

**ПОЗДОВЖНІЙ ЗСУВ АНІЗОТРОПНИХ БІМАТЕРІАЛЬНИХ ТІЛ
ЗІ СТРІЧКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ І МІЖФАЗНИМИ ТРІЩИНАМИ**

З використанням методу функцій стрибків побудовано розв'язок базової задачі поздовжнього зсуву анізотропного біматеріалу з системами тонких внутрішніх і міжфазних стрічкових анізотропних неоднорідностей. Завдяки цьому вдалося поширити метод прямого вирізування на випадок дослідження кусково-однорідних анізотропних тіл з прямолінійною межею поділу за наявності в них тонких міжфазних включень. Із використанням запропонованої методики досліджено напружений стан ортотропних біматеріального півпростору, а також півпростору, з'єданого з жорстко зацмеленим шаром, за наявності міжфазної тріщини. Проаналізовано вплив модулів пружності та окремих геометричних параметрів розглянутих задач на коефіцієнти інтенсивності напружень тріщини.

Ключові слова: анізотропія, ортотропія, біматеріал, антиплоска деформація, міжфазна тріщина, метод прямого вирізування.

Сучасна інженерна практика потребує розв'язування задач механіки з кращим моделюванням фізичних процесів і явищ, а також застосування швидких і надійних кількісних методів визначення механічних і фізичних полів у твердих деформованих тілах. Створення композиційних і смарт-матеріалів приводить до необхідності врахування у математичному моделюванні тіл та елементів конструкцій як реальних фізичних властивостей, зокрема ортотропії чи анізотропії матеріалу, так і наявності у тілах тонких неоднорідностей – тріщин і пружних (у граничному випадку – абсолютно жорстких) включень. Пружні властивості таких неоднорідностей можуть бути відомими, якщо вони є елементами конструкторського задуму, датчиками, актуаторами. Проте інколи дефекти появляються у матеріалі внаслідок неідеальності процесу його виготовлення або під час експлуатації. Тонкі неоднорідності є концентраторами напружень і врахування їхньої наявності та взаємодії в будь-якому разі необхідне для більш докладного опису напружено-деформованого стану тіла, прогнозування його міцності та довговічності. Тому необхідною є побудова нових і вдосконалення відомих теоретичних моделей і методів досліджень з урахуванням розширення спектра їхніх властивостей і сфери застосовності. Теоретичною основою практично усіх аналітичних і аналітично-числових підходів до дослідження задач механіки деформованого твердого тіла стосовно біматеріальних тіл з міжфазними неоднорідностями є методи інтегральних перетворень і методи теорії функцій комплексної змінної.

У монографії [1] досліджено задачі поздовжнього зсуву кусково-однорідного ортотропного клина з міжфазними тріщинами та абсолютно жорсткими включеннями з використанням інтегрального перетворення Мелліна. Випадок скінченного біматеріального клина з міжфазною тріщиною розглянуто в [11]. У [13] і [14] досліджено поздовжній зсув міжфазної тріщини в ортотропному біматеріальному прямокутнику і смузі відповідно. Для окремих геометричних параметрів задач у [1, 14] для випадку ізотропних матеріалів показано, що коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) міжфазної тріщини не залежать від пружних властивостей біматеріалу. Огляд інших робіт стосовно міжфазних неоднорідностей здійснено також у [12].

Застосування виключно аналітичних чи аналітично-числових методів до розв'язування задач механіки деформованого твердого тіла є найпростішим при дослідженні необмежених областей. Додаткове врахування межі

[✉] kirill.all@gmail.com

тіла істотно ускладнює отримання такого розв'язку. Для подолання цього обмеження щодо задач теорії тонких неоднорідностей у [2–6] запропоновано метод прямого вирізування. Цей метод полягає у моделюванні крайових умов для однієї чи декількох границь тіла впливом тонких неоднорідностей у тілі істотно простішої геометричної форми, зокрема простору чи кусково-однорідного простору. За допомогою навантажених на берегах тріщин формулюються крайові умови першого роду, а за допомогою абсолютно жорстких (загалом ізотропних) включень, впроваджених у матрицю тіла з певним навантаженням, – крайові умови другого роду. Такий підхід доволі добре зарекомендував себе під час вивчення задач поздовжнього зсуву для однорідних і кусково-однорідних ізотропних тіл із внутрішніми та міжфазними неоднорідностями [2, 6]. Однак метод прямого вирізування щодо анізотропних матеріалів реалізовано лише для випадку систем суто внутрішніх включень і тріщин у кусково-однорідному тілі [3–5].

Метою цієї роботи є дослідження взаємодії скінченних систем тонких внутрішніх і міжфазних анізотропних пружних включень, а також їхніх граничних випадків – практично абсолютно жорстких включень і практично абсолютно податних включень (тріщин) в анізотропному біматеріалі за поздовжнього зсуву. У такий спосіб метод прямого вирізування буде поширено на випадок дослідження напружено-деформованого стану анізотропних біматеріальних тіл з прямолінійною межею поділу за врахування наявності тонких міжфазних неоднорідностей. Апробацію методу здійснимо на окремих задачах поздовжнього зсуву кусково-однорідних анізотропних тіл з міжфазною тріщиною.

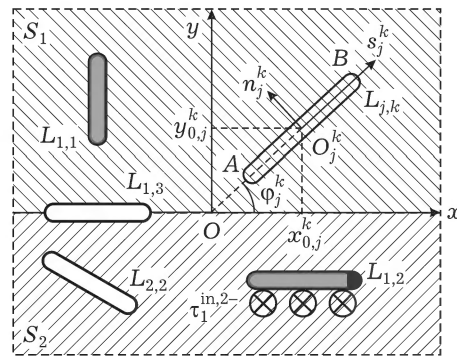


Рис. 1

1. Формулювання задачі. Розглянемо задачу поздовжнього зсуву кусково-однорідного анізотропного простору з модулями пружності a_{nm}^k , $n, m = 4, 5$, за наявності в його верхньому ($k = 1$) і нижньому ($k = 2$) півпросторах S_k систем з N_k довільно орієнтованих стрічкових пружних внутрішніх включень $L_{j,k}$, $j = 1, \dots, N_k$, $k = 1, 2$. На межі поділу матеріалів ($y = 0$) розміщені пружні міжфазні включення $L_{j,k}$, $j = 1, \dots, N_k$, $k = 3$. Локальні системи координат $s_j^k O_j^k n_j^k$ включень $L_{j,k}$, $k = 1, 2, 3$, вибрано у центрах $z_{0,j}^k = x_{0,j}^k + iy_{0,j}^k$ неоднорідностей, при цьому для міжфазних включень $y_{0,j}^3 = 0$. Відомими є кути φ_j^k ($\varphi_j^3 = 0$) нахилу неоднорідностей до осей s_j^k , їхні довжини $2a_j^k$, товщини $2h_j^k$ і модулі пружності $a_{nm,j}^{\text{in},k}$, $n, m = 4, 5$, $j = 1, \dots, N_k$, $k = 1, 2, 3$. Індексом «in» тут і далі позначаємо окремі характеристики включень. Усі неоднорідності не мають спільних точок перетину чи

дотику. Навантаження тіла задане напруженнями $\tau_j^{\text{in},k\pm}$, $j = 1, \dots, N_k$, $k = 1, 2, 3$, на верхньому («+») і нижньому («-») берегах включення $L_{j,k}$ (рис. 1), хоча в очевидний спосіб можна врахувати також і вплив іншого способу навантажування [5, 8].

На прямолінійній межі поділу $y = 0$ півпросторів, вільній від неоднорідностей, виконуються умови ідеального механічного контакту. Оскільки напружено-деформований стан досліджуваної структури однаковий у площинах, перпендикулярних до осі Oz , то достатньо дослідити площину xOy (задача поздовжнього зсуву).

2. Побудова розв'язку задачі. Як і для випадку відсутності міжфазних дефектів [5], застосуємо відомий [8, 9, 15] підхід до розв'язування задач поздовжнього зсуву шаруватих структур з тонкими неоднорідностями.

Напружено-деформований стан верхнього ($k = 1$) і нижнього ($k = 2$) півпросторів (півплощин) кусково-однорідного анізотропного простору (площини) з тонкими включеннями подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^k(z) + i\sigma_{xz}^k(z) &= \sigma_{yz}^{0,k}(z) + i\sigma_{xz}^{0,k}(z) + \\ &+ [(\hat{\sigma}_{yz}^{0,k}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}^{0,k}(z)) + (\hat{\sigma}_{yz}^{1,k}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}^{1,k}(z))], \\ w^k &= w^{0,k} + [\hat{w}^{0,k} + \hat{w}^{1,k}], \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $w^k(x, y)$ – ненульова компонента вектора переміщення уздовж осі Oz для k -ї півплощини; σ_{yz}^k , σ_{xz}^k – відповідні їй напруження.

Однорідний розв'язок $\sigma_{yz}^{0,k}$, $\sigma_{xz}^{0,k}$, $w^{0,k}$ в (1) характеризує напружено-деформований стан k -ї півплощини кусково-однорідної площини без неоднорідностей, проте із заданим зовнішнім навантаженням. Оскільки навантаження задане лише на берегах тонких неоднорідностей, то однорідний розв'язок є нульовим:

$$\sigma_{yz}^{0,k} = \sigma_{xz}^{0,k} = w^{0,k} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

Збурений неоднорідностями розв'язок в (1) позначено символом « $\hat{}$ ». Подамо його у вигляді суми так званого *основного збуреного розв'язку* $\hat{\sigma}_{yz}^{0,k}$, $\hat{\sigma}_{xz}^{0,k}$, $\hat{w}^{0,k}$ і *збуреного коригувального розв'язку* $\hat{\sigma}_{yz}^{1,k}$, $\hat{\sigma}_{xz}^{1,k}$, $\hat{w}^{1,k}$.

Основний збурений розв'язок $\hat{\sigma}_{yz}^{0,k}$, $\hat{\sigma}_{xz}^{0,k}$, $\hat{w}^{0,k}$ враховує вплив включень у тілі за відсутності зовнішнього навантаження. Для напружень запишемо його у вигляді суми напруженого стану $\hat{\sigma}_{yz}^{0,k,\text{hom}}$, $\hat{\sigma}_{xz}^{0,k,\text{hom}}$ безмежної площини з такими самими механічними властивостями і тими самими неоднорідностями $L_{j,k}$, $j = 1, \dots, N_k$, що і в k -й півплощині, та напруженого стану $\hat{\sigma}_{yz}^{0,k,\text{interf}}$, $\hat{\sigma}_{xz}^{0,k,\text{interf}}$ кусково-однорідної площини лише з міжфазними включеннями $L_{j,3}$, $j = 1, \dots, N_3$:

$$\hat{\sigma}_{yz}^{0,k} = \hat{\sigma}_{yz}^{0,k,\text{hom}} + \hat{\sigma}_{yz}^{0,k,\text{interf}}, \quad \hat{\sigma}_{xz}^{0,k} = \hat{\sigma}_{xz}^{0,k,\text{hom}} + \hat{\sigma}_{xz}^{0,k,\text{interf}}, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Зазначимо, що кожне включення $L_{j,3}$, $j = 1, \dots, N_3$, має свій вплив на півплощину S_k , $k = 1, 2$. Переміщення $\hat{w}^{0,k}$ шукаємо з використанням узагальненого закону Гука

$$\frac{\partial \widehat{w}^{0,k}}{\partial x} = a_{45}^k \widehat{\sigma}_{yz}^{0,k} + a_{55}^k \widehat{\sigma}_{xz}^{0,k}.$$

Для побудови $\widehat{\sigma}_{yz}^{0,k,\text{hom}}$, $\widehat{\sigma}_{xz}^{0,k,\text{hom}}$, $\widehat{\sigma}_{yz}^{0,k,\text{interf}}$, $\widehat{\sigma}_{xz}^{0,k,\text{interf}}$ скористаємося методом функцій стрибків [8]. Тонкі неоднорідності вилучаємо з розгляду, а їхній вплив на матрицю тіла замінюємо невідомими функціями стрибків напружень $f_{5,j}^k$ і похідних від переміщень $f_{6,j}^k$ на серединній лінії $L'_{j,k} \equiv [-a_j^k, a_j^k]$, $n_j^k = 0$, неоднорідності в її локальній системі координат $s_j^k O_j^k n_j^k$:

$$\sigma_{nz,j}^{k-} - \sigma_{nz,j}^{k+} = f_{5,j}^k(s_j^k), \quad \frac{\partial}{\partial s_j^k} (w_j^{k-} - w_j^{k+}) = f_{6,j}^k(s_j^k),$$

$$s_j^k \in L'_{j,k}, \quad j = 1, \dots, N_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

При цьому $f_{r,j}^k = 0$, $r = 5, 6$, якщо $s_j^k \notin L'_{j,k}$. Тут $\sigma_{nz,j}^{k\pm}$, $\frac{\partial w_j^{k\pm}}{\partial s_j^k}$ – нормальні

напруження і похідні від переміщень на верхньому («+») і нижньому («-») берегах неоднорідності відповідно. З використанням узагальненого закону Гука, рівняння рівноваги, введення функції напружень і застосуванням інтегрального перетворення Фур'є можна легко побудувати вирази для напруженого стану кусково-однорідної площини з тонкою міжфазною неоднорідністю стосовно невідомих функцій стрибків [8, 15]. Для одного міжфазного включення $L_{j,3}$ із центром у його локальній системі координат напружений стан верхньої ($k = 1$) та нижньої ($k = 2$) півплощин набуде вигляду

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{nz,j}^{0,k,\text{interf}} + i\widehat{\sigma}_{sz,j}^{0,k,\text{interf}} &= \frac{a_{55}^{3-k} \alpha^{3-k}}{2(a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2)} \left[g_p^k t_5^k(z_j^3) - g_m^k t_5^k(\bar{z}_j^3) \right] + \\ &+ \frac{i}{2(a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2)} \left[g_p^k t_6^k(z_j^3) + g_m^k t_6^k(\bar{z}_j^3) \right], \end{aligned}$$

де

$$t_r(z_j^3) = \frac{1}{\pi} \int_{L'_{j,3}} \frac{f_{r,j}^3(t) dt}{t - z_j^3}, \quad r = 5, 6,$$

$$g_p^k = \beta^k + i(1 + \alpha^k), \quad g_m^k = \beta^k + i(1 - \alpha^k), \quad i^2 = -1,$$

$$\alpha^k = \frac{\sqrt{a_{44}^k a_{55}^k - (a_{45}^k)^2}}{a_{55}^k}, \quad \beta^k = \frac{a_{45}^k}{a_{55}^k}, \quad z_j^3 = s_j^3 + (\beta^k + i\alpha^k)n_j^3. \quad (4)$$

Рискою зверху тут і далі позначаємо комплексне спряження виразу. Для системи міжфазних неоднорідностей з огляду на лінійність задачі отримаємо

$$\widehat{\sigma}_{yz}^{0,k,\text{interf}} + i\widehat{\sigma}_{xz}^{0,k,\text{interf}} = \sum_{j=1}^{N_3} \left[\widehat{\sigma}_{yz,j}^{0,k,\text{interf}} + i\widehat{\sigma}_{xz,j}^{0,k,\text{interf}} \right], \quad k = 1, 2,$$

$$s_j^3 + in_j^3 = (x - x_{0,j}^3) + iy, \quad j = 1, \dots, N_3. \quad (5)$$

Напружений стан анізотропної площини з механічними характеристиками півплощини S_k за наявності однієї тонкої внутрішньої неоднорідності $L_{j,k}$

стосовно невідомих функцій стрибків $f_{r,j}^k$, $r = 5, 6$, подамо у локальній системі координат $s_j^k O_j^k n_j^k$ включення $L_{j,k}$ [4, 5]:

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{nz,j}^{0,k,\text{hom}} + i\widehat{\sigma}_{sz,j}^{0,k,\text{hom}} &= \frac{1}{4} \left[g_p^{j,k} t_5^k(z_j^k) - g_m^{j,k} t_5^k(\bar{z}_j^k) \right] + \\ &+ \frac{i}{4a_{55}^{j,k} \alpha_j^k} \left[g_p^{j,k} t_6^k(z_j^k) + g_m^{j,k} t_6^k(\bar{z}_j^k) \right], \\ t_r(z_j^k) &= \frac{1}{\pi} \int_{L_{j,k}'} \frac{f_{r,j}^k(t) dt}{t - z_j^k}, \quad r = 5, 6, \\ g_p^{j,k} &= \beta_j^k + i(1 + \alpha_j^k), \quad g_m^{j,k} = \beta_j^k + i(1 - \alpha_j^k), \\ \alpha_j^k &= \frac{\sqrt{a_{44}^{j,k} a_{55}^{j,k} - (a_{45}^{j,k})^2}}{a_{55}^{j,k}}, \quad \beta_j^k = \frac{a_{45}^{j,k}}{a_{55}^{j,k}}, \quad z_j^k = s_j^k + (\beta_j^k + i\alpha_j^k)n_j^k. \end{aligned} \quad (6)$$

Пружні сталі матеріалу $a_{nm}^{j,k}$ для k -ї півплощини у системі координат $s_j^k O_j^k n_j^k$ визначаємо за формулами [7, 8]

$$\begin{aligned} a_{44}^{j,k} &= a_{44}^k \cos^2 \varphi_j^k - 2a_{45}^k \sin \varphi_j^k \cos \varphi_j^k + a_{55}^k \sin^2 \varphi_j^k, \\ a_{45}^{j,k} &= (a_{44}^k - a_{55}^k) \sin \varphi_j^k \cos \varphi_j^k + a_{45}^k (\cos^2 \varphi_j^k - \sin^2 \varphi_j^k), \\ a_{55}^{j,k} &= a_{44}^k \sin^2 \varphi_j^k + 2a_{45}^k \sin \varphi_j^k \cos \varphi_j^k + a_{55}^k \cos^2 \varphi_j^k. \end{aligned}$$

Враховуючи формули (6), перетворення тензора напружень при зміні системи координат і принцип суперпозиції розв'язків щодо N_k внутрішніх неоднорідностей $L_{j,k}$, у системі координат xOy запишемо

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{yz}^{0,k,\text{hom}} + i\widehat{\sigma}_{xz}^{0,k,\text{hom}} &= \sum_{j=1}^{N_k} (\widehat{\sigma}_{nz,j}^{0,k,\text{hom}} + i\widehat{\sigma}_{sz,j}^{0,k,\text{hom}}) \exp(-i\varphi_j^k), \\ s_j^k + in_j^k &= (x + iy - z_{0,j}^k) \exp(-i\varphi_j^k), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким чином, рівняння (3) з урахуванням (5), (7) дає *основний збурений розв'язок* щодо невідомих функцій стрибків.

Збурений коригувальний розв'язок $\widehat{\sigma}_{yz}^{1,k}$, $\widehat{\sigma}_{xz}^{1,k}$, $\widehat{w}^{1,k}$ враховує вплив межі контакту півплощин, а також взаємодію усіх включень верхньої і нижньої півплощин. Методика його побудови ґрунтується на використанні узагальненого закону Гука, рівняння рівноваги, введенні функції напружень, застосуванні інтегрального перетворення Фур'є, використанні умов ідеального механічного контакту на лінії поділу матеріалів, а також крайових умов на нескінченності. Для анізотропної кусково-однорідної площини лише з внутрішніми включеннями у верхній і нижній півплощинах цю методику детально описано в [5]. Її застосування з урахуванням системи додаткових тонких міжфазних неоднорідностей виявило незмінність кінцевого результату порівняно з отриманим у [5]. Це свідчить про те, що збурений коригувальний розв'язок досліджуваної задачі не залежить від залежності міжфазних включень. Такий самий висновок підтверджується також для ізотропного випадку [2]. Тому збурені коригувальні розв'язки для напружень подамо у такому вигляді [5]:

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_{yz}^{1,k} + i\widehat{\sigma}_{xz}^{1,k} = & \sum_{j=1}^{N_k} \int_{L_{j,k}'} \left\{ \frac{[\beta^k + i(1 - \alpha^k)](a_{55}^{j,k} \alpha_j^k f_{5,j}^k(t) + i f_{6,j}^k(t)) G_{1,j}^k}{4\pi(a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2) a_{55}^{j,k} \alpha_j^k H_{1,j}^k(t)} + \right. \\
& \left. - \frac{[\beta^k + i(1 + \alpha^k)](a_{55}^{j,k} \alpha_j^k f_{5,j}^k(t) - i f_{6,j}^k(t)) \overline{G_{1,j}^k}}{4\pi(a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2) a_{55}^{j,k} \alpha_j^k H_{1,j}^k(t)} \right\} dt + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{3-k}} \int_{L_{j,3-k}'} \left\{ \frac{[\beta^k + i(1 - \alpha^k)](a_{55}^{j,3-k} \alpha_j^{3-k} f_{5,j}^{3-k}(t) - i f_{6,j}^{3-k}(t)) G_{2,j}^k}{4\pi(a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2) a_{55}^{j,3-k} \alpha_j^{3-k} H_{2,j}^k(t)} + \right. \\
& \left. - \frac{[\beta^k + i(1 + \alpha^k)](a_{55}^{j,3-k} \alpha_j^{3-k} f_{5,j}^{3-k}(t) + i f_{6,j}^{3-k}(t)) \overline{G_{2,j}^k}}{4\pi(a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2) a_{55}^{j,3-k} \alpha_j^{3-k} H_{2,j}^k(t)} \right\} dt, \\
& k = 1, 2, \tag{8}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
G_{1,j}^k &= a_{45}^k C_{2,j}^k + a_{55}^k C_{1,j}^k + i(-a_{55}^k \alpha_j^k + C_{2,j}^k a_{55}^{3-k} \alpha^{3-k}), \\
G_{2,j}^k &= a_{45}^{3-k} C_{2,j}^{3-k} + a_{55}^{3-k} C_{1,j}^{3-k} + i(a_{55}^{3-k} \alpha_j^{3-k} + C_{2,j}^{3-k} a_{55}^{3-k} \alpha^{3-k}), \\
C_{1,j}^k &= \left(-1 + \frac{a_{44}^{j,k}}{a_{55}^{j,k}} \right) \sin \varphi_j^k \cos \varphi_j^k - \beta_j^k \cos 2\varphi_j^k, \\
C_{2,j}^k &= \left(-1 + \frac{a_{44}^{j,k}}{a_{55}^{j,k}} \right) \sin \varphi_j^k \sin \varphi_j^k - \beta_j^k \sin 2\varphi_j^k + 1, \\
H_{1,j}^k(t) &= y \mathcal{B}_j^k \alpha^k + T_{1,j}^k + i(y \beta_j^k \mathcal{B}_j^k + T_{2,j}^k + x \mathcal{B}_j^k), \\
H_{2,j}^k(t) &= y \mathcal{B}_j^{3-k} \alpha^k - T_{1,j}^{3-k} + i(y \beta_j^k \mathcal{B}_j^{3-k} + T_{2,j}^{3-k} + x \mathcal{B}_j^{3-k}), \\
\mathcal{B}_j^k &= (\beta_j^k \sin \varphi_j^k - \cos \varphi_j^k)^2 + (\alpha_j^k)^2 \sin^2 \varphi_j^k, \\
T_{1,j}^k &= \alpha_j^k (t \sin \varphi_j^k + y_{0,j}^k), \\
T_{2,j}^k &= (-\cos \varphi_j^k + \beta_j^k \sin \varphi_j^k) \times \\
& \quad \times [t + (\cos \varphi_j^k - \beta_j^k \sin \varphi_j^k) x_{0,j}^k + (\sin \varphi_j^k + \beta_j^k \cos \varphi_j^k) y_{0,j}^k] - \\
& \quad - (\alpha_j^k)^2 (x_{0,j}^k \sin \varphi_j^k - y_{0,j}^k \cos \varphi_j^k) \sin \varphi_j^k.
\end{aligned}$$

Вирази збурених коригувальних розв'язків для переміщень знайдемо з використанням узагальненого закону Гука

$$\frac{\partial \widehat{w}^{1,k}}{\partial x} = a_{45}^k \widehat{\sigma}_{yz}^{1,k} + a_{55}^k \widehat{\sigma}_{xz}^{1,k}.$$

Отже, формули (1) з урахуванням (2), (3), (5), (7), (8) дають напружено-деформований стан анізотропної кусково-однорідної площини із системою внутрішніх і міжфазних тонких неоднорідностей, які, у свою чергу, змодельовано невідомими функціями стрибків.

Для знаходження функцій стрибків (оскільки вони не задані априорі [8]) скористаємося умовами взаємодії матриці тіла з навантаженим пружним включенням $L_{\ell,k}$, $\ell = 1, \dots, N_k$, $k = 1, 2, 3$ [4], які задають зв'язок між напруженнями і похідними від переміщень на верхньому («+») і нижньому («-»)

берегах неоднорідності:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{nz,\ell}^{k+} + \sigma_{nz,\ell}^{k-} + (\tau_\ell^{\text{in},k+} + \tau_\ell^{\text{in},k-}) + \\
& + \frac{1}{h_\ell^k a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \int_{-a_\ell^k}^{s_\ell^k} a_{45,\ell}^{\text{in},k} [\sigma_{nz,\ell}^{k-}(t) - \sigma_{nz,\ell}^{k+}(t) + \tau_\ell^{\text{in},k-} - \tau_\ell^{\text{in},k+}] dt + \\
& + \frac{1}{h_\ell^k a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \int_{-a_\ell^k}^{s_\ell^k} \left[\frac{\partial w_\ell^{k-}(t)}{\partial t} - \frac{\partial w_\ell^{k+}(t)}{\partial t} \right] dt = \\
& = -2 \frac{a_{45,\ell}^{\text{in},k}}{a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \sigma_{sz,\ell}^{\text{in},k,\text{av}}(-a_\ell^k) + \frac{w_\ell^{k,*}}{h_\ell^k a_{44,\ell}^{\text{in},k}}, \\
& \frac{\partial w_\ell^{k+}}{\partial s_\ell^k} + \frac{\partial w_\ell^{k-}}{\partial s_\ell^k} - \frac{1}{h_\ell^k a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \int_{-a_\ell^k}^{s_\ell^k} |r_\ell^k|^2 [\sigma_{nz,\ell}^{k-}(t) - \sigma_{nz,\ell}^{k+}(t) + \tau_\ell^{\text{in},k-} - \tau_\ell^{\text{in},k+}] dt + \\
& + \frac{1}{h_\ell^k a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \int_{-a_\ell^k}^{s_\ell^k} a_{45,\ell}^{\text{in},k} \left[\frac{\partial w_\ell^{k-}(t)}{\partial t} - \frac{\partial w_\ell^{k+}(t)}{\partial t} \right] dt = \\
& = 2 \frac{|r_\ell^k|^2}{a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \sigma_{sz,\ell}^{\text{in},k,\text{av}}(-a_\ell^k) + \frac{a_{45,\ell}^{\text{in},k}}{a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \frac{w_\ell^{k,*}}{h_\ell^k}, \\
& \ell = 1, \dots, N_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (9)
\end{aligned}$$

де

$$|r_\ell^k| = \sqrt{a_{44,\ell}^{\text{in},k} a_{55,\ell}^{\text{in},k} - (a_{45,\ell}^{\text{in},k})^2}.$$

Априорні торцеві сталі $w_\ell^{k,*}$, $\sigma_{sz,\ell}^{\text{in},k,\text{av}}$ для внутрішніх включень запишемо згідно з [4], враховуючи, що однорідний напружений стан (2) є нульовим, таким чином:

$$\begin{aligned}
w_\ell^{k,*} &= h_\ell^k (\tau_\ell^{\text{in},k+} + \tau_\ell^{\text{in},k-}) \min \{a_{44}^{\ell,k}, a_{44,\ell}^{\text{in},k}\}, \quad \sigma_{sz,\ell}^{\text{in},k,\text{av}}(-a_\ell^k) = 0, \\
& \ell = 1, \dots, N_k, \quad k = 1, 2.
\end{aligned}$$

Для міжфазних включень торцеві сталі запишемо в усередненому вигляді з урахуванням різниці в характеристиках верхньої і нижньої півплощин:

$$\begin{aligned}
w_\ell^{3,*} &= \frac{1}{2} h_\ell^3 (\tau_\ell^{\text{in},3+} + \tau_\ell^{\text{in},3-}) (\min \{a_{44}^{\ell,1}, a_{44,\ell}^{\text{in},3}\} + \min \{a_{44}^{\ell,2}, a_{44,\ell}^{\text{in},3}\}), \\
\sigma_{sz,\ell}^{\text{in},3,\text{av}}(-a_\ell^k) &= 0, \quad \ell = 1, \dots, N_3.
\end{aligned}$$

Перейдемо в (1) до локальної системи координат неоднорідності $L_{\ell,k}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{nz,\ell}^k + i\sigma_{sz,\ell}^k &= (\sigma_{yz}^k + i\sigma_{xz}^k) \exp(i\varphi_\ell^k), \\
x + iy &= (s_\ell^k + in_\ell^k) \exp(i\varphi_\ell^k) + z_{0,\ell}^k,
\end{aligned}$$

і знайдемо граничні значення напружень $\sigma_{nz,\ell}^{k\pm}$ і похідних від переміщень

$\frac{\partial w_\ell^{k\pm}}{\partial s_\ell^k}$ на її берегах згідно з формулою Сохоцького – Племеля ($n_\ell^k = 0$) [8].

Як наслідок, для внутрішніх включень $L_{\ell,k}$, $\ell = 1, \dots, N_k$, $k = 1, 2$, отримаємо такі граничні значення (вибираємо одночасно або верхні, або нижні знаки):

$$\begin{aligned}\sigma_{nz,\ell}^{k\pm} &= \mp \frac{1}{2} f_{5,\ell}^k(s_\ell^k) - \frac{1}{2\pi \alpha_\ell^k a_{55}^{\ell,k}} \int_{L_{\ell,k}} \frac{f_{6,\ell}^k(t) dt}{t - s_\ell^k} + \sigma_{nz,\ell}^{k,\ell}, \\ \frac{\partial w_\ell^{k\pm}}{\partial s_\ell^k} &= \mp \frac{1}{2} f_{6,\ell}^k(s_\ell^k) + \frac{a_{55}^{\ell,k} \alpha_\ell^k}{2\pi} \int_{L_{\ell,k}} \frac{f_{5,\ell}^k(t) dt}{t - s_\ell^k} + a_{45}^{\ell,k} \sigma_{nz,\ell}^{k,\ell} + a_{55}^{\ell,k} \sigma_{sz,\ell}^{k,\ell},\end{aligned}\quad (10)$$

де

$$\begin{aligned}\sigma_{nz,\ell}^{k,j} + i\sigma_{sz,\ell}^{k,j} &= \sum_{q=1, q \neq j}^{N_k} (\bar{\sigma}_{nz,q}^{0,k,\text{hom}} + i\bar{\sigma}_{sz,q}^{0,k,\text{hom}}) \exp(i(\varphi_\ell^k - \varphi_q^k)) + \\ &+ (\bar{\sigma}_{yz}^{0,k,\text{interf}} + i\bar{\sigma}_{xz}^{0,k,\text{interf}}) \exp(i\varphi_\ell^k) + (\bar{\sigma}_{yz}^{1,k} + i\bar{\sigma}_{xz}^{1,k}) \exp(i\varphi_\ell^k), \\ s_q^k + in_q^k &= [s_\ell^k \exp(i\varphi_\ell^k) + z_{0,\ell}^k - z_{0,q}^k] \exp(-i\varphi_q^k), \\ x + iy &= s_\ell^k \exp(i\varphi_\ell^k) + z_{0,\ell}^k.\end{aligned}$$

Для міжфазних включень $L_{\ell,3}$, $\ell = 1, \dots, N_3$, граничні значення набувають такого вигляду (вибираємо одночасно або верхні знаки і $k = 1$, або нижні знаки і $k = 2$):

$$\begin{aligned}\sigma_{nz,\ell}^{3\pm} &= \mp \frac{a_{55}^{3-k} \alpha^{3-k}}{a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2} f_{5,\ell}^3(s_\ell^3) - \\ &- \frac{1}{(a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2) \pi} \int_{L_{\ell,3}} \frac{f_{6,\ell}^3(t) dt}{t - s_\ell^3} + \sigma_{yz,\ell}^{k,\ell}, \\ \frac{\partial w_\ell^{3\pm}}{\partial s_\ell^3} &= \mp \frac{\alpha^k a_{55}^k}{a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2} f_{6,\ell}^3(s_\ell^3) + \\ &+ \frac{a_{55}^{3-k} \alpha^{3-k} \alpha^k a_{55}^k}{(a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2) \pi} \int_{L_{\ell,3}} \frac{f_{5,\ell}^3(t) dt}{t - s_\ell^3} + a_{45}^k \sigma_{yz,\ell}^{k,\ell} + a_{55}^k \sigma_{xz,\ell}^{k,\ell},\end{aligned}\quad (11)$$

де

$$\begin{aligned}\sigma_{yz,\ell}^{k,j} + i\sigma_{xz,\ell}^{k,j} &= (\bar{\sigma}_{yz}^{0,k,\text{hom}} + i\bar{\sigma}_{xz}^{0,k,\text{hom}}) + \\ &+ \sum_{q=1, q \neq j}^{N_3} (\bar{\sigma}_{nz,q}^{0,k,\text{interf}} + i\bar{\sigma}_{sz,q}^{0,k,\text{interf}}) + (\bar{\sigma}_{yz}^{1,k} + i\bar{\sigma}_{xz}^{1,k}), \\ s_q^3 + in_q^3 &= s_\ell^3 + x_{0,\ell}^3 - x_{0,q}^3, \quad x + iy = s_\ell^3 + x_{0,\ell}^3.\end{aligned}$$

Підстановка (10), (11) в умови взаємодії (9) для кожного включення $L_{\ell,k}$, $\ell = 1, \dots, N_k$, $k = 1, 2, 3$, дає систему сингулярних інтегральних рівнянь $2(N_1 + N_2 + N_3)$ -го порядку стосовно невідомих функцій стрибків.

Додаткові $2(N_1 + N_2 + N_3)$ умови рівноваги кожного включення і однозначності переміщень при обході навколо нього:

$$\int_{-a_\ell^k}^{a_\ell^k} f_{5,\ell}^k(t) dt = 2a_\ell^k (\tau_\ell^{\text{in},k+} - \tau_\ell^{\text{in},k-}), \quad \int_{-a_\ell^k}^{a_\ell^k} f_{6,\ell}^k(t) dt = 0,$$

$$\ell = 1, \dots, N_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

дають змогу розв'язати результуючу систему сингулярних інтегральних рівнянь методом колокацій з розвиненням функцій стрибків у скінченні суми рядів з виділеною кореневою особливістю [8, 11, 14], а отже, відповідно до (1), (2), (4), (5), (8), можна знайти шуканий напружено-деформований стан у довільній точці середовища, зокрема, і всередині кожного включення. Для числового аналізу розглянутих нижче прикладів використовуємо сорок перших членів розвинення функцій стрибків у ряди за поліномами Чебишова першого роду з виділеною кореневою особливістю. Це забезпечило похибку обчислень узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (УКІН), меншу, ніж 1%.

Поля напружень у безпосередньому околі вершин неоднорідностей добре характеризують згадані вище УКІН [8]. Для пружних внутрішніх включень в анізотропному матеріалі УКІН у вершинах включення A чи B обчислюємо за формулами [8]

$$K_{3,2,\ell}^{k,A,B} - iK_{3,1,\ell}^{k,A,B} = \mp \left(p_{5,\ell}^{k\pm} + \frac{i}{a_{55}^{\ell,k} \alpha_\ell^k} p_{6,\ell}^{k\pm} \right) \sqrt{\pi/2},$$

$$p_{r,\ell}^{k\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm a_\ell^k} \left[\sqrt{|a_\ell^k \mp t|} f_{r,\ell}^k(\pm a_\ell^k) \right], \quad r = 5, 6, \quad \ell = 1, \dots, N_k, \quad k = 1, 2.$$

Зазначимо, що для випадку дуже податних включень УКІН $K_{3,1,\ell}^{k,A,B}$ співпадають з класичними КІН для тріщин ($K_{3,2,\ell}^{k,A,B}$ у цьому випадку буде нульовим). Для міжфазних неоднорідностей у вигляді тріщин і абсолютно жорстких включень у біматеріальному анізотропному клині формули обчислення УКІН стосовно невідомих функцій стрибків для окремих задач подано в [1] у замкнутому вигляді. Оскільки числові експерименти здійснюватимемо для міжфазних неоднорідностей типу тріщин, то визначимо КІН подібно до того, як це зроблено в [10]:

$$K_{3,1,\ell}^{3,A,B} = \pm \left(\frac{2}{a_{55}^1 \alpha_1^1 + a_{55}^2 \alpha_2^2} p_{6,\ell}^{3\pm} \right) \sqrt{\pi/2}, \quad K_{3,2,\ell}^{3,A,B} = 0,$$

$$p_{r,\ell}^{3\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm a_\ell^3} \left[\sqrt{|a_\ell^3 \mp t|} f_{r,\ell}^3(\pm a_\ell^3) \right], \quad r = 5, 6, \quad \ell = 1, \dots, N_3.$$

Верхні знаки у формулах відповідають вершині B неоднорідності, а нижні – вершині A (див. рис. 1).

3. Числові результати. У розглянутих нижче прикладах тріщини чи абсолютно жорсткі включення (зокрема й ті, що моделюватимуть межу тіла) вважаємо виготовленими відповідно із сильно податного ($a_{44,j}^{\text{in},k} = a_{55,j}^{\text{in},k} = 10^6 a_{55}^k$, $a_{45,j}^{\text{in},k} = 0$, $k = 1, 2$, $a_{44,j}^{\text{in},3} = a_{55,j}^{\text{in},3} = 10^6 \max\{a_{55}^1, a_{55}^2\}$, $a_{45,j}^{\text{in},3} = 0$) або дуже жорсткого ($a_{44,j}^{\text{in},k} = a_{55,j}^{\text{in},k} = 10^{-6} a_{55}^k$, $a_{45,j}^{\text{in},k} = 0$, $k = 1, 2$) матеріалу. Приймемо, що товщини неоднорідностей є однаковими і віднесемо їх до довжини досліджуваної неоднорідності: $h_j^k = h_1^3 = 0.01 a_1^3$, $k = 1, 2$.

Приклад 1. Дослідимо поздовжній зсув кусково-однорідної ортотропної півплощини $S_1 \cup S_2$ із симетрично навантаженою зусиллями $\tau_1^{\text{in},3} = \tau$ міжфазною тріщиною $L_{1,3}$ завдовжки $2a_1^3$ з центром у точці $(d_0 + a_1^3, 0)$. Вільна від навантаження межа півплощини нахилена під кутом α до осі абсцис (рис. 2, ліва частина).

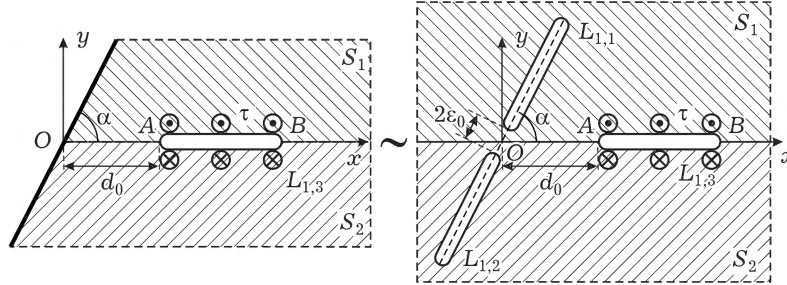


Рис. 2

Для дослідження цієї задачі застосуємо метод прямого вирізування. Для цього розглянемо анізотропну кусково-однорідну площину із так само розміщеною і навантаженою міжфазною тріщиною $L_{1,3}$. Додатково розмістимо у верхній, S_1 , і нижній, S_2 , півплощинах тріщини $L_{1,1}$ та $L_{1,2}$, що повинні змодельовати вільну від навантаження межу тіла (рис. 3, права частина). Відносні довжини тріщин $L_{1,1}$, $L_{1,2}$ однакові: $a_1^1/a_1^3 = a_1^2/a_1^3 = a$, кути нахилу до осі абсцис $\phi_1^1 = \phi_1^2 = \alpha$; $\varepsilon = \varepsilon_0/a_3$ – відносна відстань між суміжними вершинами. Пружні сталі матеріалів S_1 , S_2 нормуємо значенням a_{55}^1 .

Раніше у [2] таку задачу з використанням методу прямого вирізування було розглянуто для ізотропних матеріалів. Для отримання нормованих КІН із похибкою, що не перевищувала 0.1%, достатньо було взяти $a = 15$. У [3, 5] показано незначний вплив анізотропії матеріалу на швидкість збіжності методу прямого вирізування. Тому і тут обчислення здійснюємо для таких самих лінійних розмірів $a = 15$ тріщин $L_{1,1}$, $L_{1,2}$ та $\varepsilon = 10^{-4}$.

Як приклад дослідимо залежність КІН міжфазної тріщини від пружних сталей матеріалів та кута нахилу α межі біматеріальної півплощини для семи конкретних варіантів співвідношення складових біматеріалу. Нехай матеріал S_2 є ізотропним ($a_{44}^2/a_{55}^1 = 1$, $a_{45}^2/a_{55}^1 = 0$, $a_{55}^2/a_{55}^1 = 1$). Розглянемо ізотропний і два ортотропні випадки матеріалу S_1 :

$$(I) \quad a_{44}^1/a_{55}^1 = 1, \quad a_{45}^1/a_{55}^1 = 0;$$

$$(II) \quad a_{44}^1/a_{55}^1 = 0.5, \quad a_{45}^1/a_{55}^1 = 0;$$

$$(III) \quad a_{44}^1/a_{55}^1 = 2, \quad a_{45}^1/a_{55}^1 = 0.$$

Також дослідимо випадки, коли матеріал S_1 – ізотропний ($a_{44}^1/a_{55}^1 = 1$, $a_{45}^1/a_{55}^1 = 0$), а S_2 – ортотропний з такими характеристиками:

$$(IV) \quad a_{44}^2/a_{55}^1 = 0.5, \quad a_{55}^2/a_{55}^1 = 1, \quad a_{45}^2/a_{55}^1 = 0;$$

$$(V) \quad a_{44}^2/a_{55}^1 = 2, \quad a_{55}^2/a_{55}^1 = 1, \quad a_{45}^2/a_{55}^1 = 0;$$

$$(VI) \quad a_{44}^2/a_{55}^1 = 1, \quad a_{55}^2/a_{55}^1 = 0.5, \quad a_{45}^2/a_{55}^1 = 0;$$

$$(VII) \quad a_{44}^2/a_{55}^1 = 1, \quad a_{55}^2/a_{55}^1 = 2, \quad a_{45}^2/a_{55}^1 = 0.$$

У табл. 1 подано значення нормованих КІН $K_3^{0A} = K_{3,1,1}^{3,A} / (\tau \sqrt{\pi a_1^3})$ для

$d = d_0/a_1^3 = 1$ та різних значень кута α і складових матеріалів. Значення КІН для ізотропного однорідного матеріалу **(I)** збігаються з результатами роботи [2] для тріщин в ізотропній біматеріальній півплощині з похибкою, меншою від 0.1%. Таку саму точність було досягнуто для інших співвідношень ізотропних матеріалів S_1 та S_2 , поданих у [2], але через обмеження обсягу статті у таблицях їх не повторюватимемо. Зазначимо, що модулі зсуву G_1 та G_2 ізотропної біматеріальної півплощини у [2] мають такий зв'язок з пружними сталими анізотропії a_{lm}^k для S_k : $1/a_{44}^k = 1/a_{55}^k = G_k$, $a_{45}^k = 0$, $k = 1, 2$.

Таблиця 1. Нормовані КІН K_3^{0A} для міжфазної тріщини в кусково-однорідній півплощині.

α	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$
(I)	1.143	1.085	1.061	1.047	1.061	1.085	1.143
(II)	1.182	1.104	1.068	1.047	1.064	1.092	1.158
(III)	1.111	1.072	1.056	1.047	1.058	1.078	1.127
(IV)	1.158	1.092	1.064	1.047	1.068	1.104	1.182
(V)	1.127	1.078	1.058	1.047	1.056	1.072	1.111
(VI)	1.158	1.093	1.065	1.047	1.050	1.061	1.090
(VII)	1.127	1.076	1.055	1.047	1.080	1.128	1.229

Вірогідність отриманих результатів також підтверджує дзеркальна кутова симетрія отриманих значень КІН щодо кута $\pi/2$ для структур **(II)** і **(IV)**, а також **(III)** і **(V)**. Тобто КІН міжфазної тріщини для матеріалів **(II)** або **(IV)** за кута нахилу межі півплощини α збігаються зі значеннями КІН тріщини для матеріалів відповідно **(III)** або **(V)** за кута нахилу $\pi - \alpha$. Дійсно, для таких матеріалів та кутів досліджуване тіло є дзеркальним відображенням себе щодо осі абсцис, а отже, і напружений стан в околі вершини міжфазної тріщини має бути таким самим. Для однорідного ізотропного матеріалу **(I)** очікувано отримали значення КІН, які є дзеркально симетричними стосовно кута $\alpha = \pi/2$, оскільки в цьому випадку задача зводиться до задачі поздовжнього зсуву навантаженої зусиллями τ тріщини, орієнтованої під кутом $\pi - \alpha$ в однорідній ізотропній півплощині.

Для кута $\alpha = \pi/2$ спостерігаємо незалежність значень КІН міжфазної тріщини від пружних сталей для всіх співвідношень матеріалів S_1 та S_2 . Такий самий висновок для міжфазних неоднорідностей у симетричних стосовно межі поділу матеріалів кусково-однорідних тілах для окремих прикладів зроблено також у [1, 14, 16].

Для структур **(IV)** і **(VI)** або **(V)** і **(VII)** у випадку гострих кутів ($\alpha = \pi/6$) КІН практично збігаються. Це можна пояснити у такий самий спосіб, як це зроблено в [5]: для гострих кутів нахилу α змодельованої тріщини нами межі біматеріальної півплощини тріщина $L_{1,2}$ практично не впливає на напружений стан в околі вершини досліджуваної міжфазної тріщини, тому її впливом (і наявністю) можна знехтувати. Оскільки інших міжфазних неоднорідностей, а також внутрішніх неоднорідностей у півплощині S_2 нема, то з формул (8), (11) легко бачити, що вплив пружних сталей нижньої півплощини S_2 на напружений стан в околі вершини міжфазної тріщини описується не окремими модулями пружності a_{44}^2 , a_{45}^2 , a_{55}^2 , а їхньою комбінацією:

$$a_{55}^2 \alpha^2 = |r^2| = \sqrt{a_{44}^2 a_{55}^2 - (a_{45}^2)^2}.$$

Оскільки $|r^2|$ для матеріалів (IV) і (VI) є однаковими ($|r^2| = 0.5a_{55}^1$), так само, як і $|r^2|$ для матеріалів (V) і (VII) ($|r^2| = 2a_{55}^1$), то, враховуючи, що геометрія і модулі пружності півплощини S_1 ті самі, значення КІН міжфазної тріщини $L_{1,3}$ також не повинно змінитися.

Приклад 2. Дослідимо ортотропну півплощину S_1 з симетрично навантаженою зусиллями $\tau_1^{\text{in},3} = \tau$ міжфазною тріщиною $L_{1,3}$ завдовжки $2a_1^3$. Півплощина підкріплена жорстко закріпленою на протилежній межі ортотропною смугою S_2 заввишки H (ліва частина рис. 3). Застосуємо метод прямого вирізування для дослідження цієї задачі. Розглянемо ортотропну кусково-однорідну площину $S_1 \cup S_2$ із так само розміщеною і навантаженою міжфазною тріщиною $L_{1,3}$. Додатково розмістимо у нижній півплощині S_2 довге абсолютно жорстке включення $L_{1,2}$ (див. праву частину рис. 3). Його моделюємо ізотропним дуже жорстким включенням із центром у точці $(0, -H)$, кутлом нахилу $\varphi_1^2 = 0$ та півдовжиною $a_1^2 = 15a_1^3$.

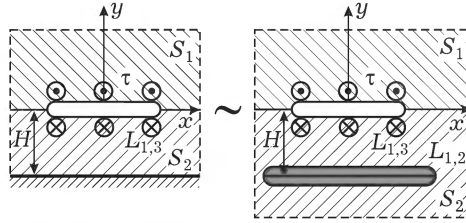


Рис. 3

Дослідимо вплив модулів пружностей складових матеріалів на КІН міжфазної тріщини. Із таких самих міркувань, як і у попередньому прикладі, можна стверджувати, що значення КІН міжфазної тріщини залежатиме не від окремих пружних сталей a_{44}^1 , a_{45}^1 , a_{55}^1 півплощини S_1 , а від їхньої комбінації $a_{55}^1 \alpha^1 = |r^1| = \sqrt{a_{44}^1 a_{55}^1 - (a_{45}^1)^2}$.

На рис. 4 подано графіки залежностей нормованих КІН $K_{3,1}^0 = K_{3,1,1}^{3,A,B} / (\tau \sqrt{\pi a_1^3})$ від логарифма відносної величини параметра $r_0 = |r^1| / a_{55}^2$ для п'яти значень $k = 1/2, 2/3, 1.0, 3/2, 2.0$ відношень пружних сталей $k = a_{44}^2 / a_{55}^2$ ($a_{45}^2 / a_{55}^2 = 0$) матеріалу нижньої смуги S_2 для $H = a_1^3$. Суцільна крива відповідає ізотропному матеріалу, а пунктирна, штрихові і штрихпунктирні криві – різним ортотропним матеріалам.

Зі збільшенням r_0 матеріал півплощини S_1 стає податнішим, що призводить до зростання значень КІН. Вже для $r_0 > 10$ нормовані значення КІН є доволі близькими до одиниці. Для ізотропного матеріалу півплощини S_1 отримане значення КІН ($\lg r_0 = 0$, $K_{3,1}^0 = 0.926$) з незначною похибкою збігається з отриманим у [8] значенням КІН задачі поздовжнього зсуву внутрішньої навантаженої тріщини в однорідній півплощині з жорстко зацмленою межею. Збільшення параметра ортотропії k смуги S_2 також зумовлює зростання КІН.

На рис. 5 подано графіки залежностей нормованих КІН $K_{3,1}^0 = K_{3,1,1}^{3,A,B} / (\tau \sqrt{\pi a_1^3})$ від параметра $H_0 = H/a_1^3$ відносної товщини смуги S_2 для трьох відносних значень параметра ортотропії $k = 1/2, 1, 2$ смуги S_2 та трьох значень параметрів r_0 півплощини S_1 : $\lg r_0 = -2, 0, 2$.

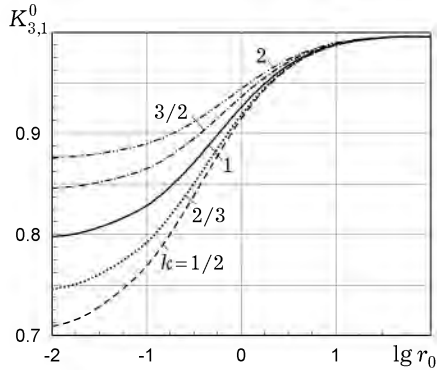


Рис. 4

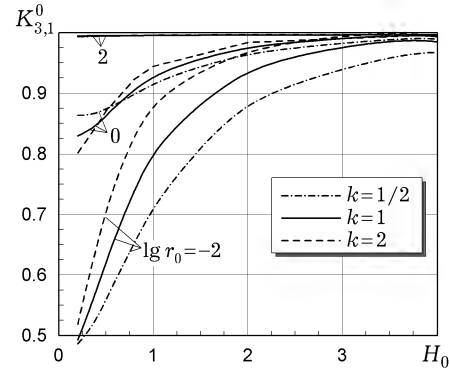


Рис. 5

Видно, що цілком очікувано, зі зростанням відносної товщини H_0 смуги S_2 значення КІН тріщини прямують до 1, яка є значенням КІН задачі міжфазної тріщини в кусково-однорідній площині (в цьому випадку КІН не залежать від пружних сталей біматеріалу). Зі зменшенням товщини смуги КІН монотонно зменшуються, оскільки щораз більшу роль починає відігравати жорстко зацемлена межа. Мінімальне значення КІН отримали для $\lg r_0 = -2$ (велика жорсткість матеріалу півплощини S_1). Для доволі податного матеріалу S_1 , коли $\lg r_0 = 2$, значення КІН є близькими до одиниці для всіх розглянутих значень параметрів k та H_0 .

Висновки. Побудовано інтегральні рівняння задачі взаємодії скінченних систем тонких анізотропних внутрішніх і міжфазних включень в анізотропному біматеріалі за поздовжнього зсуву. На основі цього розв'язку вдалося успішно апробувати розроблений раніше метод прямого вирізування на випадках дослідження поздовжнього зсуву анізотропних кусково-однорідних тіл із прямолінійною межею поділу за можливої наявності як міжфазних, так і внутрішніх тонких анізотропних включень. Як приклад розглянуто задачі поздовжнього зсуву для ортотропного біматеріального півпростору та композиції з півпростору та жорстко закріпленого шару з навантаженою міжфазною тріщиною. В окремих граничних випадках результати обчислення КІН збігаються з відомими в літературі.

Вихідні коди використаних у роботі програм можна знайти за адресою <https://github.com/kyryl-vasiliev/modeiii-bimaterial-interface-inclusions>.

1. Акоюн В. Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. – Ереван: Гитутюн НАН РА, 2014. – 322 с.
2. Васильев К. В., Сулим Г. Т. Метод прямого вирізування у задачах кусково-однорідних тіл з міжфазними тріщинами за поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – **59**, № 4. – С. 44–57.
Te same: Vasil'ev K. V., Sulym H. T. Method of direct cutting-out in the problems of piecewise homogeneous bodies with interface cracks under longitudinal shear // *J. Math. Sci.* – 2019. – **238**, No. 1. – P. 46–62.
3. Васильев К. В., Сулим Г. Т. Метод прямого вирізування у задачах пружної рівноваги анізотропних тіл з тріщинами за поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2018. – **61**, № 3. – С. 89–100.
Te same: Vasil'ev K. V., Sulym H. T. Method of direct cutting-out in the problems of elastic equilibrium of anisotropic bodies with cracks under longitudinal

- shear // J. Math. Sci. – 2021. – **254**, No. 1. – P. 103–116.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05291-9>.
4. Васильєв К. В., Сулим Г. Т. Метод прямого вирізування у моделюванні ортотропних тіл з тонкими пружними включеннями за поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 3. – С. 55–68.
 5. Васильєв К. В., Сулим Г. Т. Пружна рівновага анізотропних біматеріальних тіл з тонкими пружними анізотропними включеннями за поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2021. – **64**, № 3. – С. 90–103.
 6. Васильєв К., Сулим Г. Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплоского деформування // *Машинознавство.* – 2006. – № 11–12. – С. 10–17.
 7. Лехницький С. Г. Анизотропные пластинки. – Москва: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
Te same: *Lekhnitskii S. G. Anisotropic plates.* – New York etc.: Gordon and Breach Sci. Pub., 1968. – xvi+534 p.
 8. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
 9. Сулим Г. Т., Шевчук С. П. Поздовжній зсув шаруватих анізотропних середовищ зі стрічковими неоднорідностями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 3. – С. 90–97.
Te same: *Sulym H. T., Shevchuk S. P. Longitudinal shear of layered anisotropic media with band-type inhomogeneities* // J. Math. Sci. – 2001. – **104**, No. 5. – P. 1506–1514. – <https://doi.org/10.1023/A:1011383619315>.
 10. Erdogan F., Gupta G. D. Bonded wedges with an interface crack under anti-plane shear loading // *Int. J. Fract.* – 1975. – **11**, No. 4. – P. 583–593.
 11. Ghadiri M., Shahani A. R. Mode III fracture analysis of an anisotropic finite wedge with an interfacial crack // *Math. Mech. Solids.* – 2012. – **18**, No. 8. – P. 823–836.
 12. Kozinov S., Loboda V. Literature review on cracks located at the interface of dissimilar materials (Interface cracks) // *Kozinov S., Loboda V. Fracture mechanics of electrically passive and active composites with periodic cracking along the interface.* – Cham: Springer, 2020. – Ser.: Springer Tracts in Mechanical Engineering. – P. 1–11. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-43138-9_1.
 13. Li X.-F. Two perfectly-bonded dissimilar orthotropic strips with an interfacial crack normal to the boundaries // *Appl. Math. Comput.* – 2005 – **163**, No 2. – P. 961–975. – <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.05.003>.
 14. Li X.-F., Duan X.-Y. An interfacially-cracked orthotropic rectangular bi-material subjected to antiplane shear loading // *Appl. Math. Comput.* – 2006. – **174**, No. 2. – P. 1060–1079. – <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.06.002>.
 15. Sulym G., Shevchuk S. Antiplane problems for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations // *J. Theor. Appl. Mech.* – 1999. – **37**, No. 1. – P. 47–63.
 16. Ting T. C. T. Anisotropic elasticity: theory and applications. – New York: Oxford Univ. Press, 1996. – xvii+570 p.

LONGITUDINAL SHEAR OF ANISOTROPIC BIMATERIAL BODIES WITH BAND INCLUSIONS AND INTERFACIAL CRACKS

Using the jump function method, a solution to the basic problem of longitudinal shear of anisotropic bimaterial with systems of thin internal and interfacial band anisotropic inhomogeneities is constructed. Thereby, it is possible to extend the method of direct cutting-out to the case of studying piecewise homogeneous anisotropic bodies with a rectilinear interface in the presence of thin interface inclusions. Using the proposed technique, the stressed state of an orthotropic bimaterial half-space as well as an orthotropic half-space joined with a rigidly clamped layer in the presence of an interfacial crack is investigated. The influence of elastic moduli and certain geometric parameters of the considered problems on the stress intensity factors of the crack is analyzed.

Key words: anisotropy, orthotropy, bimaterial, antiplane deformation, interfacial crack, direct cutting-out method.