

ОСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З НЕЗАДАНИМИ ДІЛЯНКАМИ ВЗАЄМОДІЇ

Наведено чисельний алгоритм розв'язування осесиметричної задачі теорії пружності про взаємодію пружного півпростору з жорстким штампом, поверхня якого має складну форму. Під дією такого штампна контакт відбувається на окремих, наперед невідомих ділянках. Контактну задачу сформульовано у вигляді інтегральних рівнянь-нерівностей Сін'єоріні, які, з використанням квадратних формул для сингулярних інтегралів, трансформовано до системи лінійних алгебричних рівнянь-нерівностей. Розв'язування цієї системи зведено до знаходження мінімуму квадратичної форми за лінійних обмежень на невідомий контактний тиск. З використанням розробленого алгоритму досліджено осесиметричну задачу про взаємодію пружного півпростору з параболоїдним штампом, що має неглибоку виїмку або систему виїмок.

Ключові слова: осесиметрична задача, контактний тиск, жорсткий штамп, система виїмок, метод інтегральних рівнянь, квадратичне програмування.


Вступ. Відомо, що велика кількість деталей машин і механізмів при експлуатації працюють в умовах контактної взаємодії. Розрахунок напружено-деформованого стану в умовах силового контакту є важливим, оскільки зона контакту часто є зоною втрати міцності або зоною руйнування конструкції. Тому визначення та дослідження напружено-деформованого стану в цій зоні і подальше вдосконалення конструкції дозволить підвищити її працездатність і надійність.

У цій роботі розглядається контактна осесиметрична задача для пружного півпростору з жорстким штампом, поверхня якого має складну форму. Відомо, що при силевій дії такого штампна контакт буде здійснюватися на окремих наперед невідомих ділянках контакту [3]. Задачі такого типу достатньо повно вивчені для випадку гладких штампів параболоїдного типу або кільцевих штампів, у яких виникає тільки одна ділянка контакту. Визначення області контакту зводиться до розв'язання відповідної системи алгебричних рівнянь, яку отримують з умови, що на краях ділянок контакту контактні напруження дорівнюють нулю.

Задачі, в яких розглядаються штампні складної форми, коли область контакту складається з декількох наперед невідомих ділянок, вивчені значно меншою мірою, оскільки вони належать до істотно нелінійних. У роботах [5, 6] тривимірну контактну задачу для півпростору зведено до розв'язування задачі квадратичного програмування з невідомими областями взаємодії. У роботі [3] плоскі контактні задачі з наперед незаданими ділянками контакту зведено до задачі квадратичного програмування підходом, у якому не використовуються варіаційні методи.

Зауважимо, що при розгляді тривимірних контактних задач для штампів складної форми у загальному випадку необхідно виконувати великий обсяг обчислень. У той же час на практиці широко використовують штампні, які мають форму тіл обертання. Визначення контактного тиску для таких штампів може бути суттєво спрощене, оскільки задача тоді зводиться до розв'язування одновимірних інтегральних рівнянь.

У цій статті побудовано алгоритм розв'язування осесиметричної задачі про взаємодію пружного півпростору зі штампми складних форм. Ділянки контакту і розподіл тиску на них визначаються на основі підходу Сін'єоріні [8] і розв'язування зводиться до задачі квадратичного програмування.

 t_solyar@ukr.net

1. Постановка задачі. Розглянемо контактну задачу про втиснення у пружний півпростір $z \leq 0$ (з модулем Юнга E , коефіцієнтом Пуассона ν та модулем зсуву G) жорсткого штампа, обмеженого поверхнею обертання, віссю обертання якої є вісь Oz (рис. 1). Приймемо, що рівняння основи штампа перед втисканням має вигляд $z = g_0(r)$ (рис. 1а), штамп дотикається до межі півпростору і задається осідання штампа w_0 , $w_0 < 0$. Форма поверхні півпростору після втискання штампа описується функцією $z = g(r)$, де $g(r) = w_0 + g_0(r)$ (рис. 1б). Штамп гладкий і область контакту під дією сили P наперед невідома. Треба визначити ділянки контакту і розподіл контактної тиску на них.

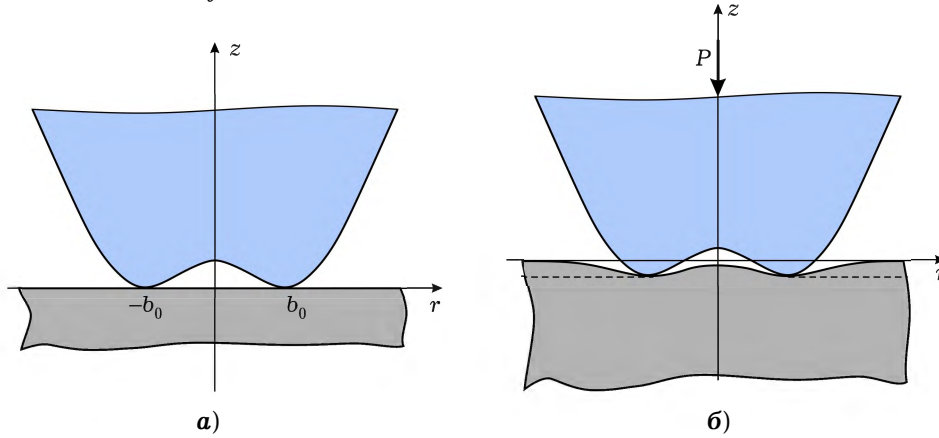


Рис. 1

Будемо виходити з відомого [2] співвідношення для переміщень межі півпростору $z < 0$, навантаженого нормально прикладеними зусиллями $\sigma_z(r, 0) = \sigma(r)$ на проміжку $c < r < d$ у вигляді

$$w(r) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int_c^d \rho \sigma(\rho) F(r, \rho) d\rho, \quad (1)$$

де $F(r, \rho) = \frac{4}{r + \rho} K\left(\frac{4r\rho}{(r + \rho)^2}\right)$, $K(x)$ – еліптичний інтеграл першого роду

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - x \sin^2 \theta)^{1/2}}, \quad 0 \leq x < 1.$$

При наперед незаданих областях взаємодії умови контакту запишемо на основі підходу Сінйоріні. У цьому підході вводиться в розгляд область $a < r < b$, що вміщує всі ділянки контакту, причому приймається, що поза такими ділянками $\sigma_z = 0$. Таким чином отримуємо альтернативні рівняння-нерівності Сінйоріні при $a < r < b$ [8]:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sigma(\rho) \rho F(r, \rho) d\rho &= W(r), \quad \text{при } \sigma < 0, \\ \int_a^b \sigma(\rho) \rho F(r, \rho) d\rho &\leq W(r), \quad \text{при } \sigma = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де $W(r) = \frac{\pi}{1 - \nu^2} E[w_0 + g(r)]$.

Початкові (прогнозовані) значення a , b вибираємо на основі отриманих аналітичними методами розв'язків аналогічних задач для штампів близьких форм. Наприклад, для штампів сферичної форми значення b вибираємо меншим від радіуса сфери. На наступних кроках проводимо уточнення значень a , b чисельним експериментом, зменшуючи ті ділянки, на яких контактні напруження набувають нульових значень.

Перше з рівнянь системи (2) справджується в області контакту. Тут прогин межі півпростору збігається з рівнянням поверхні переміщеного штампа. Друга нерівність справджується поза цією областю (у цій області основа штампа знаходиться вище від поверхні zdeформованої штампом межі півпростору або може дотикатися до неї).

Введемо далі контактний тиск $p = -\sigma$, $p > 0$.

Перепишемо рівняння-нерівності (2) у вигляді

$$\int_a^b q(\rho)F(r, \rho) d\rho = -W(r), \quad \text{при } q > 0,$$

$$\int_a^b q(\rho)F(r, \rho) d\rho \geq -W(r), \quad \text{при } q = 0,$$

де $q(\rho) = \rho p(\rho)$.

Розв'язування цих рівнянь-нерівностей проведемо чисельно. Для цього побудуємо квадратурну формулу для інтеграла

$$\int_a^b q(\rho)F(r, \rho) d\rho. \quad (3)$$

Неперервну функцію q на проміжку $a < r < b$ опишемо лінійними кусково-неперервними інтерполяційними функціями [4, 7]:

$$q(r) = \sum_{n=0}^N q_n S_h(r - r_n), \quad (4)$$

де

$$S_h(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{h}, & |x| \leq h, \\ 0, & |x| > h, \end{cases}$$

$$q_n = q(r_n), \quad r_0 = a, \quad r_{j+1} = r_j + h, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

$N+1$ – кількість вузлових точок, $h = \frac{b-a}{N}$ – крок розбиття.

Тоді для інтеграла (3) отримуємо

$$\int_a^b q(\rho)F(r_n, \rho) d\rho = \sum_{m=0}^N A_{nm} q_m, \quad n = 0, \dots, N, \quad (5)$$

де

$$A_{nm} = \int_{r_n-h}^{r_n+h} S_h(t - r_m)F(r_n, t) dt.$$

Інтеграл A_{nm} знаходимо стандартними процедурами, які розроблені в математичних системах, у яких враховано наявність інтегровних особливостей у підінтегральних функціях (підінтегральна функція $F(r, \rho)$ має логарифмічну особливість при $r \rightarrow \rho$). Замінивши в системі рівнянь-нерівностей (2) інтегралі квадратурними формулами (5), отримуємо алгебричну систему рівнянь-нерівностей:

$$\sum_{m=0}^N A_{nm} q_m = -W_n, \quad \text{якщо } q_n > 0,$$

$$\sum_{m=0}^N A_{nm} q_m \geq -W_n, \quad \text{якщо } q_n = 0, \quad n = 0, \dots, N, \quad (6)$$

де $W_n = W(r_n)$.

Можна показати, що система рівнянь-нерівностей (6) має розв'язок, причому єдиний, оскільки згідно з [1, 2] вихідна контактна задача має єдиний розв'язок.

Помноживши перші рівняння із системи (6) на додатні величини q_n і додавши їх, отримаємо

$$J = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N A_{nm} q_m q_n + \sum_{n=0}^N W_n q_n.$$

Величина J за побудовою є додатною і на точному розв'язку контактної задачі, який додатково задовольняє нерівності (6), дорівнює нулеві. У роботі [3] показано, що контактний тиск p_c визначається з умови мінімуму величини

$$J = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N A_{nm} f_m f_n + \sum_{n=0}^N W_n f_n \quad (7)$$

при виконанні рівнянь-нерівностей

$$\sum_{m=0}^N A_{nm} f_m \geq -W_n, \quad f_n \geq 0, \quad n = 0, \dots, N. \quad (8)$$

Задача (7), (8) є задачею квадратичного програмування. Величина J при обмеженнях (8) є додатною величиною, яка на розв'язку рівнянь-нерівностей (6) дорівнює нулеві.

Отже, вихідну контактну задачу зведено до розв'язування відомої в літературі задачі (7), (8) квадратичного програмування, причому $q_n = f_n$. Для задачі квадратичного програмування в системах програмування розроблено стандартні програми, які є ефективними і простими у використанні.

Зазначимо, що в результаті розв'язування задачі отримуємо розподіл нормальних контактних напружень на всіх ділянках контакту, причому між ділянками контакту отримуємо нульові напруження.

2. Тестування методу. Для тестування методу виберемо розв'язок задачі, отриманий в [1]. Основа штамп описується формулою

$$z = f(r) = Ar^{2n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad A = \text{const}.$$

При заданій силі P , яка діє на штамп, радіус області контакту визначається за формулою

$$c = \left[\frac{\pi \vartheta (2n+1)!!}{2 \cdot 2nA(2n)!!} P \right]^{\frac{1}{2n+1}}, \quad (9)$$

зміщення штамп δ_0 – за формулою

$$\delta_0 = \left(\frac{\pi \vartheta}{2} P \right)^{\frac{2n}{2n+1}} \left[\frac{A(2n)!!(2n+1)^{2n}}{(2n-1)!!(2n)^{2n}} \right]^{\frac{1}{2n+1}}, \quad \vartheta = \frac{1-\nu^2}{\pi E}, \quad (10)$$

і контактний тиск – за формулою

$$p(r) = \frac{2n+1}{2} p_0 S_n(r/c) \sqrt{1-r^2/c^2}, \quad 0 < r < c, \quad (11)$$

де

$$p_0 = \frac{P}{\pi c^2}, \quad (12)$$

$$S_n(\rho) = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \left[\rho^{2n-2} + \frac{1}{2} \rho^{2n-4} + \frac{3}{2 \cdot 4} \rho^{2n-6} + \dots + \frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!} \rho^2 + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \right]. \quad (13)$$

Зокрема,

$$S_1(\rho) = 1, \quad S_2(\rho) = \frac{\rho^2 + 1}{3}, \quad S_3(\rho) = \frac{1}{15} (8\rho^4 + 4\rho^2 + 3).$$

Для тестування розглянемо випадок, коли форма основи штампа задається формулою

$$f(r) = Ar^{2n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad A = 1 \text{ м}^{1-2n}. \quad (14)$$

Обчислення виконано для штампа параболоїдної форми $f(r) = Ar^2$, $A = 1 \text{ м}^{-1}$ (тобто $n = 1$ в (14)) при зміщенні штампа $w_0 = -3.0411 \cdot 10^{-4} \text{ м}$. Точний розв'язок цієї задачі визначається за наведеними вище формулами (9)–(13) при $c = 0.0123 \text{ м}$ і $P = G_0 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-2}$, де $G_0 = \frac{G}{1-\nu}$.

При розв'язуванні контактної задачі запропонованим числовим методом (7), (8) прогнозовані межі області контакту покладали рівними $a = 0 \text{ м}$, $b = 0.015 \text{ м}$. Відносний контактний тиск $p_c = -\sigma_z/G_0$ при $\nu = 0.3$ зображено на рис. 2 суцільними лініями при виборі у формулі (4) $N = 80$ вузлових точок.

Аналогічні результати обчислень у випадку, коли $f(r) = Ar^4$, $n = 2$, $A = 1 \text{ м}^{-3}$, $w_0 = -4.4981 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, $c = 0.0651 \text{ м}$ для точного розв'язку та $N = 80$ у розв'язку запропонованим числовим методом (7), (8) (прогнозовані межі області контакту) наведено на рис. 3.

Відносний контактний тиск, обчислений за точними аналітичними формулами (9)–(13), наведено на рисунках кружечками.

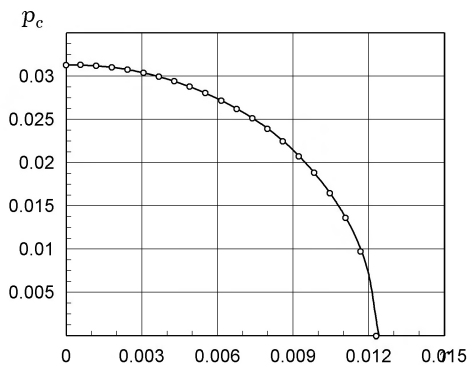


Рис. 2. Розподіл контактного тиску при $n = 1$, $N = 80$.

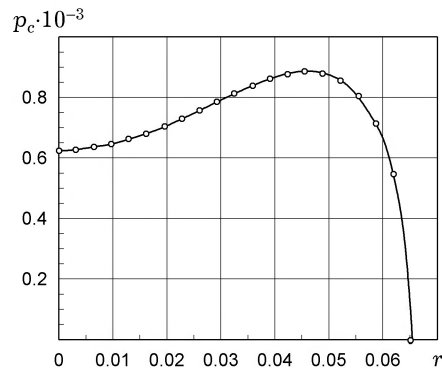


Рис. 3. Розподіл контактного тиску при $n = 2$, $N = 80$.

Також розглянуто розв'язок тестової задачі у випадку форми основи штампа $f(r) = Ar^6$, $A = 1 \text{ м}^{-5}$ (тобто при $n = 3$ у формулі (14)) для $c = 0.1371 \text{ м}$ і зміщенні штампа $w_0 = -2.1271 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

При розв'язуванні контактної задачі запропонованим числовим методом (7), (8) прогнозовані межі області контакту покладали рівними $a = 0$ м, $b = 0.16$ м. Розрахований відносний контактний тиск $p_c = -\sigma_z/G_0$ зображено на рис. 4 суцільними лініями при виборі $N = 80$ вузлових точок у формулі (4). Аналогічні результати обчислень при $N = 20$ наведено на рис. 5.

Обчислений відносний контактний тиск за точними формулами (9)–(13) показано на рисунках кружечками.

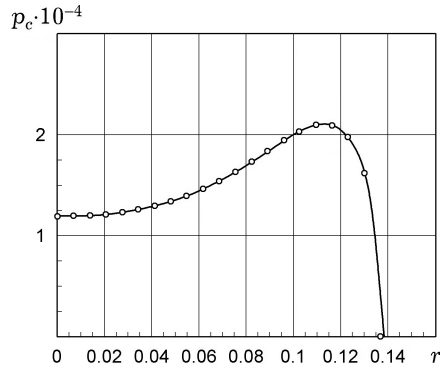


Рис. 4. Розподіл контактного тиску при $n = 3$ та $N = 80$.

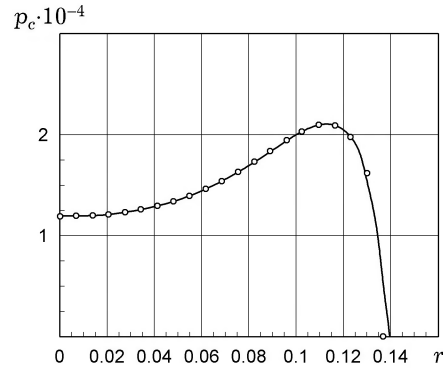


Рис. 5. Розподіл контактного тиску при $n = 3$ та $N = 20$.

Як бачимо з графіків, криві практично накладаються, що свідчить про достатньо високу точність побудованого чисельного алгоритму. При цьому встановлено, що при розрахунках числовим методом (7), (8) можна обмежитись невеликою кількістю вузлових точок ($N \sim 20$).

Застосуємо цей алгоритм до розв'язування осесиметричних задач теорії пружності про взаємодію пружного півпростору зі штампами складних форм.

3. Результати розрахунків. Розглянемо штамп сферичної форми з радіусом R . Рівняння поверхні основи штампа $z = f(r)$ в циліндричній системі координат перед навантаженням запишемо як

$$f(r) = R - \sqrt{R^2 - r^2}. \quad (15)$$

Зазначимо, що штамп дотикається до граничної поверхні $z = 0$ при $r = 0$. При малих ділянках контакту, на яких $r/R < 0.1$, маємо

$$f(r) = R \left(1 - \sqrt{1 - r^2/R^2} \right) \approx \frac{r^2}{2R}. \quad (16)$$

Це рівняння є також рівнянням параболоїда обертання.

Будемо розглядати також сферичний штамп з виїмкою. У літературі рівняння виїмки приймають у вигляді

$$z = g(r) = C(1 - r^2/d^2)^m, \quad (17)$$

де d – радіус виїмки, C – її глибина, $m > 0$ – заданий параметр, який характеризує гладкість виїмки. Будемо розглядати штампи гладкої форми, коли функція f , яка описує поверхню основи штампа, в області контакту є неперервною разом із похідною. Рівняння основи сферичного штампа з виїмкою малих розмірів запишемо у вигляді

$$f(r) = \begin{cases} g(r), & r < d, \\ R \left(1 - \sqrt{1 - (r-d)^2/R^2} \right), & r > d. \end{cases} \quad (18)$$

При малих розмірах області контакту наближене рівняння основи

штампа з виїмкою набуде вигляду

$$f(r) = \begin{cases} g(r), & r < d, \\ (r - d)^2/2R, & r > d. \end{cases} \quad (19)$$

(параболоїдний штамп з виїмкою).

При реалізації запропонованого алгоритму необхідно задавати область, у якій розміщені всі ділянки контакту (сталі a , b). Ці величини для штампів, основа яких описується поліноміальними функціями, можуть бути вибрані на основі аналітичного розв'язку (9), (10). При розгляді сферичного штампа область контакту не може перевищувати його радіус. Звідси маємо умову для визначення області контакту: $b < R$. У процесі розв'язування задачі межі області контакту доцільно коригувати (в напрямку зменшення), що підвищує точність обчислень.

На рис. 6а наведено графіки залежностей контактної тиску p/E від радіальної координати. Криві 1–4 відповідають значенням осідання штампа $w_0 = 0.0002, 0.00015, 0.0001, 0.00005$ м. Обчислення виконано при $d = 0.02$ м, $C = 0.0005$ м, $m = 1.5$ у формулі (17).

На рис. 6б наведено аналогічні результати при значенні $m = 2.5$ у формулі (17). При розв'язуванні контактної задачі запропонованим числовим методом прогнозовані межі області контакту поклали рівними $a = 0.006$ м, $b = 0.016$ м.

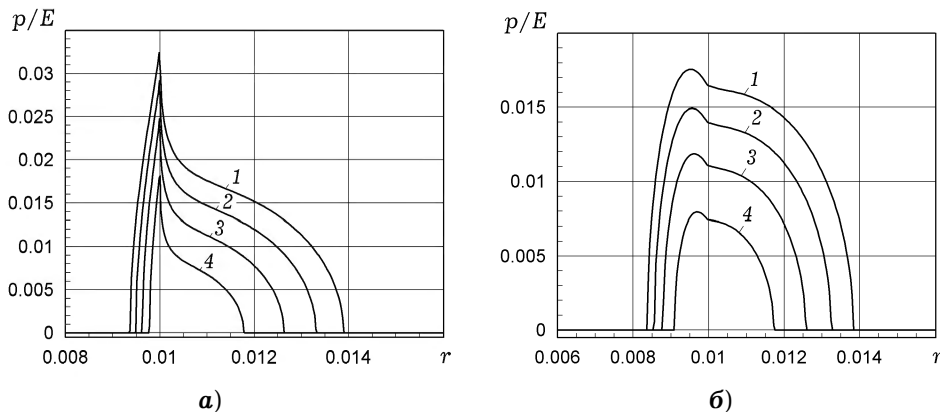


Рис. 6

Аналіз графіків, наведених на рис. 6а, засвідчує, що за малих початкових навантажень (малих осідань штампа) область контакту є вузьким кільцем, а максимум контактної тиску досягається на краю виїмки. При цьому графік його розподілу в околі максимуму має вигляд гострого піку.

За подальшого зростання осідання штампа контактне кільце розширюється несиметрично відносно краю виїмки – відстань від вершини виїмки до зовнішнього контуру кільця зростає швидше, ніж до внутрішнього. Несиметричним відносно краю виїмки є і розподіл контактної тиску.

На рис. 7а наведено залежності контактної тиску p/E від радіальної координати. Кривим 1–3 відповідають значення осідання штампа $w_0 = 0.0002, 0.00015, 0.0001$ м. Обчислення виконано при $d = 0.02$ м, $C = 0.0005$ м, $m = 3.5$. Розглянуто заглибини з різним ступенем гладкості. Штриховими кривими 1'–3' наведено аналогічні дані при глибині $C = 0.00012$ м. Прогнозовані межі області контакту поклали рівними $a = 0.006$ м, $b = 0.015$ м.

На рис. 7б наведено розподіл контактної тиску при осіданні штампа $w_0 = 0.0002$ м для різних значень глибини виїмки. Криві 1–5 відповідають значенням $C = 0.0025, 0.002, 0.0015, 0.001, 0.0005, 0.0003$ м.

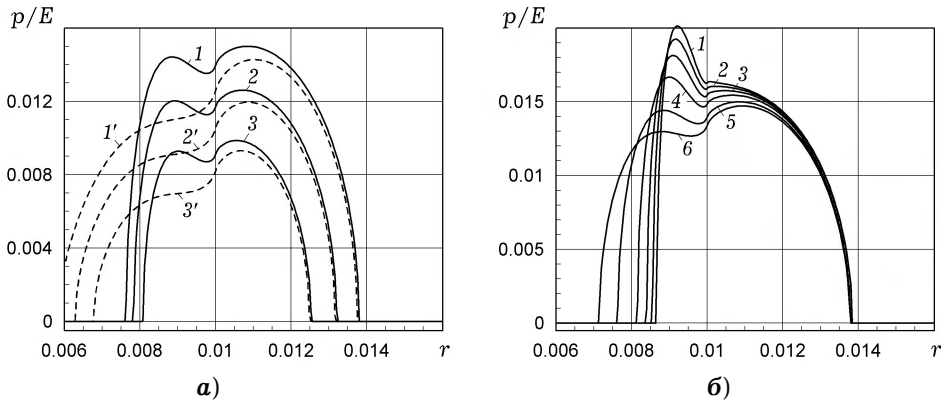


Рис. 7

Обчислення показали, що при розглянутих значеннях осідання w_0 контактні тиски для штампів сферичної і параболоїдної форм практично співпадають.

Визначено критичне значення осідання, коли зазор закривається повністю, і область контакту трансформується з кільцевої у кругову. Після цього за зростання навантаження спочатку виникає ще один локальний максимум контактного тиску зовні виїмки, який згодом стає його абсолютним максимумом. Водночас локальний мінімум контактного тиску зберігається в центрі виїмки.

Виконано також розрахунки для параболоїдного штампа, форма якого визначається співвідношенням (14).

Обчислені значення відносного контактного тиску для параболоїдного штампа практично збігаються зі значеннями контактного тиску для сферичного штампа при малих значеннях заглиблення штампа w_0 . Криві на для параболоїдного та сферичного штампів практично накладаються.

Розглянемо штамп із хвилястою основою (системою виїмок), форму якого опишемо так:

$$g(r) = w_0 + r_s \left[1 - \left(1 - \left(\frac{r}{r_s} \right)^\alpha \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right] + h \cos^2 \left(\gamma \frac{r}{r_s} \right), \quad (20)$$

де h – висота хвилястості, яка характеризує амплітуду мікровиступів, r_s і α – параметри, які описують форму штампа без виїмок (чим більше α , тим плоскіша поверхня); γ – частота синусоїди. За початкове наближення для меж області контакту приймали $a = 0$, $b = r_s$. Далі значення b уточнювали так, щоб область була близькою до реальної області контакту (але більшою від неї, тобто вибираємо b «із запасом»).

На рис. 8а наведено розподіл контактного тиску p/E (суцільна крива) і вигляд форми поверхні штампа $g(r)$ за формулою (20) (штрихова крива) при заглибленні штампа $w_0 = -0.0004$ м, висоті хвилястості основи штампа $h = 0.000025$ м та при $\gamma = 20$, $\alpha = 8$, $r_s = 0.02$. Аналогічні дані при $h = 0$ (випадок гладкого штампа) наведено на рис. 8б.

На рис. 9а наведено графіки залежності від радіальної координати r контактного тиску для випадку основи форми штампа із системою виїмок. Криві 1–5 побудовано для значень заглиблення штампа $w_0 = 0.0001$, 0.0002, 0.0005, 0.0009, 0.001 м при $h = 0.00002$ м, $\gamma = 20$, $\alpha = 8$, $r_s = 0.02$.

На рис. 9б наведено аналогічні дані при значенні $h = 0.00003$ м.

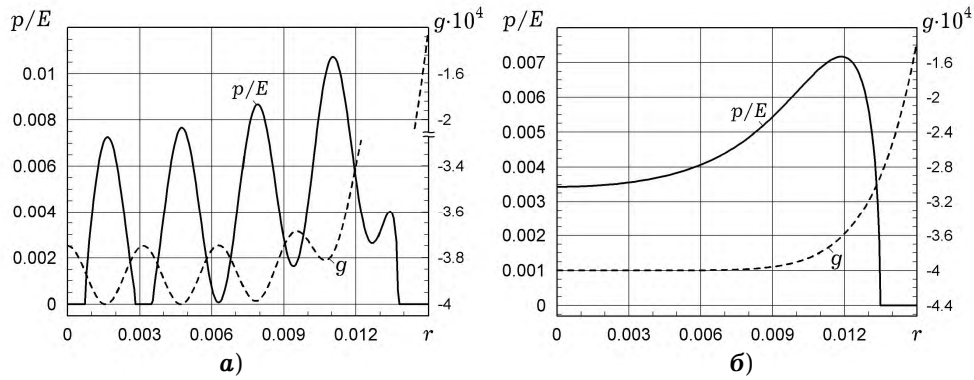


Рис. 8

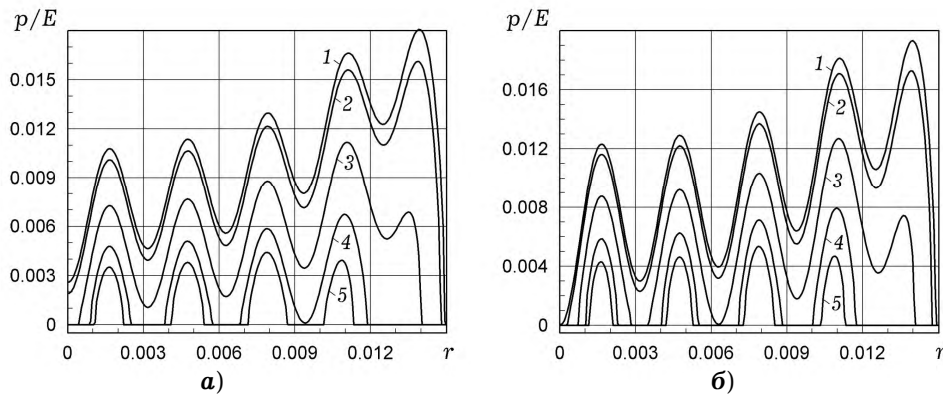


Рис. 9

Із результатів розрахунків, наведених на графіках, випливає, що при малих заглибленнях штамп існують області, на яких штамп не контактує із поверхнею півпростору (контактні напруження дорівнюють нулеві). При збільшенні заглиблення ці ділянки зменшуються, а ділянки контакту збільшуються.

Отже, запропонований підхід є ефективним для розв'язування контактних задач з великою кількістю наперед невідомих ділянок контакту.

Висновки. Досліджено контактну осесиметричну задачу про взаємодію пружного півпростору зі штампом, поверхня якого має складну форму. Під дією такого штамп контакту відбувається на окремих, наперед невідомих ділянках контакту.

Алгоритм розв'язування задачі побудовано на основі сумісного використання методу інтегральних рівнянь-нерівностей та квадратичного програмування. Область контакту визначається із системи алгебричних рівнянь, які отримуються з умови рівності нулеві контактних напружень на межах кільцевої ділянки контакту. Показано, що побудований алгоритм є ефективним і дає змогу розв'язувати осесиметричні контактні задачі для півпростору за дії штампів складних форм.

Із використанням розробленого алгоритму визначено та досліджено розподіл контактного тиску для виїмок різних форм. Розглянуто також випадок синусоїдальної поверхні штамп.

1. *Аргатов И. И., Дмитриев Н. Н.* Основы теории упругого дискретного контакта: Учеб. пособие. – Санкт-Петербург: Политехника, 2003. – 233 с.
2. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.
3. *Максимович В. М., Коцюба А. Ю., Лавренчук С. В.* Плоскі контактні задачі теорії пружності для тіл складної форми. – Луцьк: Луцьк. нац. техн. ун-ту, 2012. – 97 с.

4. Максимович О. В., Соляр Т. Я. Метод механічних квадратур для розв'язування інтегральних рівнянь термопружності для пластинок з тепловіддачею // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2009. – **52**, № 4. – С. 207–215.
 The same: *Maksymovych O. V., Solyar T. Ya.* Method of mechanical quadratures for solving integral equations of thermoelasticity for plates with heat exchange // *J. Math. Sci.* – 2011. – **174**, No. 3. – P. 387–399.
 – <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0306-x>.
5. *Kalker J. J.* Contact mechanical algorithms // *Commun. Appl. Numer. Meth.* – 1988. – **4**, No. 1. – P. 25–32. – <https://doi.org/10.1002/cnm.1630040105>.
6. *Kalker J. J.* Variational principles of contact elastostatics // *IMA J. Appl. Math.* – 1977. – **20**, No. 2. – P. 199–219. – <https://doi.org/10.1093/imamat/20.2.199>.
7. *Maksymovych O., Solyar T.* Determination of non-axisymmetric stresses in the bodies of revolution based on regularized integral equations // *Eur. J. Mech. A Solids.* – 2021. – **87**. – Art. 104218.
 – <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104218>.
8. *Signorini A.* Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearizzata // *Rendiconti di Matematica e delle Sue Applicazioni. Ser. V.* – 1959. – **18**, No. 1-2. – P. 95–139.

AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM FOR HALF-SPACE WITH NONSPECIFIED AREAS OF INTERACTION

A numerical algorithm for solving the axisymmetric problem of elasticity of the interaction of an elastic half-space with a rigid stamp surface of base of which has complex shape is presented. Under the action of such a stamp, contact occurs on isolate, previously unknown areas. The contact problem is formulated in the form of Signorini integral equalities-inequalities, which are transformed into a system of linear algebraic equalities-inequalities using quadrature formulas for singular integrals. The solution of this system is reduced to finding the minimum of a quadratic form under linear constraints on the unknown contact pressure. Using the developed algorithm, the axisymmetric problem of interaction of an elastic half-space with a paraboloidal stamp with a nondeep recess or a system of recesses is considered.

Key words: *axisymmetric problem, contact pressure, rigid stamp, system of recesses, integral equation method, quadratic programming.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
 ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
 01.10.22