \left[(1 - 2\nu_p) k_z C(\omega) \frac{\cos \sqrt{2\mu} k_2 (2z - \ell)}{\cos \sqrt{2\mu} k_2 \ell} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2k_2^2 \theta_{1x}}{(k_z^2 - 2k_2^2)^2} \cos 2k_2 z + (1 - 2\nu_p) v_{2x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{*z}(z) &= \frac{(1+v_p)\mu_0 H_1^2}{4(1-v_p)E_p k_2} \left[(1-2v_p)\sqrt{2\mu} k_z C(\omega) \frac{\sin \sqrt{2\mu} k_2 (2z-\ell)}{\cos \sqrt{2\mu} k_2 \ell} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2k_2^2 \theta_{1z}}{(k_z^2 - 2k_2^2)^2} \sin 2k_z z \right], \\
\theta_{1x} &\equiv k_z v_{1z} - 2 \left[(1-v_p)k_z^2 - (1-2v_p)k_2^2 \right] v_{1x}, \\
\theta_{1z} &\equiv \left[(1-v_p)k_z^2 - 4(1-v_p)k_2^2 \right] v_{1z} + 2k_2^2 k_z v_{1x}, \\
v_{1x} &\equiv \frac{1}{4} - \frac{k_z^2}{8k_0^2} + \chi k_z C(\omega) - \frac{\omega_H \omega_M}{2d(\omega)} \left[(1-\alpha_S^2)\omega^2 - \omega_H^2 \right] - 2k_2^2 \sigma_T, \\
v_{2x} &\equiv \frac{1}{4} - \frac{k_z^2}{8k_0^2} - \frac{\omega_H \omega_M}{2d(\omega)} \left[(1-\alpha_S^2)\omega^2 - \omega_H^2 \right] + (k_z^2 - k_2^2) \sigma_T, \\
v_{1z} &\equiv \mu(k_z^2 - k_2^2)C(\omega) - \frac{k_z}{4} \left[1 + \frac{k_z^2 - 4k_2^2}{2k_0^2} + \frac{\omega_H \omega_M \xi_1(\omega)}{d(\omega)} + 8k_2^2 \sigma_T \right], \\
\sigma_T &\equiv \frac{\alpha_T E_p}{1-2v_p} \frac{\alpha_S \omega_H \omega^2 \xi_1(\omega)}{16 \pi k_2^2 (k_z^2 - 2k_2^2) d(\omega)}. \tag{15}
\end{aligned}$$

Сталі інтегрування A_{1x} та A_{1z} у формулах для переміщень визначимо з умови відсутності переміщень на поверхні $z=0$ ($\bar{u}_x(0) = \bar{u}_z(0) = 0$):

$$A_{1x} = -\bar{u}_{*x}(0), \quad A_{1z} = -\bar{u}_{*z}(0).$$

Підставляючи розв'язки (14) для переміщень у систему рівнянь (10), виразимо сталі інтегрування A_{2x} , A_{2z} , B_{2x} і B_{2z} відповідно через сталі A_{1x} , A_{1z} , B_{1x} і B_{1z} :

$$\begin{aligned}
A_{2x} &= \frac{B_{2z}}{\sqrt{2}} = \frac{2k_2}{3-4v_p} (\sqrt{2}B_{1x} + A_{1z}), \\
B_{2x} &= -\frac{A_{2z}}{\sqrt{2}} = -\frac{2k_2}{3-4v_p} \left(\sqrt{2}A_{1x} - B_{1z} + \frac{v_T}{\sqrt{2}k_2} \right), \\
A_{2z} &= \frac{2k_2}{3-4v_p} \left(2A_{1x} - \sqrt{2}B_{1z} + \frac{v_T}{k_2} \right), \quad B_{2z} = \frac{2k_2}{3-4v_p} (2B_{1x} + \sqrt{2}A_{1z}), \\
v_T &\equiv \sigma_T \frac{(1+v_p)(1-2v_p)}{E_p} \frac{k_z^2 - 4k_2^2}{d(k_2)} \mu_0 H_1^2.
\end{aligned}$$

Сталі інтегрування B_{1x} і B_{1z} визначаємо з умови відсутності навантажень на поверхні $z=\ell$, тобто $\bar{\sigma}_{xx}(\ell) = \bar{\sigma}_{zz}(\ell) = 0$:

$$\begin{aligned}
B_{1x} &\equiv \frac{1}{d_u} \left\{ \sqrt{2}(1-2v_p) \left[\frac{4k_2 \ell}{3-4v_p} \bar{u}_{*x}(0) - \sin^2 2\sqrt{2} k_2 \ell \bar{u}_{*z}(0) \right] + \right. \\
&\quad \left. + (\sin 2\sqrt{2} k_2 \ell + 2\sqrt{2} k_2 \ell \cos 2\sqrt{2} k_2 \ell) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\bar{u}_{*x}(0) - \frac{3-4\nu_p}{4k_2} \frac{d\bar{u}_{*z}(\ell)}{dz} \right] + \frac{\sqrt{2}\ell}{4} v_T \left\{ \frac{5-4\nu_p}{(1+\nu_p)\text{Bi}} + \right. \\
& + \frac{2(1-4\nu_p)}{3-4\nu_p} - \left[2 + \frac{5-4\nu_p}{(1+\nu_p)\text{Bi}} \right] \cos 4\sqrt{2}k_2\ell + \\
& \left. + \sqrt{2} \left[\frac{6k_2\ell}{(1+\nu_p)\text{Bi}} - \frac{1}{2k_2\ell} \right] \sin 4\sqrt{2}k_2\ell \right\} \Bigg\}, \\
B_{1z} & \equiv \frac{1}{d_u} \left\{ \sqrt{2}(1-2\nu_p)(\cos 2\sqrt{2}k_2\ell - 1) \cos 2\sqrt{2}k_2\ell \cdot \bar{u}_{*x}(0) + \right. \\
& + \frac{2\sqrt{2}(1-2\nu_p)k_2\ell}{3-4\nu_p} \bar{u}_{*z}(0) + \frac{\ell}{2} \sin 2\sqrt{2}k_2\ell \left[\frac{d\bar{u}_{*z}(\ell)}{dz} - \right. \\
& \left. \left. - 4k_2\bar{u}_{*x}(0) \right] + \frac{v_T\ell \sin 2\sqrt{2}k_2\ell}{(1+\nu_p)\text{Bi}} \left\{ \left[(1+\nu_p)\text{Bi} - 2(1-2\nu_p) \right] \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \cos 2\sqrt{2}k_2\ell - 3\sqrt{2}k_2\ell \sin 2\sqrt{2}k_2\ell \right\} \right\} \Bigg\}, \\
d_u & \equiv (1-2\nu_p) \left[\frac{4k_2\ell}{3-4\nu_p} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4\sqrt{2}k_2\ell \right].
\end{aligned}$$

Підставляючи формули (14), (15) у співвідношення (9) з урахуванням обмежень на хвильові числа, встановлених у роботі [6] (див. формулу (6)), для механічних напружень отримуємо такі вирази:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xx}(z) & = \frac{2k_2E_p}{(1+\nu_p)(3-4\nu_p)} \left\{ \left[2\sqrt{2}\nu_p B_{1z} + 3\bar{u}_{*x}(0) - \frac{3v_T}{2k_2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(\sqrt{2}B_{1x} - \bar{u}_{*z}(0))k_2z \right] \cos 2\sqrt{2}k_2z + \right. \\
& + \left[3B_{1k} - 2\sqrt{2}\nu_p \bar{u}_{*z}(0) + 2 \left(B_{1z} + \sqrt{2}\bar{u}_{*x}(0) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{v_T}{\sqrt{2}k_2} \right) k_2z \right] \sin 2\sqrt{2}k_2z \Bigg\} + \bar{\sigma}_{*xx}(z), \\
\bar{\sigma}_{zz}(z) & = \frac{4k_2E_p}{(1+\nu_p)(3-4\nu_p)} \left\{ \left[(1-\nu_p)\sqrt{2}B_{1z} - (1-2\nu_p)\bar{u}_{*x}(0) - \frac{v_T}{4k_2} + \right. \right. \\
& + 2(\sqrt{2}B_{1x} - \bar{u}_{*z}(0))k_2z \Bigg] \cos 2\sqrt{2}k_2z + \\
& + \left[(1-2\nu_p)B_{1x} + (1-\nu_p)\sqrt{2}\bar{u}_{*z}(0) + 2 \left(B_{1z} + \sqrt{2}\bar{u}_{*x}(0) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{v_T}{\sqrt{2}k_2} \right) k_2z \right] \sin 2\sqrt{2}k_2z \Bigg\} + \bar{\sigma}_{*zz}(z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xz}(z) &= \bar{\sigma}_{zx}(z) = \bar{\sigma}_{yz}(z) = \bar{\sigma}_{zy}(z) = \\
&= \frac{2k_2 E_p}{(1+v_p)(3-4v_p)} \left\{ \left[2\sqrt{2}(1-v_p)B_{1x} + (1-2v_p)\bar{u}_{*z}(0) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\left(\sqrt{2}B_{1z} + 2\bar{u}_{*x}(0) - \frac{v_T}{k_2}\right)k_2 z \right] \cos 2\sqrt{2}k_2 z - \right. \\
&\quad \left. - \left[(1-v_p)B_{1z} - 2\sqrt{2}(1-v_p)\bar{u}_{*x}(0) + \frac{v_T}{2\sqrt{2}k_2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(2B_{1x} - \sqrt{2}\bar{u}_{*z}(0))k_2 z \right] \sin 2\sqrt{2}k_2 z \right\} + \bar{\sigma}_{*xz}(z),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{*xx}(z) &= \frac{\mu_0 H_1^2}{2(1-v_p)} \left\{ (2v_p \mu - 1)C(\omega) \frac{\cos \sqrt{2\mu}k_2(2z-\ell)}{\cos \sqrt{2\mu}k_2\ell} - \right. \\
&\quad \left. - 2 \left[\frac{v_p k_z \theta_{1z} + k_2^2 \theta_{1x}}{(1-2v_p)(k_z^2 - 2k_2^2)^2} + 2(1-v_p)k_2^2 \sigma_T \right] \cos 2k_z z - v_{2x} + \right. \\
&\quad \left. + 2(1-v_p)(k_z^2 - 2k_2^2)\sigma_T \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{*zz}(z) &= \frac{\mu_0 H_1^2}{1-v_p} \left\{ [(1-v_p)\mu - v_p]C(\omega) \frac{\cos \sqrt{2\mu}k_2(2z-\ell)}{\cos \sqrt{2\mu}k_2\ell} - \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{(1-v_p)k_z \theta_{1z} + 2v_p k_2^2 \theta_{1x}}{(1-2v_p)(k_z^2 - 2k_2^2)^2} + 2k_2^2 \sigma_T (1-v_p)(1-2v_p) \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \cos 2k_z z - v_p v_{2x} + \sigma_T (1-v_p)(k_z^2 - 2k_2^2) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{*xz}(z) &= -\frac{\mu_0 H_1^2}{2(1-v_p)} \left[\sqrt{2\mu}(1-2v_p)C(\omega) \frac{\sin \sqrt{2\mu}k_2(2z-\ell)}{\cos \sqrt{2\mu}k_2\ell} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{k_2(\theta_{1z} - k_z \theta_{1x})}{(k_z^2 - 2k_2^2)^2} \sin 2k_z z \right].
\end{aligned}$$

Вирази для механічних напружень $\bar{\sigma}_{xy}$ і $\bar{\sigma}_{yx}$ з точністю до множника збігаються з виразами для переміщень u_x .

Зауважимо також, що відмінною від нуля компонентою антисиметричного тензора натягів Максвелла буде $\bar{\pi}_{xy}(z)$ (див. формулу (4)).

4. Числовий аналіз проводили для пластини з фериту 200НН (нікелево-цинкова шпінель) товщини $\ell = 2 \cdot 10^{-5}$ м (початкова температура $T_0 = 300$ К), характеристики матеріалу якої, згідно з [19, 20, 23], подано в роботі [5]. При цьому граничні частоти ω_1 , ω_2 та ширина смуги пропускання $\Delta\omega$ є такими [6]: нижня частота – $\omega_1 = 44.2$ ГГц, верхня частота – $\omega_2 = 134$ ГГц, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 89.8$ ГГц. Обчислення виконано для безрозмірного значення $\bar{z} = z/\ell$.

На рис 2 показано залежність температури $\bar{T} = T - T_0$ від частоти ω в смузі пропускання $[\omega_1, \omega_2]$ на поверхні $z = 0$ пластини, а на рис. 3 – розподіл температури за товщиною координатою \bar{z} для граничної частоти ω_1 .

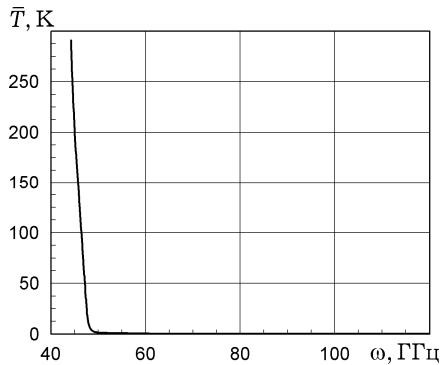


Рис. 2

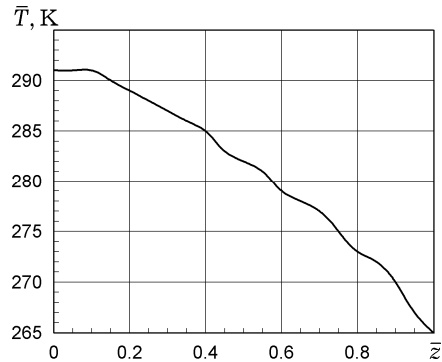


Рис. 3

На рис. 2 видно, що температура досягає максимального значення 291 К на нижній граничній частоті ω_1 , потім різко спадає і при частоті 60 ГГц практично зникає до нуля. Зауважимо, що при значенні напруженості магнітного поля $H_{cr} = 0.26 \cdot 10^3$ А/м температура досягає критичного значення $T_k = 420$ К (температура Кюрі для вибраного феритового матеріалу, за якої він втрачає свої феромагнітні властивості). Розподіл температури за товщиною координатою (рис. 3) має слабо виражену квадратичну залежність. Максимального значення температура досягає на поверхні $z = 0$.

На рис. 4 подано частотну залежність у смузі пропускання для нормальних напружень $\bar{\sigma}_{zz}$ на серединній поверхні, а на рис. 5 – розподіл $\bar{\sigma}_{zz}$ за товщиною на нижній частоті ω_1 . Аналогічні частотну залежність (на поверхні $z = 0$) і розподіл за товщиною для нормальних напружень $\bar{\sigma}_{xx}$ наведено на рис. 6 та рис. 7.

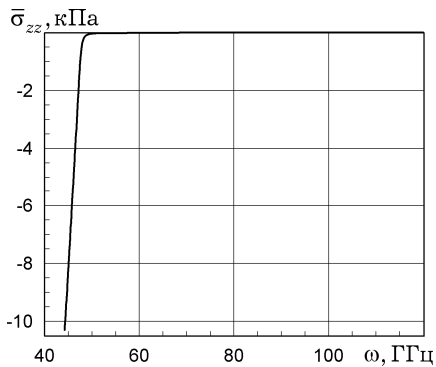


Рис. 4

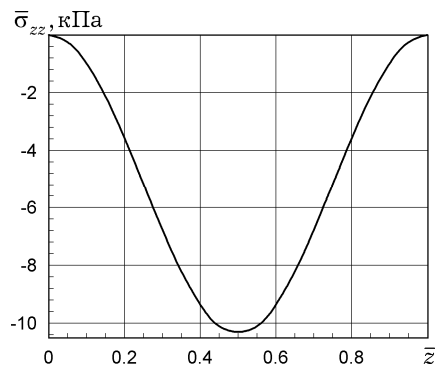


Рис. 5

Стискальні напруження $\bar{\sigma}_{zz}$ набувають максимального значення 10.3 кПа на нижній граничній частоті ω_1 (рис. 4). Зі збільшенням частоти значення $\bar{\sigma}_{zz}$ різко зменшується і при частоті ≈ 50 ГГц практично прямує до нульового. Напруження $\bar{\sigma}_{zz}$ на поверхнях $z = 0$ та $z = \ell$ практично є нульовими, а на серединній поверхні – максимальними. Їхній розподіл має яскраво виражений параболічний характер (рис. 5).

Частотна залежність нормальних напружень $\bar{\sigma}_{xx}$ (рис. 6) має подібний характер. Максимальне значення $\bar{\sigma}_{xx}$ також досягається на нижній частоті ω_1 і становить 0.527 ГПа. Воно є на 3-4 порядки більшим, ніж відповідне значення $\bar{\sigma}_{zz}$ (див. рис. 4). Розподіл напружень $\bar{\sigma}_{xx}$ за товщиною при нижній частоті ω_1 (рис. 7) має слабо виражений параболічний характер. Напруження $\bar{\sigma}_{xx}$ набувають максимального значення на поверхні $z = 0$ і спадають до 0.479 ГПа на поверхні $z = \ell$. Напруження $\bar{\sigma}_{xx}$ можуть бути істотними при оцінці міцності чи стійкості пластини.

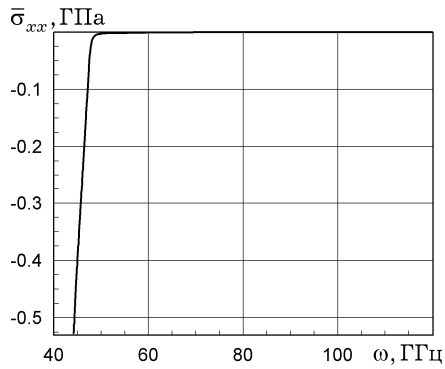


Рис. 6

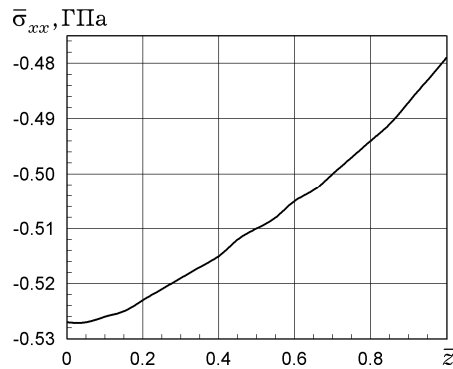


Рис. 7

Характер частотної залежності компоненти $\bar{\pi}_{xy}$ антисиметричного тензора натягів Максвелла на поверхні $z = 0$ (рис. 8) є аналогічним до зміни напружень $\bar{\sigma}_{xx}$ і $\bar{\sigma}_{zz}$. Максимальне значення також досягається на частоті ω_1 і становить 1.52 Па, що є нехтовним порівняно зі значеннями напружень $\bar{\sigma}_{xx}$ і $\bar{\sigma}_{zz}$. Розподіл напружень $\bar{\pi}_{xy}$ за товщинною координатою має параболічний характер. На поверхнях $z = 0$ та $z = \ell$ напруження $\bar{\pi}_{xy}$ досягають значення 1.52 Па, а на серединній поверхні – нульового (рис. 9).

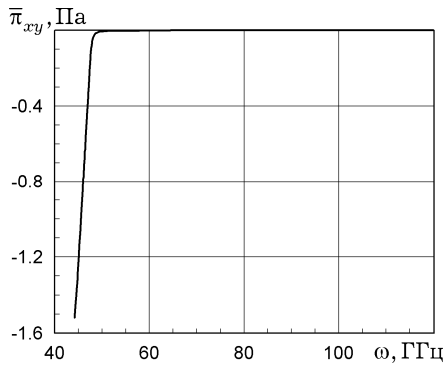


Рис. 8

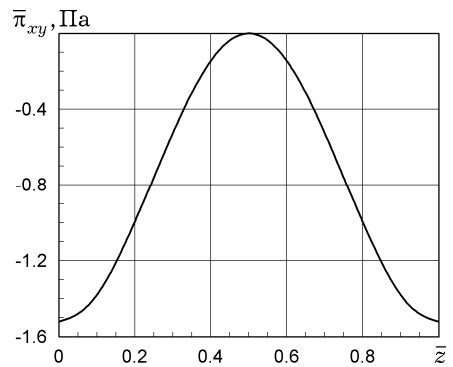


Рис. 9

Таким чином, рівень напружень, викликаних моментними чинниками дії магнітного поля, за розглядуваних характеристик є несуттєвим при оцінці напруженого стану.

Висновки. Із використанням моделі електромагнітотермомеханіки, розвинутої в роботі [7], і результатів досліджень закономірностей поширення об'ємних МСХ у металізованій нормально намагніченій феритовій пластині, наведених у роботі [6], сформульовано задачу, що описує тепловий та напружений стани в такій пластині. Запропоновано методику її розв'язування

та проаналізовано частотні залежності температури, нормальних та дотичних напружень у межах смуги пропускання, а також розподіли температури та напружень за товщинною координатою. Встановлено, що товщинні нормальні напруження $\bar{\sigma}_{zz}$ є нехтовно малими (на 4 порядки меншими) порівняно з напруженнями $\bar{\sigma}_{xx}$. Зазначено, що об'ємні МСХ приводять до появи компоненти $\bar{\pi}_{xy}$ антисиметричного тензора натягів Максвелла, величина якої є нехтовною порівняно з величиною напружень $\bar{\sigma}_{zz}$ (як і за ферромагнітного резонансу [5], на 7-8 порядків меншою).

Температура та механічні напруження досягають максимального значення на першій граничній частоті ω_1 . При незначному збільшенні напруженості магнітного поля \mathbf{H}_1 до критичного значення H_{cr} температура досягає точки Кюрі, вище якої матеріал втрачає ферромагнітні властивості, що приводить до неможливості поширення об'ємних МСХ. Це необхідно враховувати при розробці відповідних приладів.

1. Ахизер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. – Москва: Наука, 1967. – 368 с.
2. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф. Термомеханіка багатокомпонентних тіл низької електропровідності. – Львів: Сполом, 2006. – 300 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 1.
3. Васьковський А. В., Локк Э. Г. Характеристики поверхностной магнитостатической волны в структуре феррит-диэлектрик, помещенной в медленно меняющееся неоднородное магнитное поле // Радиотехника и электроника. – 2001. – **46**, № 10-С. – С. 1257–1265.
Te same: *Vashkovskii A. V., Lock E. G. Characteristics of a magnetostatic surface wave in a ferrite-dielectric structure embedded in a slowly varying nonuniform magnetic field // J. Commun. Technol. Electron. – 2001. – 46, No. 10. – P. 1163–1170.*
4. Гачкевич А. Р., Терлецький Р. Ф., Солодяк М. Т. Математическое моделирование электромагнитоупругих и тепловых процессов в магнитных средах // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – Вып. 6 (52). – С. 76–88.
5. Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т., Терлецький Р. Ф., Гачкевич М. Г. Термонапружений стан магнетного шару за ферромагнетного резонансу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 2. – С. 91–97.
Te same: *Hachkevych O. R., Solodyak M. T., Terlets'kyi R. F., Hachkevych M. H. Thermal stressed state of a magnetic layer under ferromagnetic resonance // Mater. Sci. – 2015. – 51, No. 2. – P. 244–253. – <https://doi.org/10.1007/s11003-015-9836-6>.*
6. Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т., Терлецький Р. Ф., Івасько Р. О. Об'ємні магнетостатичні хвилі у металізованій феритовій пластині, зумовлені електромагнетним полем // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2019. – **55**, № 3. – С. 30–36.
Te same: *Hachkevych O. R., Solodyak M. T., Terlets'kyi R. F., Ivas'ko R. O. Three-dimensional magnetostatic waves caused by electromagnetic fields in metallized ferrite plates // Mater. Sci. – 2019. – 55, No. 3. – P. 327–336. – <https://doi.org/10.1007/s11003-019-00306-y>.*
7. Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т., Терлецький Р. Ф., Тарлаковський Д. В. Співвідношення електродинаміки, енергетичні та силові чинники дії електромагнетного поля для магнетних середовищ // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 4. – С. 62–68.
Te same: *Hachkevych O. R., Solodyak M. T., Terlets'kyi R. F., Tarlakovskii D. V. Electrodynamics relations, energy and force factors of the actions of electromagnetic fields for magnetic media // Mater. Sci. – 2015. – 50, No. 4. – P. 545–554. – <https://doi.org/10.1007/s11003-015-9752-9>.*
8. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф. Моделі термомеханіки намагнетовних і поляризованих електропровідних деформованих твердих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 3. – С. 19–37.
Te same: *Hachkevych O. R., Terlets'kyi R. F. Models of thermomechanics of magnetizable and polarizable conducting deformable solids // Mater. Sci. – 2004.*

- 40, No. 3. – P. 320–336. – <https://doi.org/10.1007/PL00021997>.
9. *Гачкевич О. Р., Терлецкий Р. Ф., Иваско Р. О.* Моделирование электромагнитных, тепловых и механических процессов в магнитных средах с учетом моментных факторов // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2018. – **61**, № 4. – С. 113–129.
 Te same: *Hachkevych O. R., Terletskii R. F., Ivas'ko R. O.* Modeling of electromagnetic, thermal, and mechanical processes in magnetic media with regard for the moment factors // *J. Math. Sci.* – 2021. – **256**, No. 4. – P. 497–517. – <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05441-z>.
 10. *Гуревич А. Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. – Москва: Наука, 1973. – 592 с.
 11. *Гуревич А. Г., Мелков Г. А.* Магнитные колебания и волны. – Москва: Физматлит, 1994. – 464 с.
 12. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Магнитоэлектронные волны в касательно намагниченной ферритовой пластине с нормальной одноосной анизотропией в условиях ориентационного перехода // *Радиотехника и электроника.* – 2012. – **57**, № 5. – С. 565–571.
 Te same: *Zubkov V. I., Shcheglov V. I.* Magnetostatic waves in a tangentially magnetized ferrite plate with a normal uniaxial anisotropy under the conditions for orientational transition // *J. Commun. Technol. Electron.* – 2012. – **57**, No. 5. – P. 512–518. – <https://doi.org/10.1134/S1064226912050130>.
 13. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Поверхностные магнитоэлектронные волны в структуре феррит–диэлектрик–металл, намагниченной поперечным линейно возрастающим полем // *Радиотехника и электроника.* – 2007. – **52**, № 6. – С. 701–711.
 Te same: *Zubkov V. I., Shcheglov V. I.* Magnetostatic surface waves in a ferrite/dielectric/metal structure magnetized by a linearly increasing transverse field // *J. Commun. Technol. Electron.* – 2007. – **52**, No. 6. – P. 653–662. – <https://doi.org/10.1134/S1064226907060083>.
 14. *Зубков В. И., Щеглов В. И.* Распространение поверхностных магнитоэлектронных волн в ферритовой пластине, намагниченной поперечным пространственно-периодическим полем // *Радиотехника и электроника.* – 2011. – **56**, № 7. – С. 839–849.
 Te same: *Zubkov V. I., Shcheglov V. I.* Propagation of magnetostatic surface waves in a ferrite plate magnetized by a spatially periodic transverse field // *J. Commun. Technol. Electron.* – 2011. – **56**, No. 7. – P. 853–863. – <https://doi.org/10.1134/S1064226911070151>.
 15. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с. – *Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 4.*
 16. *Келлер Ю. И., Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.* Распространение поверхностных магнитоэлектронных волн в пластине феррита с диссипацией // *Радиотехника и электроника.* – 2001. – **63**, № 9. – С. 974–980.
 Te same: *Keller Yu. I., Makarov P. A., Shavrov V. G., Shcheglov V. I.* Propagation of magnetostatic surface waves in a dissipative ferrite plate // *J. Commun. Technol. Electron.* – 2018. – **63**, No. 9. – P. 1035–1041. – <https://doi.org/10.1134/S1064226918090097>.
 17. *Кринчик Г. С.* Физика магнитных явлений. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 336 с.
 18. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Магнитоупругость // *Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела.* – Москва: ВИНТИ, 1981. – **4**. – С. 3–59.
 19. *Лившиц Б. Г., Крапошин В. С., Линецкий Я. Л.* Физические свойства металлов и сплавов. – Москва: Металлургия, 1980. – 120 с.
 20. *Мишин Д. Д.* Магнитные материалы. – Москва: Высш. шк., 1981. – 335 с.
 21. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
 Te same: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – London: Pergamon Press, 1962. – xii+628 p.
 22. *Стальмахов В. С., Игнатъев А. А.* Лекции по спиновым волнам. Ч. 1. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. – 182 с.
 23. *Таблицы физических величин: Справочник / Под ред. акад. И. К. Кикоина.* – Москва: Атомиздат, 1976. – 1008 с.
 24. *Тамм Н. Е.* Основы теории электричества. – Москва: Наука, 1976. – 616 с.
 25. *Correa Saura A., Martínez Carcía R.* Calentamiento por alta frecuencia. – Eng.

- energ. – 1981. – 2, No. 3. – S. 326–329.
26. Hutter K., van de Ven A. A. F. Field matter interactions in thermoelastic solids. – Lect. Notes in Phys. – 88. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1978. – viii+231 p.
27. Moon F. C., Chattopadhyay S. Magnetically induced stress waves in a conducting solid – Theory and experiment // Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. – 1974. – 41, No. 3. – P. 641–646. – <https://doi.org/10.1115/1.3423363>.
28. Prabhakar A., Stancil D. D. Spin waves: Theory and applications. – New York: Springer, 2009. – 348 p.
29. Shavrov V. G., Sheglov V. I. Magnetostatic waves in inhomogeneous fields. – Boca Raton: CRC Press, 2021. – 416 p.

THERMOELASTIC STATE OF A MAGNETIZED FERRITE PLATE DURING THE PROPAGATION OF VOLUME MAGNETOSTATIC WAVES

Using the previously developed model of electromagnetothermomechanics and the results of studies of the regularities of volume magnetostatic wave propagation in a normally magnetized metallized ferrite plate, the initial relations describing its thermal and stressed states are written down. In particular, the expressions for the energy and force factors of the electromagnetic field action that cause them are obtained. A methodology for solving the formulated problem is proposed and the frequency dependences of the temperature, normal and tangential stresses within the bandwidth in which such waves can be excited, as well as the temperature and stress distributions across the thickness coordinate are analyzed.

Key words: normally magnetized metallized ferrite plate, volume magnetostatic waves, frequency bandwidth, asymmetric stress tensor, thermal stressed state.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано
20.10.22